SCIENCES SUP

Cours et exercices corrigés

BTS • IUT • CPGE • Écoles d'ingénieurs

MÉCANIQUE DU SOLIDE

Applications industrielles

2e édition

Pierre Agati
Yves Brémont
Gérard Delville

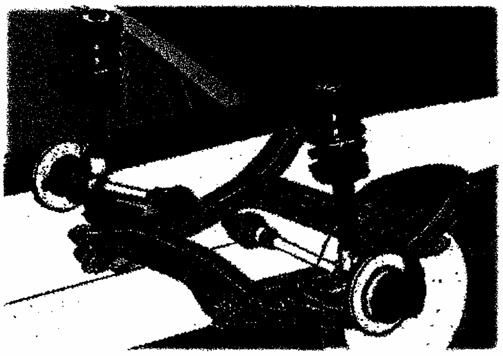
DUNOD

P. Agati Y. Brémont G. Delville

DEUG TI • IUT • STS

Mécanique du solide

Applications industrielles



DUNOD

N° 03

Mécanique du solide

Applications industrielles

P. Agati
Professeur agrégé à
l'Institut national
polytechnique de Grenoble

Y. Brémont
Professeur agrégé au
Centre de formation des professeurs
de l'enseignement technique de Cachan

G. Delville
Professeur agrégé au
Centre de formation des professeurs
de l'enseignement technique de Cachan

DUNOD

Dans la même collection

Mécanique

Liaisons et mécanismes, P. Agati, M. Rossetto
Mécanique appliquée, P. Agati et N. Mattéra

Technologie

Construction mécanique.
- *Transmission de puissance. 1. Principes*, F. Esnault
- *Transmission de puissance. 2. Applications*, F. Esnault
- *3. Transmission de puissance par liens flexibles*, F. Esnault

Électronique

Théorie du signal et composants, F. Manneville et J. Esquieu
Systèmes bouclés linéaires de communication et de filtrage, F. Manneville et J. Esquieu
Électronique de puissance, C. Naudet et M. Pinard

Informatique, Automatique

Transmissions et réseaux, S. Lohier et D. Présent
Automatique, P. Codron et S. Le Ballois

Pour plus d'informations, vous pouvez consulter notre site Web
http://www.dunod.com

Ce pictogramme mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du **photocopillage**.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie (**CFC**, 20 rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

© DUNOD, Paris, 1996
ISBN 2 10 003223 6
© Bordas, 1986, pour la 1re édition

Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite selon le Code de la propriété intellectuelle (Art L 122-4) et constitue une contrefaçon réprimée par le Code pénal. • Seules sont autorisées (Art L 122-5) les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, ainsi que les analyses et courtes citations justifiées par le caractère critique, pédagogique ou d'information de l'œuvre à laquelle elles sont incorporées, sous réserve, toutefois, du respect des dispositions des articles L 122-10 à L 122-12 du même Code, relatives à la reproduction par reprographie.

Avant-Propos

Il existe de très bons ouvrages de mécanique générale et appliquée à l'usage des étudiants d'Université ou d'écoles d'ingénieurs; il en est de même pour les élèves des lycées techniques.
Entre ces deux niveaux, existent cependant deux années d'études où il est très difficile de déterminer une unité : Sections de Techniciens Supérieurs, Instituts Universitaires de Technologie, classes préparatoires des Lycées Techniques, etc., sans oublier les actions en formation continue et les cours de promotion sociale.
Bien entendu, il n'était pas dans nos intentions et en quelques chapitres de combler la quasi absence de livres de mécanique à ce niveau. Il nous est apparu cependant qu'entre ces différentes formations, le besoin d'acquérir de solides connaissances de mécanique était un dénominateur commun et que la difficulté de l'entreprise résidait dans l'hétérogénéité des connaissances mathématiques. A ce niveau d'études, si le calcul vectoriel et le calcul intégral sont connus, l'expression matricielle peut être, soit familière, soit totalement inconnue. Nous avons décidé, pour nos deux ouvrages, de construire et d'articuler les différents chapitres de manière à constituer une chaîne d'acquisition de connaissances homogène et cela au niveau le plus élémentaire. Un astérisque (*) signale les paragraphes complémentaires qui nécessitent un outil mathématique plus élaboré. Comme dans les livres de première F et de terminale F de Pierre Agati, Nicolas Mattera et Gérard Delville, chaque chapitre est bâti sur le même plan général :

- — *Étude théorique et expérimentale*
- — *A savoir*
- — *Problème résolu*
- — *Conseils pour la résolution*
- — *Exercices avec réponses*
- — *Exercices sans réponses*

Une place importante a été faite aux tests d'auto-évaluation qui, sous la forme du problème résolu, des exercices avec réponses et des exercices sans réponses permettent de contrôler la solidité des acquisitions.
Le temps qui passe et l'usage que l'on fera de nos livres nous diront si nous avons atteint le but fixé.
Nous remercions Messieurs David, Réocreux, Sincé et, plus particulièrement, Monsieur Konieczka, pour l'aide et les conseils qu'ils nous ont apportés, et nous serons très honorés de recevoir les critiques et les suggestions aussi bien de nos collègues que des étudiants qui auront utilisé ces ouvrages.

LES AUTEURS.

Avis au lecteur

Les paragraphes du livre précédés d'un astérisque (*) nécessitent pour leur compréhension la connaissance de notions mathématiques qui ne sont pas aux programmes des BTS (calcul matriciel, différentielle d'une fonction de plusieurs variables), mais qui sont aux programmes des IUT, des classes préparatoires à l'ENS de Cachan, à l'ENSAM et aux écoles d'ingénieurs assimilées.

Ces notions sont nécessaires pour l'étude de la cinématique et de la dynamique du solide en mouvement dans l'espace à trois dimensions. L'étude de ces mouvements n'étant pas aux programmes de certains BTS, il suffira à l'étudiant concerné de laisser de côté ces paragraphes. Ce livre a été conçu pour que sa lecture soit cohérente sans ces paragraphes.

table des matières

CINÉMATIQUE

1 Modélisation et paramétrage des mécanismes 8
- 1. Modélisation des pièces mécaniques 8
- 2. Modélisation des liaisons 8
- 3. Nombre de degrés de liberté d'une liaison 14
- 4. Paramétrage de la position d'un solide par rapport à un repère 14
- 5. Schéma cinématique des mécanismes 18
- 6. Loi «Entrée-Sortie» d'un mécanisme 20
- Problème résolu 20
- Exercices avec réponses 23
- Exercices sans réponses 27

2 Vecteurs position, vitesse et accélération d'un point d'un solide 3
- 1. Mesure du temps 3
- 2. Vecteur position d'un point d'un solide 3
- 3. Vecteur vitesse d'un point d'un solide 3
- 4. Vecteur accélération d'un point d'un solide 3
- 5. Calcul du vecteur vitesse et du vecteur accélération d'un point d'un solide 3
- 6. Dérivation graphique 3
- Problème résolu 4
- Exercices avec réponses 4
- Exercices sans réponses

3 Champ des vecteurs vitesse et des vecteurs accélération des points d'un solide
- 1. Champ des vecteurs vitesse des points d'un solide
- 2. Champ des vecteurs accélération des points d'un solide
- Problème résolu
- Exercices avec réponses
- Exercices sans réponses

4 Composition des mouvements
- 1. Compositions des vecteurs vitesse
- 2. Vecteur vitesse de glissement en un point entre deux solides
- 3. Composition des vecteurs rotation
- 4. Vecteurs rotation de roulement et rotation de pivotement
- 5. Composition des torseurs cinématiques
- 6. Composition des vecteurs accélération

Problème résolu 77
Exercices avec réponses 79
Exercices sans réponses 85

5 Mouvement plan sur plan 91

1. Centre instantané de rotation. Base et roulante 91
2. Recherche géométrique du centre instantané de rotation 91
3. Propriété de la base et de la roulante 92
4. Profils conjugués 93
5. Mouvement plan sur plan de trois plans 95

Problème résolu 96
Exercices avec réponses 97
Exercices sans réponses 101

STATIQUE

1 Modélisation des actions mécaniques 106

1. Représentation mathématique des actions mécaniques 106
2. Modélisation des actions mécaniques à distance 110
3. Modélisation des actions mécaniques de contact 113

Problème résolu 124
Exercices avec réponses 127
Exercices sans réponses 131

2 Principe fondamental de la statique 134

1. Équilibre d'un ensemble matériel par rapport à un repère 134
2. Principe fondamental 134
3. Théorème des actions mutuelles 135
4. Application : système vis-écrou 136

Problème résolu 140
Exercices avec réponses 145
Exercices sans réponses 151

3 Hyperstatisme et mobilité des mécanismes 155

1. Hypothèses de l'étude 155
2. Graphe des liaisons d'un mécanisme 155
3. Torseurs statique et cinématique d'une liaison 156
4. Liaison équivalente 157
5. Liaisons en parallèle 158
6. Liaisons en série 161
7. Avantages et inconvénients d'un mécanisme isostatique par rapport à un mécanisme hyperstatique 163
8. Maintien du contact dans les liaisons 164
9. Chaîne continue fermée 165
10. Chaîne complexe 168

Problème résolu 172
Exercices avec réponses 176
Exercices sans réponses 185

DYNAMIQUE

1 **Cinétique** 192

1. Principe de conservation de la masse 192
2. Torseur cinétique 192
3. Torseur dynamique 193
4. Relation entre le moment cinétique et le moment dynamique 194
5. Énergie cinétique 194
6. Applications 194
7. Remarques 19
8. Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe 19
9. Opérateur d'inertie d'un solide 19
10. Base principale d'inertie 19
11. Les différents moments d'inertie 20
12. Théorème de Huyghens 20
13. Moment cinétique d'un solide 20
14. Énergie cinétique d'un solide 20

Problème résolu 20
Exercices avec réponses 21
Exercices sans réponses 2

2 **Principe fondamental de la dynamique** 2

1. Principe fondamental 2
2. Théorème des actions mutuelles 2
3. Cas particuliers 2
4. Applications 2
5. Expression du principe fondamental de la dynamique dans un repère non galiléen 2
6. Équilibrage dynamique

Problème résolu
Exercices avec réponses
Exercices sans réponses

3 **Énergétique**

1. Puissance
2. Travail
3. Énergie potentielle
4. Théorème de l'énergie cinétique

Problème résolu
Exercices avec réponses
Exercices sans réponses

1^re^ partie

CINÉMATIQUE

1 modélisation et paramétrage des mécanismes

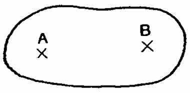
Un mécanisme est un ensemble de pièces mécaniques reliées entre elles par des liaisons, en vue de réaliser une fonction déterminée.
Le but de ce livre est l'étude des mouvements et des efforts dans les mécanismes. Pour cela, nous allons modéliser les pièces mécaniques et les liaisons.

1. MODÉLISATION DES PIÈCES MÉCANIQUES

Nous considérerons que les pièces mécaniques peuvent être modélisées, en première approximation, par des solides indéformables. Ceci exclut bien sûr les pièces dont la fonction est précisément de se déformer : ressorts, rondelles élastiques, barres de torsion, etc.

Définition d'un solide indéformable

Une pièce mécanique (S) peut être considérée comme un solide indéformable si quels que soient les points A et B de (S) la distance AB reste constante au cours du temps *t*.



$\forall A$ et $B \in (S)$, $\forall t$, $\|\overrightarrow{AB}\| = Cte.$

Fig. 1

2. MODÉLISATION DES LIAISONS

Définissons les modèles de liaisons, qui existent entre deux solides (S_1) et (S_2), que l'on utilisera pour établir les schémas cinématiques des mécanismes.
Pour chaque modèle de liaison, qui est un modèle de référence théorique, nous donnerons :

- la définition mathématique;
- les mouvements relatifs que la liaison autorise.
- les schématisations planes et spatiales normalisées sous forme de tableau, au paragraphe 2.11.

Pour cela un repère orthonormé di $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sera placé sur chaque liaison. Ce repère n'est lié à aucun des deux solides (ou (S_2).

2.1. LIAISON PONCTUELLE

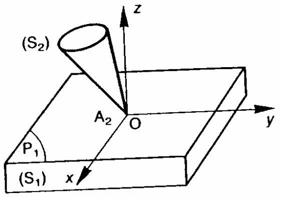


Fig. 2

Définition

Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une l ponctuelle si, au cours de leur mouvement r un point A_2 de (S_2) reste dans un plan P_1 d

Mouvement relatif

Considérons le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tel qu origine O soit confondue avec le point A_2 vecteur unitaire $\vec{z}$ soit perpendiculaire au pl Par rapport aux trois axes de ce repè mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) se déco en rotations et translations élémentaires suiv

- rotations autour de $(O, \vec{x})$, $(O, \vec{y})$ et (
- translations suivant $(O, \vec{x})$ et $(O, \vec{y})$.

2.2. LIAISON LINÉIQUE RECTILIGNE

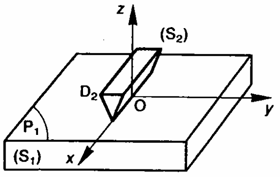


Fig. 3

Définition

Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison linéique rectiligne si, au cours de leur mouvement relatif, une droite D_2 de (S_2) reste dans un plan P_1 de (S_1).

Mouvement relatif

Considérons le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tel que l'axe $(O, \vec{x})$ soit confondu avec la droite D_2 et le vecteur unitaire $\vec{z}$ perpendiculaire au plan P_1.
Le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) se décompose en :

- — rotations autour de $(O, \vec{x})$ et $(O, \vec{z})$,
- — translations suivant $(O, \vec{x})$ et $(O, \vec{y})$.

2.3. LIAISON LINÉIQUE ANNULAIRE

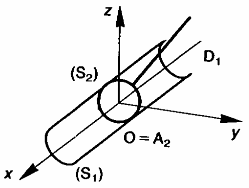


Fig. 4

Définition

Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison linéique annulaire si, au cours de leur mouvement relatif, un point A_2 de (S_2) reste sur une droite D_1 de (S_1).

Mouvement relatif

Considérons le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ d'origine A_2, tel que l'axe $(O, \vec{x})$ soit confondu avec la droite D_1. Par rapport à ce repère, le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) est constitué des mouvements élémentaires suivants :

- — rotations autour de $(O, \vec{x})$, $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$,
- — translation suivant $(O, \vec{x})$.

2.4. LIAISON ROTULE

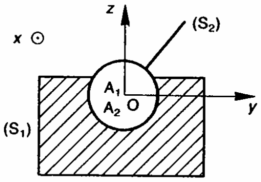


Fig. 5

Définition

Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison rotule si, au cours de leur mouvement relatif, un point A_2 de (S_2) reste confondu avec un point A_1 de (S_1).

Mouvement relatif

Plaçons l'origine O du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ au point A_1 confondu avec A_2. Le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) se décompose en :

- — rotations autour de $(O, \vec{x})$, $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$.

2.5. LIAISON APPUI PLAN

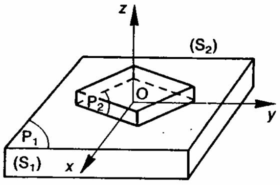


Fig. 6

Définition

Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison appui plan si, au cours de leur mouvement relatif, un plan P_2 de (S_2) reste confondu avec un plan P_1 de (S_1).

Mouvement relatif

En positionnant le vecteur unitaire $\vec{z}$ du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ perpendiculaire aux plans P_1 et P_2 on constate que le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) se décompose en :

- — rotation autour de $(O, \vec{z})$,
- — translations suivant $(O, \vec{x})$ et $(O, \vec{y})$.

2.6. LIAISON PIVOT GLISSANT

Définition

Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison pivot glissant si, au cours de leur mouvement relatif, une droite D_2 de (S_2) reste confondue avec une droite D_1 et (S_1).

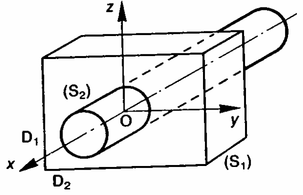


Fig. 7

Mouvement relatif

Plaçons l'axe $(O, \vec{x})$ du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sur les droites D_1 et D_2. Le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) se décompose en :

- rotation autour de $(O, \vec{x})$,
- translation suivant $(O, \vec{x})$.

2.7. LIAISON GLISSIÈRE HÉLICOÏDALE

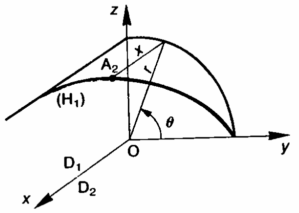


Fig. 8

Définition

Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison glissière hélicoïdale si, au cours de leur mouvement relatif, d'une part, une droite D_2 de (S_2) reste confondue avec l'axe D_1 d'une hélice circulaire H_1 de rayon r liée à (S_1), et d'autre part, un point A_2 de (S_2) situé à une distance r de D_2 décrit l'hélice circulaire H_1.

Mouvement relatif

En positionnant l'axe $(O, \vec{x})$ du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sur les droites D_1 et D_2, on constate que le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) se décompose en :

- rotation autour de $(O, \vec{x})$,
- translation suivant $(O, \vec{x})$.

Ces deux mouvements ne sont pas indépendants. En effet, si l'on suppose le repère R lié à (S_1) on peut définir la position du point A_2 par rapport à R, par le paramètre angulaire θ et l'abscisse x *(figure 8)*.

En appelant p le pas réduit de l'hélice (p = pas de l'hélice divisé par 2π) on a entre x et θ la relation (dans le cas d'une hélice à droite) :

$$\boxed{x = p\theta}$$

2.8. LIAISON GLISSIÈRE

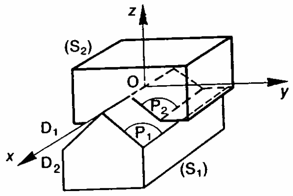


Fig. 9

Définition

Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison glissi si, au cours de leur mouvement relatif, d'une pa un plan P_2 de S_2 reste confondu avec un plan de (S_1), et d'autre part, une droite D_2 liée à (et située dans le plan P_2 reste confondue avec droite D_1 liée à (S_1) et située dans le plan P_1.

Mouvement relatif

Plaçons, l'axe $(O, \vec{x})$ du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ les droites D_1 et D_2. Le mouvement de (S_2) rapport à (S_1) est une translation d'axe $(O, \vec{x})$

2.9. LIAISON PIVOT

Définition

Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison si au cours de leur mouvement relatif deux p A_2 et B_2 de (S_2), distants d'une longueur l, re confondus avec deux points A_1 et B_1 de distants d'une même longueur l (non nulle).

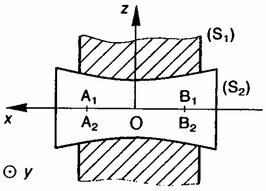


Fig. 10

Mouvement relatif

Plaçons l'axe $(O, \vec{x})$ du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sur les droites A_1B_1 et A_2B_2. Le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) est une rotation d'axe $(O, \vec{x})$.

2.10. LIAISON ENCASTREMENT

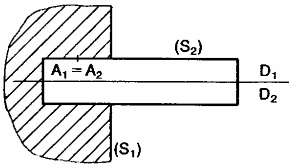


Fig. 11

Définition

Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison encastrement si, au cours de leur mouvement relatif, d'une part, une droite D_2 de (S_2) reste confondue avec une droite D_1 de (S_1), et d'autre part, un point A_2 de (S_2) situé à une distance d non nulle de D_2 reste confondu avec un point A_1 de (S_1) situé à une distance d non nulle de D_1.

Mouvement relatif

La liaison encastrement ne permet aucun mouvement relatif entre (S_1) et (S_2).

2.11. SCHÉMATISATIONS NORMALISÉES DES LIAISONS

Dans le tableau de la *figure 12* sont présentées les schématisations planes et spatiales normalisées des liaisons que nous venons d'étudier. Comme précédemment, sur chaque liaison est placé le repère orthonormé direct $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

2.12. CHOIX D'UNE MODÉLISATION DE LIAISON

D'un point de vue cinématique, une liaison réelle entre deux solides (S_1) et (S_2) est caractérisée par :

— une géométrie (forme, dimension de la liaison),
— un jeu de fonctionnement.

EXEMPLE 1

Liaison entre un arbre (S_2) et son alésage (S_1).

Notons :

$$\begin{cases} d & \text{le diamètre de l'arbre.} \\ l & \text{la longueur du palier.} \\ j & \text{le jeu radial dans la liaison } (j>0). \end{cases}$$

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct, l'axe $(O, \vec{x})$ étant placé suivant l'axe de l'alésage.
Les mouvements de (S_2) par rapport à (S_1) se classent, compte tenu du jeu j, en deux catégories :

- Mouvements de grande amplitude :
  - — rotations autour de $(O, \vec{x})$,
  - — translation suivant $(O, \vec{x})$.
- Mouvements de *faible* amplitude :
  - — rotations autour de $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$,
  - — translations suivant $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$.

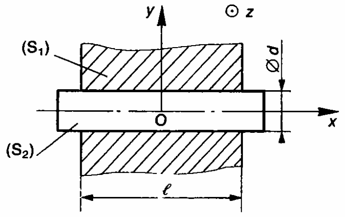


Fig. 13.

L'amplitude de ces mouvements dits de *faible* amplitude est fonction du jeu j et du rapport $\frac{l}{d}$ de la liaison.
Le choix de la modélisation d'une liaison réelle par tel ou tel modèle de liaison est fonction du degré de précision que l'on décide d'adopter. Dans le cas présent, si l'on suppose que l'ajustement est du type H7g6, on considère généralement que l'on peut modéliser la liaison, avec une précision suffisante par :

— une liaison pivot glissant pour $\frac{l}{d} \geq 1{,}5$,

— une liaison linéique annulaire pour $\frac{l}{d} \leq 0{,}2$.

Pour $0{,}2 < \frac{l}{d} < 1{,}5$ la modélisation de la liaison sera fonction du degré de précision que l'on adoptera pour analyser le mécanisme dont fait partie la liaison.

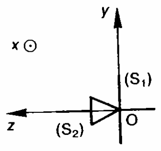
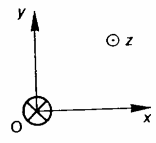
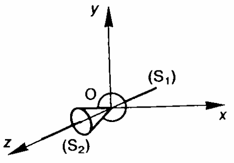
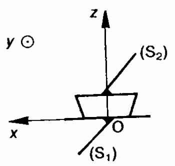
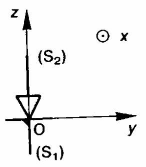
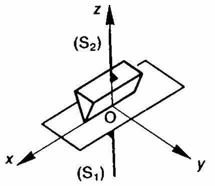
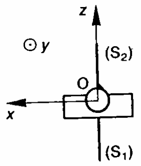
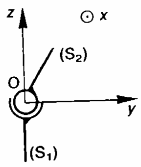
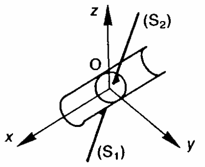
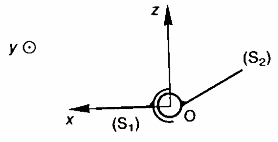
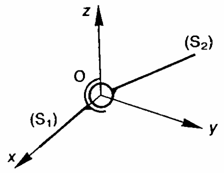
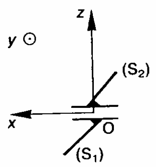
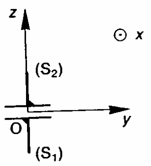
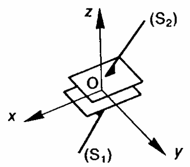
	SCHÉMATISATIONS NORMALISÉES DES LIAISONS	
Liaison	plane	spatiale
ponctuelle de normale (O, $\vec{z}$)	 	
linéique rectiligne d'axe (O, $\vec{x}$) de normale (O, $\vec{z}$)	 	
linéique annulaire d'axe (O, $\vec{x}$)	 	
rotule de centre O		
appui plan de normale (O, $\vec{z}$)	 	

Fig. 12.*a*.

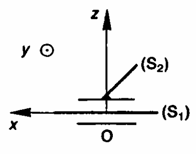
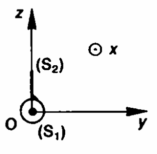
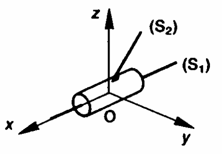
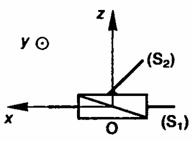
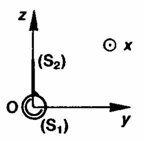
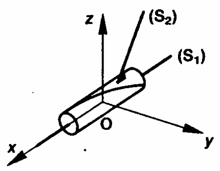
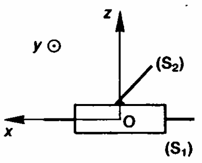
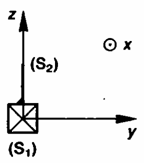
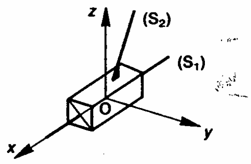
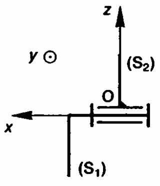
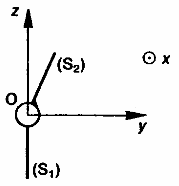
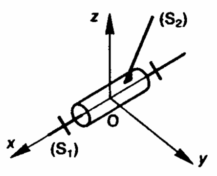
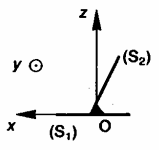
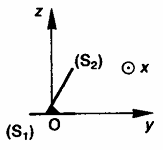
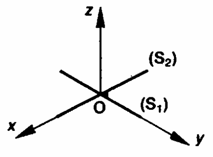
	SCHÉMATISATIONS NORMALISÉES DES LIAISONS	
Liaison	**plane**	**spatiale**
pivot glissant d'axe (O, $\vec{x}$)	 	
glissière hélicoïdale d'axe (O, $\vec{x}$)	 	
glissière d'axe (O, $\vec{x}$)	 	
pivot d'axe (O, $\vec{x}$)	 	
encastrement	 	

Fig. 12.*b*.

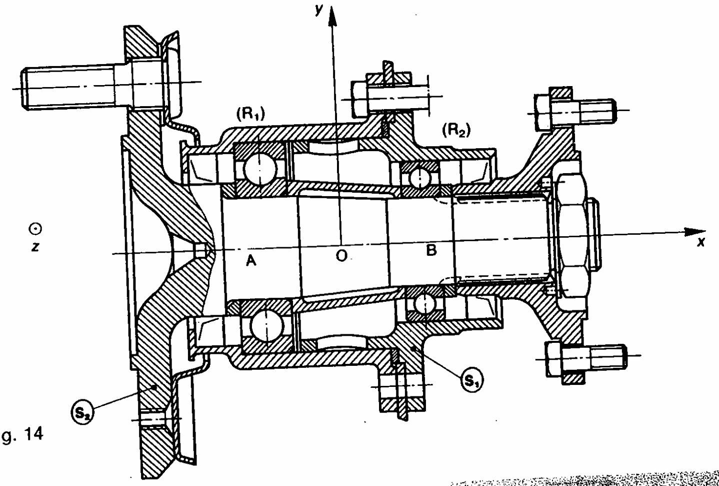


Fig. 14

EXEMPLE 2

Montage de l'arbre d'une fusée de roue dans son palier sur deux roulements rigides à une rangée de billes *(figure 14)*.
Globalement la liaison de l'arbre (S_2) par rapport au palier (S_1) est modélisable, avec une précision donnée, par une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$.
Cette liaison est réalisée avec deux roulements rigides à une rangée de billes (R_1) et (R_2).
Considérons la liaison réalisée par un seul roulement (R_1) par exemple.
Modélisons la liaison entre la bague extérieure du roulement et (S_1) par une liaison encastrement ainsi que la liaison entre la bague intérieure du roulement et (S_2).
Reste à modéliser la liaison entre la bague intérieure et la bague extérieure. Pour cela nous devons tenir compte :
— du rotulage possible du roulement, c'est-à-dire de l'angle d'inclinaison maximal que peut prendre l'axe de la bague intérieure par rapport à l'axe de la bague extérieure (angle noté α),
— de la déformation de l'arbre, plus précisément de l'inclinaison maximale que peut prendre l'axe de la section droite située en A par rapport à la ligne moyenne de l'arbre (angle noté β) *(figure 15)*.

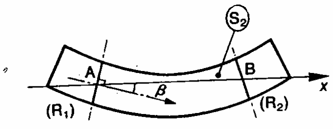


Fig. 15

Suivant les valeurs relatives de α et β on adopte les modélisations suivantes :
$\alpha \geqslant \beta$: modélisation par une liaison rotule,
$\alpha < \beta$: modélisation par une liaison pivot.

3. NOMBRE DE DEGRÉS DE LIBERTÉ D'UNE LIAISON

Définition

Le nombre de degrés de liberté d'une liaison le nombre de mouvements indépendants de r tion et de translation suivant $(O, \vec{x})$, $(O, \vec{y}$ $(O, \vec{z})$ que la liaison autorise.

EXEMPLES

— La liaison ponctuelle est à 5 degrés de liber
— la liaison pivot glissant est à 2 degrés de lil
— la liaison glissière hélicoïdale est à 1 degı liberté car la translation et la rotation suivant de la liaison sont proportionnelles.

REMARQUE

Lorsque deux solides n'ont aucune liaison qu'ils ont une ***liaison libre****. Cette liaison 6 degrés de liberté.*

4. PARAMÉTRAGE DE LA POSITION D'UN SOLIDE PA RAPPORT A UN REPÈRE

Pour définir la position d'un solide (S) par r à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, il faut commenc lier à ce solide un repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et définir la position du repère R_1 par rapp repère R.

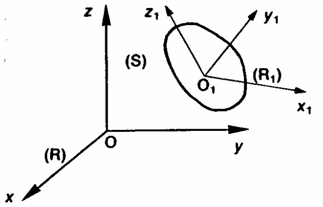


Fig. 16

Le repère R_1 est caractérisé par son origine O_1 et sa base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.
Nous devons donc définir la position de l'origine O_1 dans R et l'orientation de la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ de R_1 par rapport à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de R.

REMARQUE

Tous les repères introduits sont orthonormés directs.

4.1. PARAMÉTRAGE DE LA POSITION DE L'ORIGINE O_1

Les paramètres qui définissent la position d'un point dans un repère sont habituellement :

- les coordonnées cartésiennes,
- les coordonnées cylindriques,
- les coordonnées sphériques.

Le type de coordonnées choisi est fonction du problème que l'on a à traiter (problème à symétrie de révolution autour d'un axe, problème à symétrie sphérique, ...).

4.1.1. Coordonnées cartésiennes

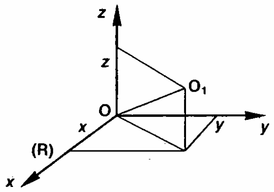


Fig. 17

Les coordonnées cartésiennes x, y, z du point O_1 sont les projections orthogonales du vecteur $\overline{OO_1}$ sur la base du repère R.
Ces paramètres sont en nombre nécessaire et suffisant pour positionner O_1 dans R.
Par suite, les paramètres x, y, z sont dits *indépendants*.

Imaginons que OO_1 soit une tige de longueur l ayant une liaison rotule de centre O avec un bâti, et supposons que pour la commodité des calculs on soit amené à traiter le problème avec les quatre paramètres x, y, z, l.
Dans ce cas, les quatre paramètres introduits sont liés entre eux par la relation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2.$$

Les paramètres x, y, z, l sont alors dits *dépendants*.
D'une façon générale, si l'on définit la position d'un point dans un repère par n paramètres $(n \geqslant 3)$, il existe entre ces n paramètres, introduits à priori, q relations indépendantes, telles que :

$$\boxed{q = n - 3.}$$

4.1.2. Coordonnées cylindriques

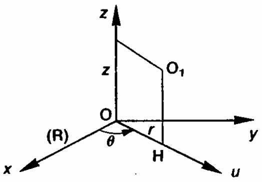


Fig. 18

Soit

$$\begin{cases} \text{H la projection orthogonale du point } O_1 \text{ sur le plan } (O, \vec{x}, \vec{y}). \\ \vec{u} \text{ un vecteur unitaire de direction OH.} \end{cases}$$

Les coordonnées cylindriques du point O_1 dans le repère R sont :

$$\begin{cases} r = \overline{OH} : \text{mesure algébrique de } \overline{OH} \text{ sur l'axe } (O, \vec{u}). \\ \theta = (\vec{x}, \vec{u}) : \text{angle orienté par le vecteur unitaire } \vec{z} \text{ normal au plan } (\vec{x}, \vec{u}). \\ z : \text{projection orthogonale de } \overline{OO_1} \text{ sur l'axe } (O, \vec{z}). \end{cases}$$

Relations entre les systèmes de coordonnées cartésiennes et cylindriques

Si l'on définit la position du point O_1 par les cinq paramètres x, y, z, r et θ, il existe entre eux $q = 5 - 3 = 2$ relations indépendantes.
Ces deux relations s'obtiennent en projetant le vecteur $\overline{OH}$ sur $\vec{x}$ et $\vec{y}$:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta. \end{aligned}}$$

4.1.3. Coordonnées sphériques

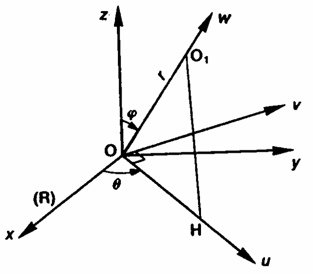


Fig. 19

Soit

- H la projection orthogonale du point O_1 sur le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$.
- $\vec{u}$ un vecteur unitaire de direction OH.
- $\vec{v}$ le troisième vecteur unitaire de la base orthonormée directe $(\vec{z}, \vec{u}, \vec{v})$.
- $\vec{w}$ un vecteur unitaire de direction OO_1.

Les coordonnées sphériques du point O_1 dans le repère R sont :

- $r = \overline{OO_1}$: mesure algébrique de $\overrightarrow{OO_1}$ sur l'axe $(O, \vec{w})$.
- $\theta = (\vec{x}, \vec{u})$: angle orienté par le vecteur unitaire $\vec{z}$ normal au plan $(\vec{x}, \vec{u})$.
- $\varphi = (\vec{z}, \vec{w})$: angle orienté par le vecteur unitaire $\vec{v}$ normal au plan $(\vec{z}, \vec{w})$.

Relations entre les systèmes de coordonnées cartésiennes et sphériques

Si l'on définit la position du point O_1 par les six paramètres x, y, z, r, θ, φ, il existe entre eux $q = 6 - 3 = 3$ relations indépendantes.
Ces trois relations s'obtiennent en projetant le vecteur $\overrightarrow{OO_1}$ sur $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r \sin\varphi \cos\theta \\ y &= r \sin\varphi \sin\theta \\ z &= r \cos\varphi \end{aligned}}$$

4.2. PARAMÉTRAGE DE L'ORIENTATION DE LA BASE $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

4.2.1. Nombre de paramètres indépendants positionnant un solide dans un repère

Soient O_1, O_2, O_3 trois points non alignés du solide (S). Si l'on se donne la position des trois points O_1, O_2, O_3 de (S) dans R, la position de (S) dans R est parfaitement déterminée, mais les neuf paramètres introduits sont dépendants. En effet, il existe entre eux les trois relations indépendantes suivantes :

$$\|\overrightarrow{O_1O_2}\| = \text{Cte}$$
$$\|\overrightarrow{O_2O_3}\| = \text{Cte}$$
$$\|\overrightarrow{O_3O_1}\| = \text{Cte}.$$

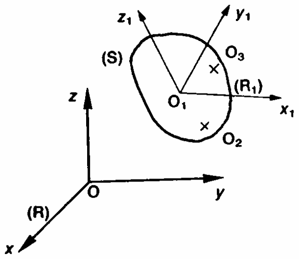


Fig. 20

En adoptant un raisonnement analogue à celui du paragraphe 4.1.1., nous dirons que : le nombre de paramètres indépendants qui positionnent (S) dans R est égal au nombre de paramètres introduits à priori (9) moins le nombre de relations indépendantes entre ces paramètres (3).
Par conséquent, le nombre de paramètres indépendants qui positionnent (S) dans R est de $9 - 3 = 6$.
Trois paramètres sont nécessaires pour définir la position de O_1 dans R.
Par suite, il faut et il suffit de trois paramètres indépendants pour orienter la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ du repère R_1 par rapport à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ du repère R.
Les trois paramètres choisis habituellement sont les trois angles d'Euler.

4.2.2. Angles d'Euler

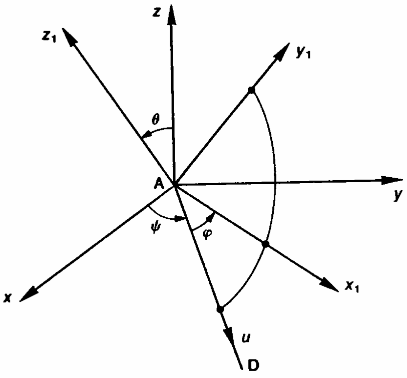


Fig. 21. Angles d'Euler

Plaçons les six origines des représentants des vecteurs libres $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, $\vec{x}_1$, $\vec{y}_1$, $\vec{z}_1$ en un même point A *(figure 21).*
Soit D la droite d'intersection des plans $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ et $(A, \vec{x}, \vec{y})$.
Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de direction D. Les trois angles d'Euler sont les suivants :

$$\begin{cases} \psi = (\vec{x}, \vec{u}) : \text{angle orienté par } \vec{z}, \\ \theta = (\vec{z}, \vec{z}_1) : \text{angle orienté par } \vec{u}, \\ \varphi = (\vec{u}, \vec{x}_1) : \text{angle orienté par } \vec{z}_1. \end{cases}$$

Vocabulaire

Ces trois angles qui sont utilisés dans l'étude du mouvement gyroscopique portent les noms suivants :

$$\begin{cases} \psi : \text{angle de précession,} \\ \theta : \text{angle de nutation,} \\ \varphi : \text{angle de rotation propre.} \end{cases}$$

La droite D est appelée axe nodal ou ligne des nœuds.

Bases intermédiaires

On peut considérer que ces trois angles correspondent à trois rotations planes successives, qui permettent de faire coïncider la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ avec la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, ce qui définit au passage deux bases intermédiaires, orthonormées directes *(figure 22).*

Première rotation

$$(\overrightarrow{x, y, z}) \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{z},\ \psi)} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}).$$

Deuxième rotation

$$(\overrightarrow{u, v, z}) \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{u},\ \theta)} (\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1).$$

Troisième rotation

$$(\overrightarrow{u, w, z_1}) \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{z}_1,\ \varphi)} (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1).$$

La base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ est appelée première base intermédiaire.
La base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)$ est appelée deuxième base intermédiaire.

REMARQUE

> *Les angles ψ et φ ne sont plus définis lorsque $\theta = 0$.*

4.2.3. Cas particulier : Solide linéaire rectiligne

Soit un solide (S) que l'on peut assimiler à un segment de droite O_1O_2.

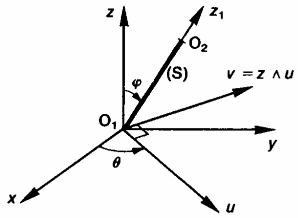


Fig. 23

Soit $(O_1, \vec{z}_1)$ un axe lié à (S) de support O_1O_2. Par un raisonnement analogue à celui tenu au paragraphe 4.2.1., on montre aisément que la position de (S) dans R est fonction de cinq paramètres indépendants.

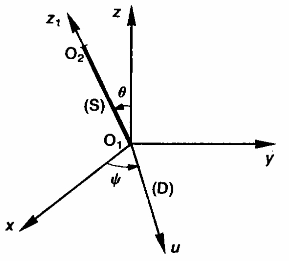


Fig. 24

Trois paramètres sont nécessaires pour positionner le point O_1 dans R. Il en reste donc deux pour orienter (S) autour du point O_1. On choisit généralement deux angles dans l'un ou l'autre des paramétrages suivants :

— Angles d'Euler ψ et θ.
La droite D est l'intersection du plan $(O_1, \vec{x}, \vec{y})$ avec le plan perpendiculaire en O_1 à $\vec{z}_1$ *(figure 23).*

— Angles θ et φ du paramétrage sphérique d'un point *(figure 24).*

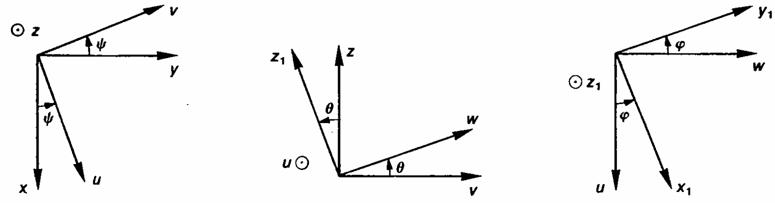
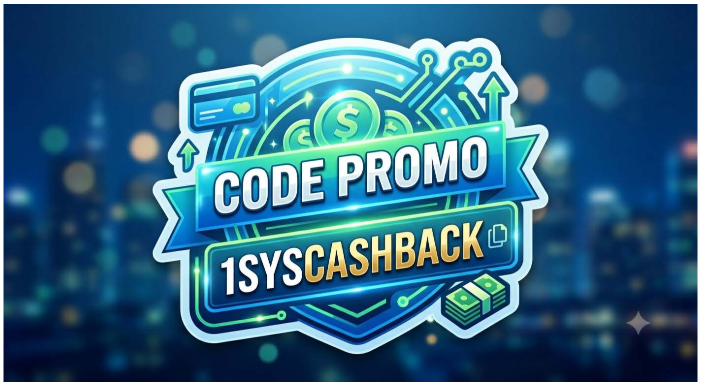
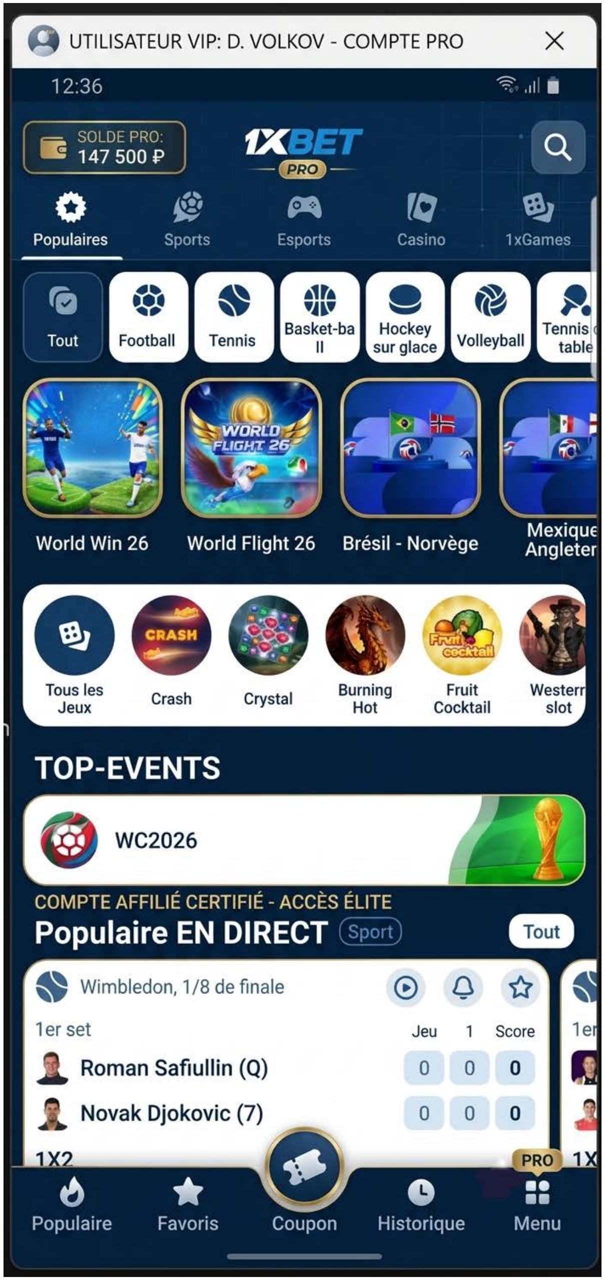


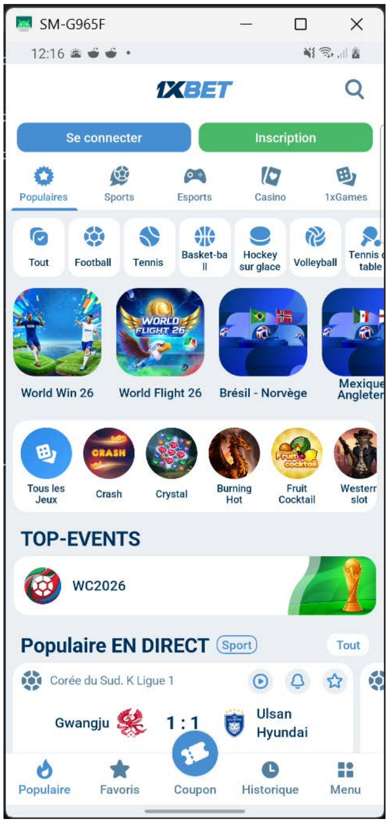
Fig. 22. Bases intermédiaires

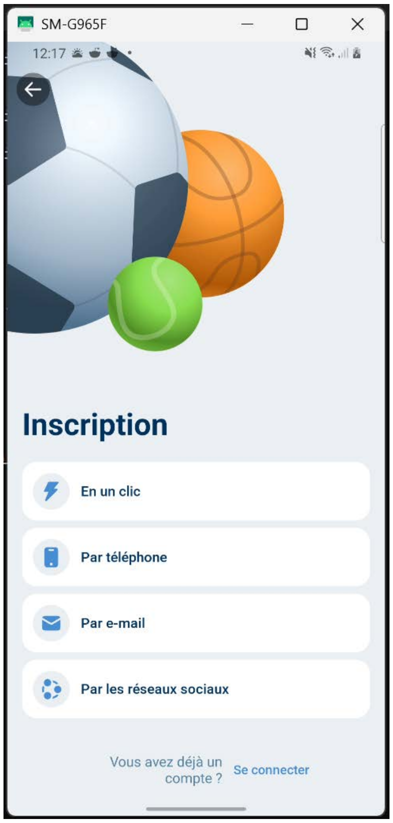
ÉTAPES D'INSCRIPTION
pour voir comment creer un compte

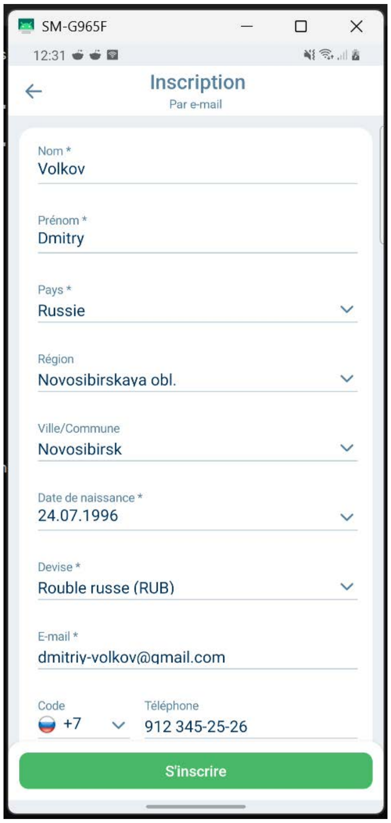
1XBET
LIVE
MATCHS EN DIRECT
STREAMING LIVE
STREAMING EN DIRECT SUR MOBILE
Profitez du bonus!


CODE PROMO
1SYSCASHBACK


UTILISATEUR VIP: D. VOLKOV - COMPTE PRO
12:36
SOLDE PRO:
147 500 ₽
1XBET
PRO
Populaires
Sports
Esports
Casino
1xGames
Tout
Football
Tennis
Basket-ball
Hockey sur glace
Volleyball
Tennis de table
World Win 26
World Flight 26
Brésil - Norvège
Mexique Angleterre
Tous les Jeux
Crash
Crystal
Burning Hot
Fruit Cocktail
Western slot
TOP-EVENTS
WC2026
COMPTE AFFILIÉ CERTIFIÉ - ACCÈS ÉLITE
Populaire EN DIRECT
Sport
Tout
Wimbledon, 1/8 de finale
1er set
Jeu
1
Score
Roman Safiullin (Q)
0
0
0
Novak Djokovic (7)
0
0
0
1X2
PRO
Populaire
Favoris
Coupon
Historique
Menu


SM-G965F
12:16
1XBET
Se connecter
Inscription
Populaires
Sports
Esports
Casino
1xGames
Tout
Football
Tennis
Basket-ball
Hockey sur glace
Volleyball
Tennis de table
World Win 26
World Flight 26
Brésil - Norvège
Mexique Angleterre
Tous les Jeux
Crash
Crystal
Burning Hot
Fruit Cocktail
Western slot
TOP-EVENTS
WC2026
Populaire EN DIRECT
Sport
Tout
Corée du Sud. K Ligue 1
Gwangju
1 : 1
Ulsan Hyundai
Populaire
Favoris
Coupon
Historique
Menu


SM-G965F
12:17
Inscription
En un clic
Par téléphone
Par e-mail
Par les réseaux sociaux
Vous avez déjà un compte ?
Se connecter


SM-G965F
12:31
Inscription
Par e-mail
S'inscrire

Nom * Volkov

Prénom * Dmitry

Pays * Russie

Région Novosibirskaya obl.

Ville/Commune Novosibirsk

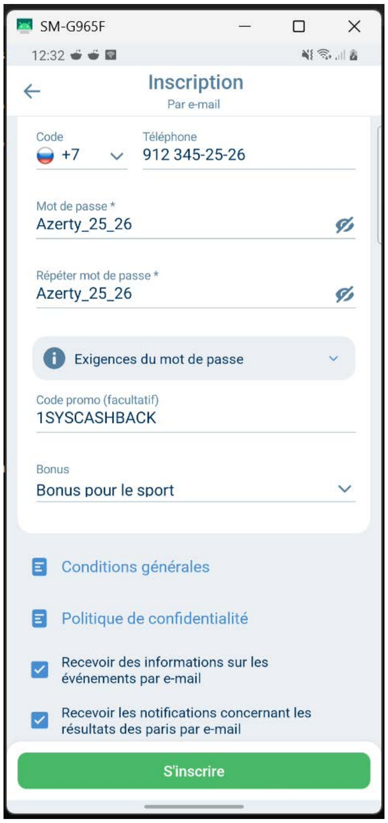
Date de naissance * 24.07.1996

Devise * Rouble russe (RUB)

E-mail * dmitriy-volkov@gmail.com

Code +7

Téléphone 912 345-25-26


SM-G965F
12:32
Inscription
Par e-mail
Exigences du mot de passe
Conditions générales
Politique de confidentialité
S'inscrire

Code +7

Téléphone 912 345-25-26

Mot de passe * Azerty_25_26

Répéter mot de passe * Azerty_25_26

Code promo (facultatif) 1SYSCASHBACK

Bonus Bonus pour le sport

☑ Recevoir des informations sur les événements par e-mail

☑ Recevoir les notifications concernant les résultats des paris par e-mail

5. SCHÉMA CINÉMATIQUE DES MÉCANISMES

Un schéma cinématique de mécanisme est un schéma qui doit, non seulement, permettre la compréhension des différents mouvements du mécanisme, mais aussi comporter le paramétrage des différents solides qui le constituent, en vue des calculs de cinématique, d'efforts, de cinétique..., que l'on peut avoir à faire sur ce mécanisme.
Pour établir ce schéma, à partir du dessin de définition du mécanisme, il faut :

5.1. MODÉLISER LES LIAISONS DU MÉCANISME

Chaque liaison doit être modélisée globalement, de façon à ne faire apparaître sur le schéma cinématique que les liaisons qui sont strictement nécessaires à la compréhension du fonctionnement du mécanisme et à son paramétrage.

EXEMPLE 1

Plusieurs pièces ayant entre elles des liaisons encastrement peuvent être modélisées par une seule pièce.

Définitions

Deux pièces n'ayant aucun mouvement relatif sont dites cinématiquement équivalentes.
Par suite, un ensemble de pièces cinématiquement équivalentes constitue une classe d'équivalence cinématique.

Notations

Si on note, par exemple, la classe d'équivalence cinématique par le numéro 3 on peut repérer les pièces appartenant à cette classe d'équivalence par les numéros 30, 31, 32, ..., 39.

EXEMPLE 2

Si le montage de l'arbre dans un palier, sur deux roulements, de l'exemple 2 du paragraphe 2.12 est considéré comme faisant partie d'un mécanisme, il sera modélisé par une liaison pivot.

Par contre, si l'on veut étudier en détail le montage de cet arbre dans son palier, il faudra établir un schéma cinématique mettant en évidence les modèles de liaison relatifs au montage de chaque roulement.

5.2. POSITIONNER LES LIAISONS NORMALISÉES ET LES SOLIDES SCHÉMATISÉS

On place sur le schéma cinématique les différentes liaisons symbolisées, suivant la norme, dans la position relative qu'elles ont sur le dessin de définition, et on les relie par les solides schématisés

5.3. PARAMÉTRER LA POSITION DES SOLIDES SCHÉMATISÉS

Pour cela, commencer par lier aux solides de repères (orthonormés directs) en tenant compte de liaisons que ces solides ont entre eux, de façon simplifier le paramétrage. Ensuite, définir de paramètres de position entre ces différents repère

REMARQUE

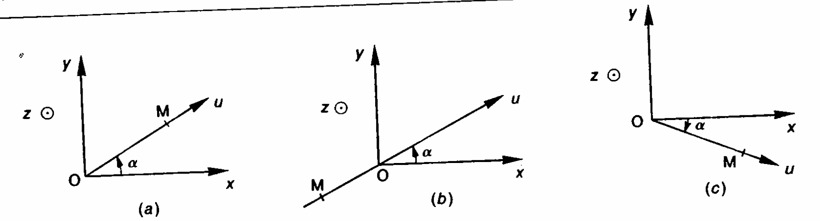
Faire des schémas de telle façon que l projections des vecteurs sur les axes soie positives, et que les angles entre les vecteu soient compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, (le cas échéa modifier la position relative des pièces), dans but de pouvoir s'aider par la suite des schém pour calculer les projections de vecteurs et produits vectoriels.

EXEMPLE

Soit :

$\left\{ \begin{array}{l} R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) : \text{un repère orthonormé direct.} \\ \vec{u} : \text{un vecteur unitaire perpendiculaire à} \\ \quad \text{Posons : } \alpha = (\vec{x}, \vec{u}). \\ M : \text{un point tel que : } \overrightarrow{OM} = r\vec{u},\ r \text{ algébrique.} \end{array} \right.$

Sur la *figure 25a*, α et r sont positifs.
— La projection orthogonale de $\overrightarrow{OM}$ sur $\vec{x}$ est é à : $r \cos \alpha$.



(*a*) (*b*) (*c*)

Fig. 25

C'est plus évident sur la *figure 25a* que sur la *figure 25b* dans laquelle $r<0$.
— Le produit vectoriel $\vec{x} \wedge \vec{u}$ est égal à : $\sin \alpha \vec{z}$.
C'est plus évident sur la *figure 25a* que sur la *figure 25c* dans laquelle $\alpha<0$.

EXEMPLE

Soit le réducteur dont le dessin d'ensemble est donné *figure 26.* L'engrenage est cylindrique droit à profil en développante de cercle, d'angle de pression $\alpha=20°$.

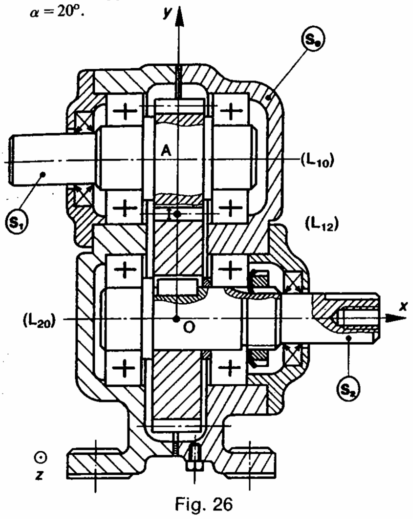


Fig. 26

Pour établir le schéma cinématique de ce réducteur, considérons qu'il est constitué de trois classes d'équivalence cinématique représentées par (S_1), (S_2) et (S_0).
Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct lié à (S_0), placé comme l'indique le dessin.
Modélisons les liaisons entre ces solides de la façon suivante :

- L_{10} : liaison pivot d'axe $(A, \vec{x})$.
- L_{20} : liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$.
- L_{12} : liaison linéique rectiligne d'axe $(I, \vec{x})$ et de normale orientée suivant la droite de pression de l'engrenage.

Dans ces conditions nous pouvons réaliser le schéma cinématique du mécanisme *(figure 27).*
La schématisation d'une liaison linéique rectiligne entre les roues d'un engrenage est celle indiquée par le schéma.
Effectuons maintenant le paramétrage du schéma.
Soit $R_1(A, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ *un repère lié à* (S_1) *posons :* $\theta_1=(-\vec{y}, \vec{y}_1)$.
Soit $R_2(O, \vec{x}, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ *un repère lié à* (S_2) *posons :* $\theta_2=(\vec{y}, \vec{y}_2)$.
Le schéma cinématique ainsi réalisé est complet, il est prêt à être utilisé pour des calculs de mécanique.

REMARQUE

> *Il arrive parfois que l'on prenne quelque liberté avec la normalisation des liaisons pour simplifier, ou pour rendre plus explicites, les schémas cinématiques.*

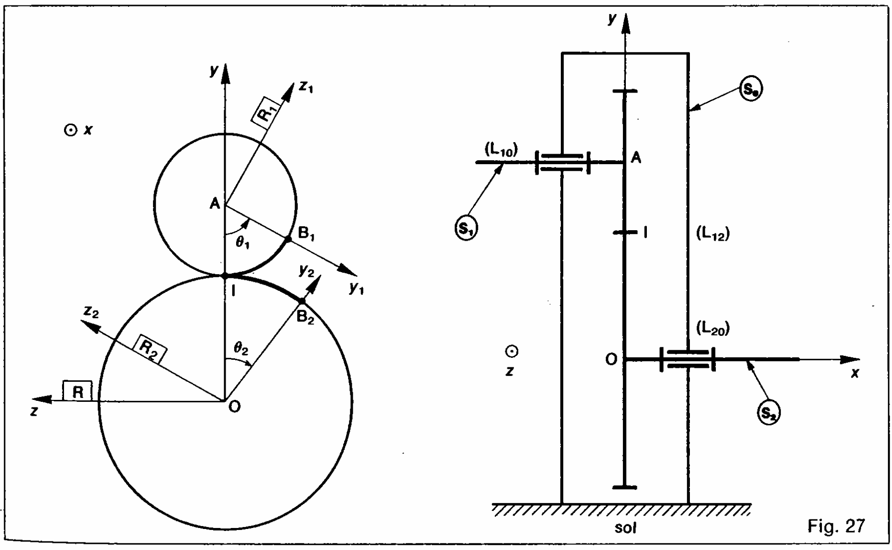


Fig. 27

6. LOI « ENTRÉE-SORTIE » D'UN MÉCANISME

Un sens de parcours de la chaîne cinématique étant fixé dans un mécanisme, on appelle loi « **entrée-sortie** » de ce mécanisme, la relation qui existe entre les paramètres de position de la pièce d'entrée et les paramètres de position de la pièce de sortie de ce mécanisme.

Application

Reprenons l'exemple du réducteur précédent.
Notons r_1 et r_2 les rayons primitifs des deux roues de l'engrenage ***(figure 28).***

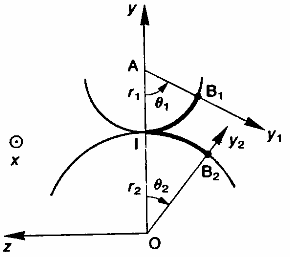


Fig. 28

Les cercles primitifs de l'engrenage roulent sans glisser l'un sur l'autre, par conséquent les points B_1 et B_2 coïncideront avec I, à une certaine date, si les arc orientés $\overset{\frown}{IB}_1$ et $\overset{\frown}{IB}_2$ sont égaux.

Or $\overset{\frown}{IB}_1 = r_1\theta_1$

et $\overset{\frown}{IB}_2 = -r_2\theta_2$ ($\theta_2 < 0$ sur la figure).

Par suite, la loi « entrée-sortie » du mécanisme est :

$$\boxed{r_1\theta_1 = -r_2\theta_2.}$$

A SAVOIR

1. Les mouvements relatifs dans les liaison élémentaires : ponctuelle, linéique rectiligne, linéi que annulaire, rotule, appui plan, pivot glissant glissière hélicoïdale, glissière, pivot.

2. Les coordonnées cartésiennes (x, y, z), le coordonnées cylindriques (r, θ, z), les coordor nées sphériques (r, θ, φ) ainsi que les relation entre ces différents systèmes de coordonnées

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi. \end{cases}$$

3. Les angles d'Euler (ψ, θ, φ) ainsi que définition et la construction des bas intermédiaires.

PROBLÈME RÉSOLU

Le dessin d'un mélangeur est donné *figure 29.*

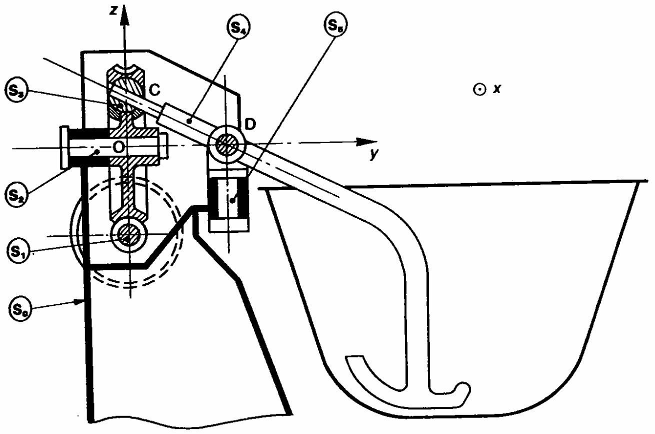


Fig. 2

Le moteur entraîne l'arbre (S_1) qui communique son mouvement au bras mélangeur (S_4) par l'intermédiaire d'un système roue et vis sans fin. La vis est à un filet à droite et la roue à *n* dents. (S_4) prend appui sur (S_2) par l'intermédiaire de (S_3), et sur (S_0) par l'intermédiaire de (S_5).

QUESTION 1

Établir un schéma cinématique spatial paramétré de ce mécanisme.

RÉPONSE

En décrivant la chaîne cinématique du mécanisme modélisons les liaisons et définissons en même temps les bases intermédiaires *(figures 30 et 31)*.

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à (S_0) tel que $(O, \vec{y})$ soit suivant l'axe de roue (S_2) et $\vec{x}$ de même direction que l'axe de la vis (S_1). L'origine O est placée dans le plan de section droite de (S_2) contenant le centre C de la rotule (S_3).

Les liaisons sont les suivantes :

— Entre (S_0) et (S_1) : liaison pivot d'axe $(B, \vec{x})$. Soit $R_1(B, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à (S_1). On pose $\alpha = (\vec{z}, \vec{z}_1)$.

— Entre (S_1) et (S_2) : (S_1) et (S_2) constituent un engrenage.

— Entre (S_2) et (S_3) : liaison rotule de centre C. Soit $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}, \vec{z}_2)$ un repère lié à (S_2) tel que le point C soit sur l'axe $(O, \vec{z}_2)$. On pose : $\beta = (\vec{z}, \vec{z}_2)$.

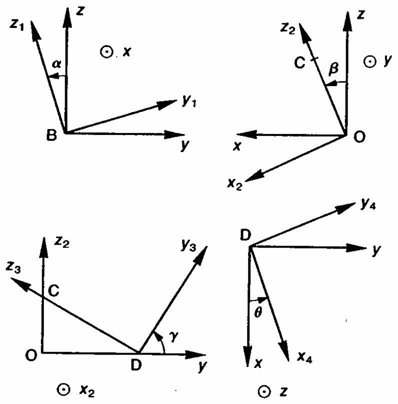


Fig. 31

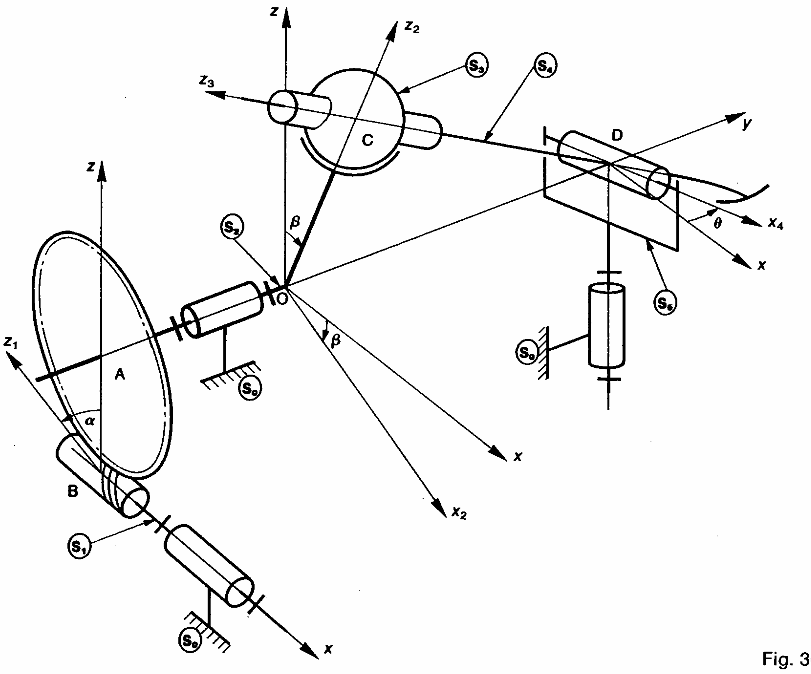


Fig. 30.

— Entre (S_3) et (S_4) : liaison pivot glissant d'axe CD.
D est un point fixe sur l'axe $(O, \vec{y})$.
Soit $R_3(D, \vec{x}_2, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ le repère tel que $\vec{z}_3$ soit dirigé suivant $\overrightarrow{DC}$. On pose : $\gamma = (\vec{y}, \vec{y}_3)$. γ est un angle constant.
— Entre (S_0) et (S_5) : liaison pivot d'axe $(D, \vec{z})$.
Soit $R_4(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z})$ un repère lié à (S_5). On pose : $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_4)$.
— Entre (S_4) et (S_5) : liaison pivot d'axe $(D, \vec{x}_4)$.

REMARQUES

— On passe de la base du repère R à la base du repère R_2 par une rotation autour de $\vec{y}$, vecteur unitaire de R, et de la base du repère R_2 à la base du repère R_3 par une rotation autour de $\vec{x}_2$, vecteur unitaire de R_2. Ces bases se déduisent donc bien les unes des autres par rotation autour d'un vecteur unitaire de la précédente.
— Les bases intermédiaires sont entièrement définies par les figures planes de la *figure 31*. Il est donc préférable de ne pas porter tous les vecteurs unitaires sur le schéma cinématique de la *figure 30* sinon celui-ci deviendrait vite inextricable.

QUESTION 2

Déterminer la loi « entrée-sortie » du mélangeur.

RÉPONSE

La pièce d'entrée du mécanisme est (S_1), paramétrée par α, et la pièce de sortie est (S_5), paramétrée par θ. Il s'agit de trouver la relation entre ces deux paramètres. Pour cela, remarquons que le paramétrage de la position de (S_4) par rapport à R s'établit à partir des paramétrages de (S_2) et (S_3) et que le paramétrage de (S_5) se fait directement par rapport à R.
Les positions de ces différents solides sont parfaitement déterminées, mais la continuité de la chaîne cinématique entre (S_4) et (S_5) n'a pas encore été exprimée. C'est en écrivant, qu'à chaque instant, l'axe CD du bras du mélangeur (S_4) et l'axe $(D, \vec{x}_4)$ de la liaison pivot entre (S_4) et (S_5) sont perpendiculaires qu'on obtient la loi « entrée-sortie » du mécanisme.

Soit $$\vec{z}_3 \cdot \vec{x}_4 = 0.$$

Pour effectuer ce produit scalaire cherchons les composantes de $\vec{z}_3$ et de $\vec{x}_4$ dans la base de R.

$$\begin{aligned}\vec{z}_3 &= -\sin\gamma\,\vec{y} + \cos\gamma\,\vec{z}_2\\ &= -\sin\gamma\,\vec{y} + \cos\gamma\,(\sin\beta\,\vec{x} + \cos\beta\,\vec{z})\\ &= \cos\gamma\sin\beta\,\vec{x} - \sin\gamma\,\vec{y} + \cos\gamma\cos\beta\,\vec{z}\end{aligned}$$

et $$\vec{x}_4 = \cos\theta\,\vec{x} + \sin\theta\,\vec{y}.$$

La loi « entrée-sortie » s'écrit donc :

$$\cos\theta\cos\gamma\sin\beta - \sin\theta\sin\gamma = 0.$$

En regardant la construction du mécanisme on constate que γ est différent de $\frac{\pi}{2}$ et que θ n'atteint jamais la valeur $\pm\frac{\pi}{2}$. Par conséquent divisons les deux membres de l'équation précédente par $\cos\theta\cos\gamma$, d'où

$$\sin\beta = \operatorname{tg}\theta\,\operatorname{tg}\gamma.$$

Il ne reste plus qu'à exprimer β en fonction de α. La vis est à un filet *à droite* et la roue a n dents.

Alors : $$\beta = \frac{\alpha}{n}$$

si on suppose que $\beta = 0$ lorsque $\alpha = 0$.

Finalement la loi « entrée-sortie » s'écrit :

$$\boxed{\sin\frac{\alpha}{n} = \operatorname{tg}\theta\,\operatorname{tg}\gamma.}$$

REMARQUE

Si la vis est *à gauche* β diminue lorsque α augmente, donc $d\beta = -\frac{d\alpha}{n}$, et $\beta = -\frac{\alpha}{n}$.

CONSEILS POUR LA RÉSOLUTION

1. Tracer des schémas cinématiques de telle façon que les angles entre les vecteurs de base soient compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ afin d'utiliser les schémas dans les calculs.

2. Établir des paramétrages complets en définissant toutes les bases intermédiaires. Chaque base devant s'obtenir par rotation autour d'un vecteur unitaire de la base précédente.

3. La loi entrée-sortie d'un mécanisme s'obtient en trouvant une relation géométrique simple entre le ou les paramètres d'entrée et le ou les paramètres de sortie du mécanisme.
En général, un produit scalaire ou vectoriel entre deux vecteurs unitaires des bases intermédiaires mises en place lors du paramétrage conduit au résultat.

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 — La *figure 32* représente le guidage en rotation du plateau ② dans le bâti ① d'un montage d'usinage, par l'intermédiaire de l'arbre ③.

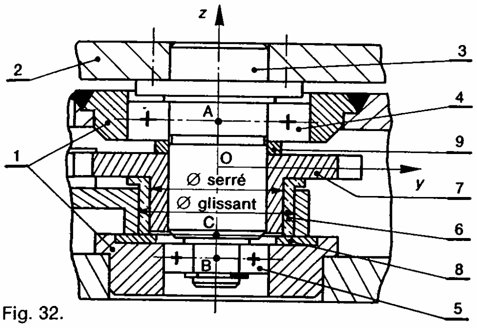


Fig. 32.

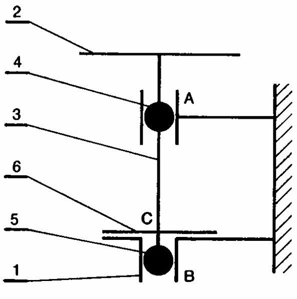


Fig. 33.

QUESTIONS

1° Modéliser la liaison entre le plateau ② et l'arbre ③.

2° Modéliser les liaisons entre l'arbre ③ et le bâti ①.

3° Concevoir le schéma cinématique du mécanisme.

REPONSES

1° Le plateau est centré et épaulé sur l'arbre. Des vis représentées par les traits d'axe permettent de réaliser à partir de cette liaison pivot une liaison encastrement.

2° Le guidage de l'arbre dans le bâti est réalisé à l'aide de trois liaisons élémentaires.

a) L'angle de rotulage du roulement à billes ④ est supérieur à la déformation angulaire de l'arbre ③. Cette liaison est donc modélisable par une liaison linéique annulaire de centre A et de direction $\vec{z}$.

b) En suivant le même raisonnement, la liaison entre l'arbre et le bâti réalisée par l'intermédiaire du roulement ⑤ est modélisable par une liaison linéique annulaire de centre B et de direction $\vec{z}$.

c) Le coussinet ⑥ lié à la roue à rochet ⑦ elle-même liée à l'arbre par l'intermédiaire de l'entretoise ⑨ et de la bague intérieure du roulement ④, est en liaison appui plan de normale $(C, \vec{z})$ avec la plaque d'appui ⑧ liée au bâti.

3° L'association de ces trois liaisons crée une liaison pivot unilatérale d'axe $(O, \vec{z})$ et dépend donc du sens des efforts.

2 — La *figure 34* représente un mécanisme utilisé dans les silos à céréales permettant d'actionner un trieur à grains.

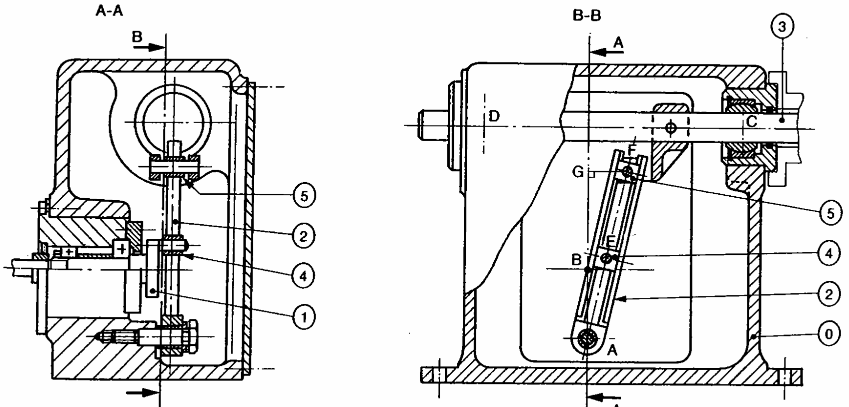


Fig. 34.

Un moteur électrique entraîne l'arbre ① d'un mouvement de rotation uniforme. Par l'intermédiaire de la bielle ②, le coulisseau ③ est animé d'un mouvement de translation alternatif.

QUESTIONS

1° Modéliser les liaisons.

2° Concevoir les schémas cinématiques spatial et plan du mécanisme.

3° Paramétrer le schéma cinématique plan en précisant les bases intermédiaires.

4° Établir la loi « entrée-sortie », on pose : AB = d, AG = h, et a le rayon de la manivelle BE.

RÉPONSES

1° *a*) Bâti ⓪ - arbre ① : pivot.

b) Bâti ⓪ - bielle ② : pivot.

c) Bielle ② - noix ④ : glissière.

d) Noix ④ - arbre ① : pivot glissant.

e) Bielle ② - noix ⑤ : glissière.

f) Noix ⑤ - arbre ③ : pivot glissant.

g) Arbre ③ - bâti ⓪ en C : linéique annulaire.

h) Arbre ③ - bâti ⓪ en D : linéique annulaire.

2° Les schémas cinématiques sont représentés *figure 35* et *36*.

Schéma spatial :

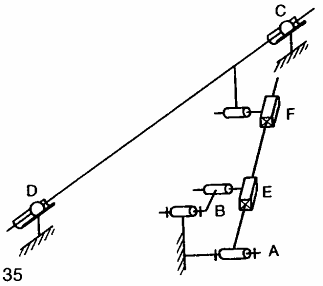


Fig. 35

Schéma plan :

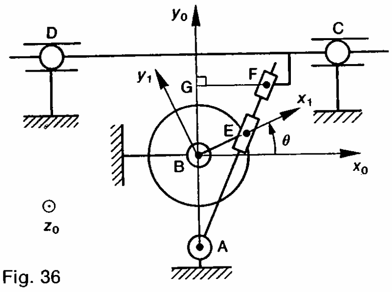


Fig. 36

3° Soit le repère $R_0(B, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti ⓪ et le repère $R_1(B, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ lié à l'arbre d'entrée ① tel que l'axe $(B, \vec{x}_1)$ soit dirigé suivant $\overrightarrow{BE}$. L'angle $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ définit la position de ① par rapport à ⓪. Le déplacement du coulisseau ③ par rapport au bâti est défini par $\overrightarrow{GF} = x\vec{x}_0$.

4° La loi « entrée-sortie » est :

$$\boxed{x = h\,\frac{a \cos \theta}{d + a \sin \theta}}$$

3 — Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à un bâti (S_0) *(Figure 37)*.

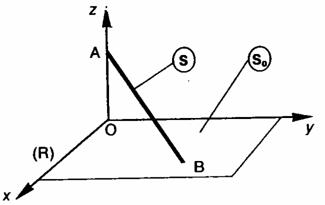


Fig. 37

Une tige (S) d'extrémités A et B a deux liaisons en A et B avec (S_0). La liaison en A est linéique annulaire d'axe $(A, \vec{z})$ et la liaison en B est ponctuelle en un point quelconque du plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$.

QUESTIONS

1° Déterminer le nombre de paramètres indépendants nécessaires au positionnement de (S) par rapport à (S_0).

2° Choisir ces paramètres et préciser les bases intermédiaires.

RÉPONSES

1° Il faut cinq paramètres indépendants pour positionner un solide linéaire rectiligne par rapport à un repère. Mais les liaisons que (S) a avec (S_0) réduisent ce nombre de paramètres.
Notons (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) les coordonnées cartésiennes des points A et B, respectivement, dans R.
La liaison linéique annulaire impose les conditions : $x_A = 0$ et $y_A = 0$.
La liaison ponctuelle impose la condition : $z_B = 0$. Par suite, le nombre de paramètres indépendants positionnant (S) par rapport à (S_0) est égal à 5 moins le nombre de relations indépendantes imposées par les liaisons c'est-à-dire $5 - 3 = 2$ paramètres indépendants.

2° Choisissons deux angles pour définir la position de (S) par rapport à (S_0).

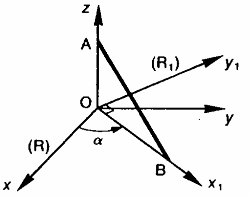


Fig. 38.

Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ le repère tel que l'axe $(O, \vec{x}_1)$ soit dirigé suivant OB.
Posons $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.

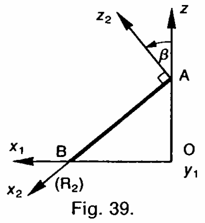


Fig. 39.

Soit $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$ le repère tel que l'axe $(A, \vec{x}_2)$ soit dirigé suivant AB.

Posons : $\beta = (\vec{z}, \vec{z}_2)$.
Les deux angles α et β définissent la position de (S) par rapport à (S_0). Les bases intermédiaires sont bien mises en place, en effet :

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \xrightarrow{\text{Rot}(\alpha, \vec{z})} (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$$

$$(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}) \xrightarrow{\text{Rot}(\beta, \vec{y}_1)} (\vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2).$$

4 — La *figure 40* représente le régulateur centrifuge du système DIRAVI CITROËN entraîné à partir de la boîte de vitesses par un flexible monté sur l'arbre ⑳. Ce système permet de « durcir » la direction en fonction de la vitesse du véhicule.

QUESTIONS

1° Modéliser les liaisons (excepté le limiteur de couple constitué des pièces ㉒, ㉓, ㉔, ㉕, ㉖ que l'on suppose liées à l'arbre ⑳).

2° Tracer le schéma cinématique correspondant. Repérer les ensembles de pièces cinématiquement liées par leur numéro de classe d'équivalence. (Exemple : {90, 91, 92} sera repéré par 9.)

3° Paramétrer la position d'une masselotte par rapport au bâti.

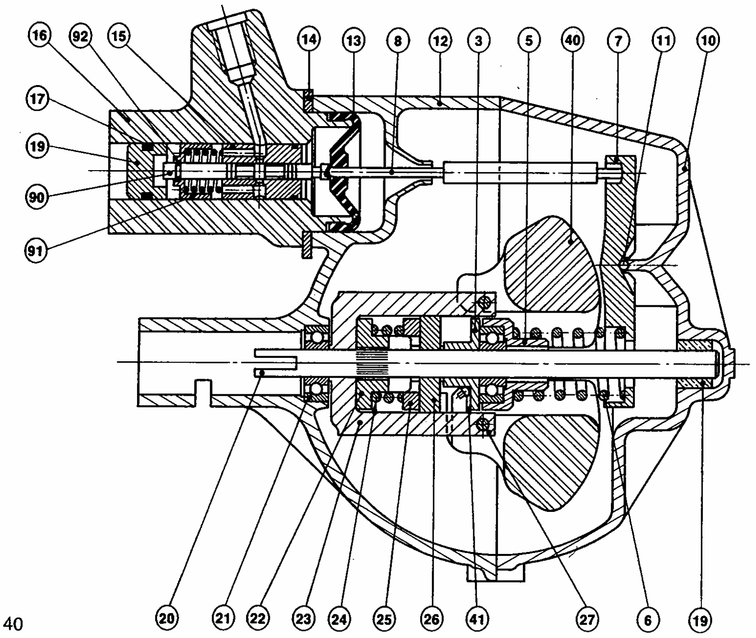


Fig. 40

RÉPONSES

1° *a*) Bâti ① - arbre ⑳ par l'intermédiaire du roulement ㉑ : rotule.

b) Bâti ① - arbre ⑳ par l'intermédiaire du coussinet ⑨ : pivot glissant.

c) Arbre ⑳ - fourreau ㉓ : encastrement.

d) Fourreau ㉓ - masselottes ㊵ : pivot.

e) Masselottes ㊵ - glace de butée ③ : ponctuelle.

f) Glace de butée ③ - butée à billes ⑤ : appui plan.

g) Butée à billes ⑤ - ressort ⑥ : appui plan.

h) Ressort ⑥ - levier ⑦ : appui plan.

i) Levier ⑦ - bâti ① : rotule.

j) Levier ⑦ - tige ⑧ : rotule.

k) Tige ⑧ - tiroir distributeur ⑨ - rotule.

l) Tiroir distributeur ⑨ - bâti ① : pivot glissant.

m) Glace de butée ③ - arbre ⑳ : pivot glissant.

2° Le schéma cinématique est représenté *figure 41*.

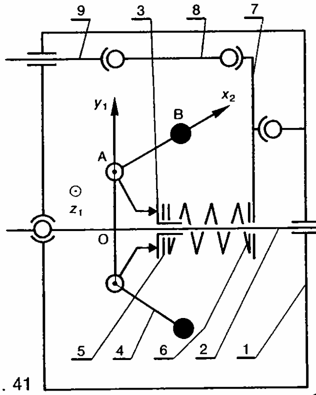


Fig. 41

3° Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti ①, l'axe $(O, \vec{x})$ étant placé suivant l'axe de l'arbre ②.

Soient $R_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à l'arbre ② et $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ un repère lié à la masselotte ④ tels que $(A, \vec{z}_1)$ soit placé suivant l'axe de la liaison pivot entre ④ et ②, et que l'axe $(A, \vec{x}_2)$ passe par le centre de gravité B de la masselotte ④.

On pose : $\begin{cases} \theta_1 = (\vec{y}, \vec{y}_1) \\ \theta_2 = (\vec{x}, \vec{x}_2) \end{cases}$

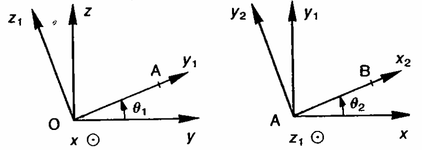


Fig. 42

5 — Le joint articulé dit de CARDAN permet de transmettre une puissance entre deux arbres concourants (angle de brisure $\alpha < 45°$). Son schéma cinématique est donné figure 43.

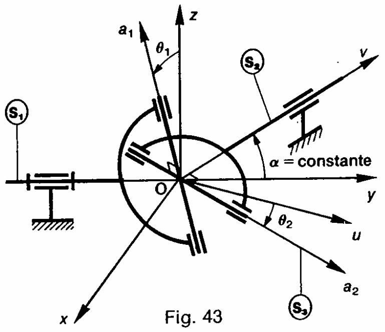


Fig. 43

L'arbre d'entrée (S_1) est relié à l'arbre de sortie (S_2) par un croisillon (S_3).

QUESTIONS

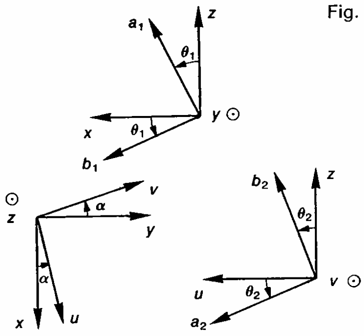
1° Paramétrer le mécanisme, en précisant les bases intermédiaires.

2° Déterminer la loi « entrée-sortie ».

RÉPONSES

1° La relation entre $\theta_2(t)$ et $\theta_1(t)$ est obtenue en exprimant que $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$.
Pour cela, utiliser les bases intermédiaires définies sur la figure 44.

Fig. 44



2° La loi entrée-sortie est :

$$\boxed{\operatorname{tg} \theta_2 = \cos \alpha \operatorname{tg} \theta_1.}$$

Si $\cos \theta_2 \neq 0$ et $\cos \theta_1 \neq 0$.

EXERCICES SANS RÉPONSE

6 — Les *figures 45* et *46* représentent un joint de OLDHAM permettant de transmettre une puissance entre deux arbres parallèles.

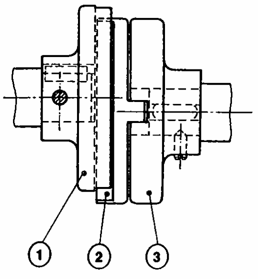


Fig. 45

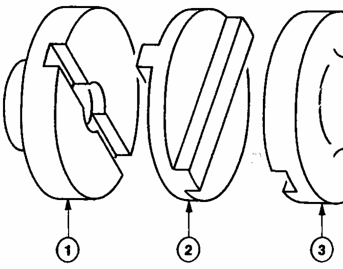


Fig. 46

QUESTIONS

1° Modéliser les liaisons.

2° Concevoir un schéma cinématique paramétré. Préciser les bases intermédiaires.

3° Montrer que ce joint articulé est homocinétique.

7 — Soient les trois liaisons, entre deux solides (S_1) et (S_2) :

a) Liaison linéique rectiligne entre un demi-cylindre de révolution (S_2) et la surface plane (S_1) *(fig. 47a).*

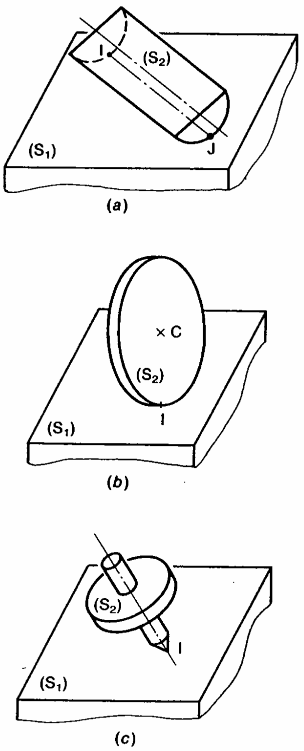
b) Liaison ponctuelle entre un disque de faible épaisseur (S_2) et la surface plane (S_1) *(fig. 47b).*

c) Liaison ponctuelle entre une toupie (S_2) et la surface plane (S_1) *(fig. 47c).*

QUESTIONS

1° Déterminer le nombre de paramètres indépendants nécessaires au positionnement d'un solide par rapport à l'autre.

2° Choisir ces paramètres et préciser les bases intermédiaires. (Si les paramètres choisis ne sont pas indépendants, donner les relations qui existent entre ces paramètres.)



(*a*)

(*b*)

(*c*)

Fig. 47

8 — La *figure 48* donne le dessin d'ensemble d'un petit moteur à vapeur pour modèle réduit.
Le déplacement du piston ⑪ dans le cylindre ② permet par l'intermédiaire d'un système bielle manivelle d'obtenir la rotation de l'arbre ⑧ par rapport au bâti ①.

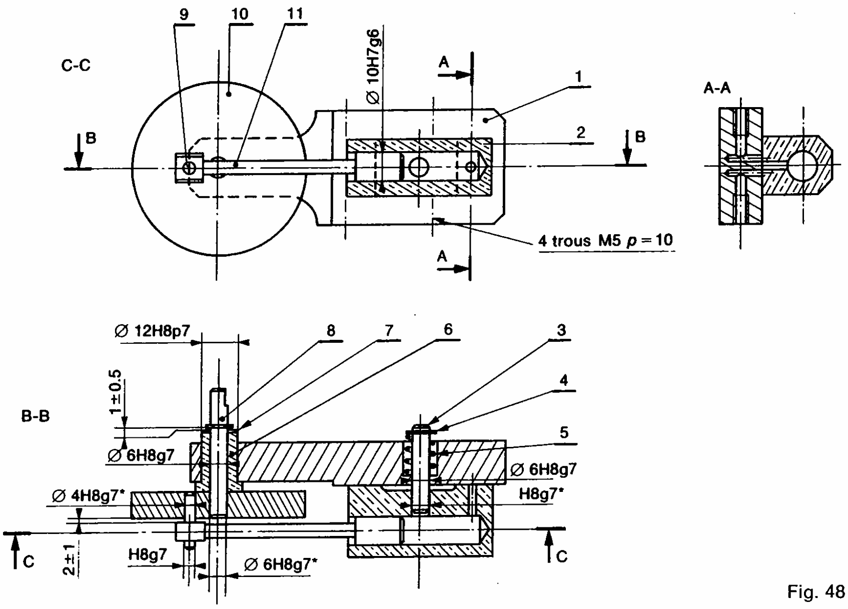
QUESTIONS

1° Modéliser les liaisons entre les différentes pièces.

2° Établir le schéma cinématique du mécanisme.

3° Définir les bases intermédiaires et choisir le paramétrage.

4° Établir la loi « entrée-sortie ».


C-C
9
10
11
Ø 10H7g6
A
1
A-A
B
2
B
4 trous M5 p = 10
A
B-B
Ø 12H8p7
8
7
6
3
4
5
1±0.5
Ø 6H8g7
Ø 4H8g7*
Ø 6H8g7
H8g7*
C
2±1
H8g7
Ø 6H8g7*
C

* Collage époxy.

Fig. 48

11	1	Piston	XC 42	Chromé
10	1	Volant	E 24	Chromé
9	1	Téton	XC 42	Chromé
8	1	Arbre	XC 42	Chromé
7	1	Rondelle M6	Polyamide	
6	1	Palier	UE 9 P	
5	1	Ressort (Ø fil = 0,8)		
4	2	Anneau Truarc « E »		
3	1	Pivot	XC 42	
2	1	Cylindre	UE 9 P	Polissage
1	1	Bâti	E 24	Nickelé noir
Rp	Nb	Désignation	Matière	Obs.

9 — Le dessin d'une machine d'essai de fatigue en flexion est donné *figure 49*.

Les éprouvettes sont fixées à l'une de leurs extrémités au support ⑳ et appuyées à l'autre sur le bâti par l'intermédiaire des axes ㊳ .

Un moteur électrique non représenté sur le dessin entraîne l'arbre ⑥ à l'aide d'une transmission par poulies courroie ②-①.

QUESTIONS

1° Modéliser les liaisons entre les différentes pièces.

2° Établir le schéma cinématique du mécanisme.

3° Définir les bases intermédiaires et choisir le paramétrage.

4° Établir la loi « entrée-sortie ».

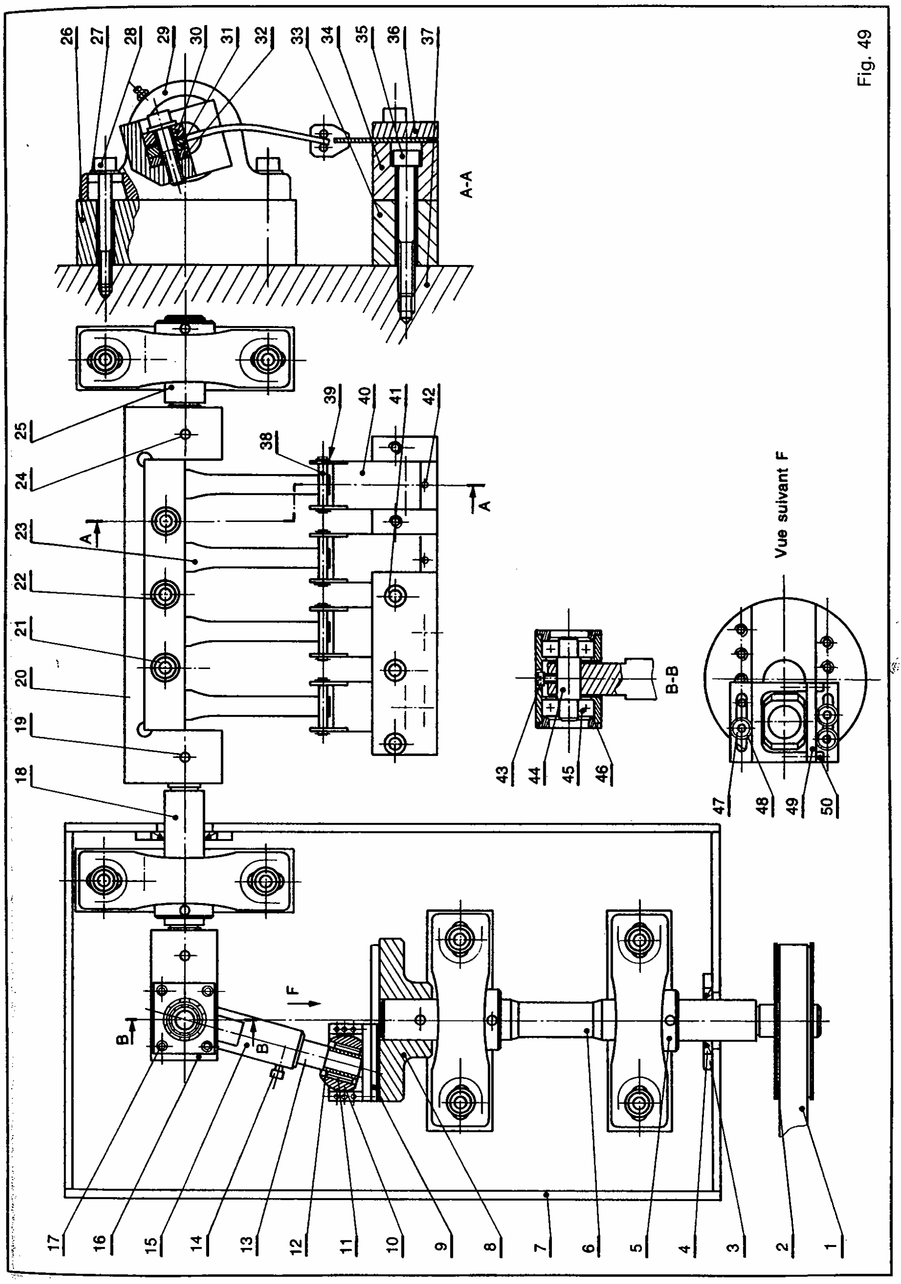

A-A
A
B-B
B
F
Vue suivant F

Fig. 49

Repère	Désign. abrégée	Nombre	n° de dess.	Nat. Ét. Matière	Traitement thermique	Observ.
50	Vis CHc M 4-10	4				
49	Plaque	1	2	A 50		
48	Rondelle Z 6 U	3				
47	Vis CHc M 6-15	3				
46	Chapeau	2	3			
45	Roult 6201	2				12-32-10
44	Axe	1	3			
43	Vis CHc M 5-8	1				
42	Butée	4				Stubs Ø4
41	Vis CHc M 8-20	5				
40	Lame	4	5			
39	Anneau élast. 5 × 0,6	16				
38	Axe	8	5			Stubs Ø5
37	Bâtit	1				
36	Plaque de serrage	1	5			
35	Vis CHc M 10-70	2				
34	Support des lames	1	5			
33	Socle	1	5			
32	Cale	1	4			
31	Pièce d'encastnt	1	4			
30	Plaque de serrage	1	4			
29	Palier	4				SY 25 FJ

Re-père	Désign. abrégée	Nombre	n° de dess.	Nat. État Matière	Traitement thermique	Brut Fini Poids	Observ.
28	Vis CHc M 8-65	8					
27	Rondelle M 8 N	8					
26	Cale	4	1				
25	Axe	1	3				
24	Goup. élast. ép. 5-40	1					
23	Éprou.	4					
22	Rondelle M 8 N	3					
21	Vis CHc M 8-35	3					
20	Berceau	1	4				
19	Goupille conique	3					R 6-65
18	Axe	1	3				
17	Vis CHc M 5-10	8					
16	Pièce d'entraint	1	3				
15	Chape	1	2				
14	Vis CHc M 5-10	1					
13	Axe	1	2				Stubs Ø 15
12	Bague int INA	1					IR 12 × 15 × 22,5
11	Douille HK 1516	1					INA
10	Noix	1	2	Z200C13	TH970 Rev 260		
9	Coulisseau	1	2	A 50			
8	Plateau	1	1				
7	Carter	1		pmma			
6	Axe	1	1				
5	Bague d'arrêt	4					
4	Joint	2					25-40-5
3	Support de joint	2		pmma			collé sur 7
2	Poulie crtée	1					30 L 075
1	Courroie crtée	1					420 L 075

10 — Un variateur GUSA est constitué de trois mécanismes d'entraînement similaires à la *figure 50.* L'arbre d'entrée ① entraîne en rotation la bielle ② au moyen d'un excentrique. Le mouvement est transmis à la pièce ③ guidée par l'ensemble ④, ⑤.

L'arbre de sortie ⑧ est entraîné par la pièce ⑦ au moyen d'une roue libre. La variation de vitesse est obtenue par translation du support ⑤.

QUESTIONS

1° Modéliser les liaisons entre les différentes pièces.

2° Établir un schéma cinématique spatial du mécanisme.

3° Définir les bases intermédiaires et choisir le paramétrage.

4° Établir la loi « entrée-sortie ».

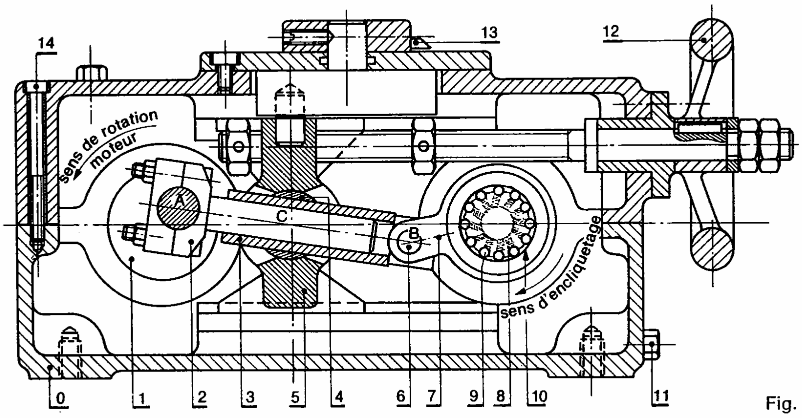


Fig. 50

2 Vecteurs position, vitesse et accélération d'un point d'un solide

Savoir calculer le vecteur vitesse d'un point d'un solide est utile, par exemple, pour établir la relation entre la vitesse d'entrée et la vitesse de sortie d'un mécanisme.
Savoir calculer le vecteur accélération d'un point d'un solide est indispensable pour appliquer le principe fondamental de la dynamique.
Avant de définir ces deux notions de vecteur vitesse et de vecteur accélération, nous introduirons la notion de vecteur position d'un point d'un solide, après avoir indiqué au préalable la façon de mesurer le temps.

1. MESURE DU TEMPS

La notion d'écoulement du temps, de manière régulière et irréversible, est donnée à l'observateur par des mouvements particuliers appelés **horloges.**

EXEMPLES

1. Mouvement d'un balancier de pendule.
2. Mouvement de certains astres.
3. Oscillations d'un quartz, entretenues électriquement (horloges à quartz).
4. Oscillations d'atomes de césium dans le vide (horloges atomiques).

On mesure le temps en représentant l'état de l'horloge sur un repère à une dimension, appelé **repère de temps,** orienté dans le sens de la succession des événements dans le temps.
Chaque point de ce repère est appelé **instant.**
L'abscisse de l'instant est appelé **date** (généralement désignée par la lettre t).
La **durée** entre deux instants (1) et (2), (1) précédent (2) dans l'ordre chronologique, de dates t_1 et t_2, est la différence $t_2 - t_1$ *(figure 1).*

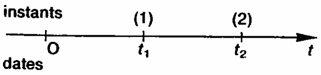


Fig. 1

L'unité de durée est la **seconde.**
La définition de la seconde adoptée par la 13ᵉ conférence générale des poids et mesures en 1967 est la suivante :

Définition

> **La seconde est l'unité de mesure du temps équivalant à la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.**

REMARQUE

> *Le césium a été découvert en 1861 par Bunsen et Kirschhoff, grâce à l'analyse spectrale. C'est un métal alcalin analogue au potassium, mou, jaune pâle, de densité* 1,9, *fondant à* 28 °C *et bouillant à* 670 °C.

2. VECTEUR POSITION D'UN POINT D'UN SOLIDE

Notons t la variable qui mesure le temps.
Soit (S) un solide en mouvement par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

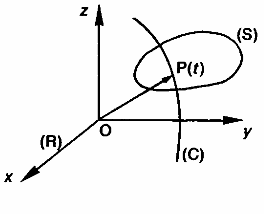


Fig. 2

Au cours de ce mouvement, un point P(t) quelconque du solide (S) décrit dans le repère R une courbe (C) appelée trajectoire du point P(t) dans le repère R.

Définition

Le vecteur position du point P(t) du solide (S), dans le repère R, à la date t, est le vecteur $\overrightarrow{OP}(t)$, où O est l'origine du repère R.

3. VECTEUR VITESSE D'UN POINT D'UN SOLIDE

3.1. DÉFINITION

Le vecteur vitesse du point P(t) du solide (S) par rapport au repère R, à la date t, est la dérivée par rapport à t, pour un observateur lié au repère R, du vecteur position $\overrightarrow{OP}(t)$.

$$\boxed{\vec{V}(P/R)=\left[\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{OP}(t)\right]_R.}$$

REMARQUE

La variation de $\overrightarrow{OP}(t)$, que la dérivée représente, est étudiée par rapport à un observateur lié au repère R.

3.2. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

En reprenant la définition de la dérivée d'un vecteur, $\vec{V}(P/R)$ s'écrit :

$$\vec{V}(P/R)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{OP}(t+\Delta t)-\overrightarrow{OP}(t)}{\Delta t}$$

(Δt représentant un petit accroissement de la variable t). Or

$$\overrightarrow{OP}(t+\Delta t)-\overrightarrow{OP}(t)=\overrightarrow{P(t)P}(t+\Delta t).$$

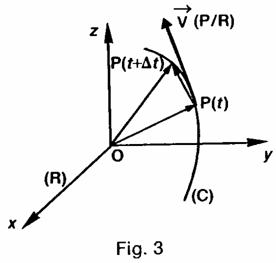


Fig. 3

Lorsque $\Delta t \longrightarrow 0$, la direction du vecte $\overrightarrow{P(t)P}(t+\Delta t)$ tend vers la direction de la tangen à la trajectoire (C), au point P(t). Le vecteur vites $\vec{V}$(P/R) a donc même direction que la tangente la trajectoire (C), au point P(t).

3.3. UNITÉ

La norme du vecteur vitesse est homogène à u longueur divisée par un temps. Si la longueur exprimée en mètres (m) et le temps en second (s) la norme du vecteur vitesse s'exprimera mètres par seconde (m/s).

4. VECTEUR ACCÉLÉRATION D'UN POINT D'UN SOLIDE

4.1. DÉFINITION

Le vecteur accélération du point P(t) du sol (S), par rapport au repère R, à la date t, est dérivée par rapport à t, pour un observateur au repère R, du vecteur vitesse $\vec{V}$(P/R).

$$\boxed{\vec{\Gamma}(P/R)=\left[\frac{d}{dt}\,\vec{V}(P/R)\right]_R.}$$

4.2. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

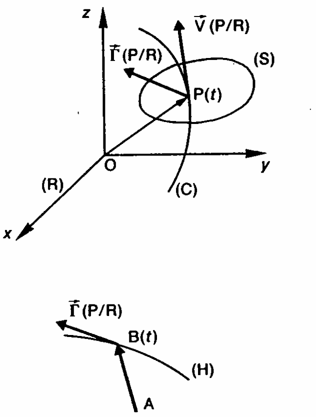


Fig. 4

Soit A un point quelconque du repère R.
Soit (H) la trajectoire du point B(t) défini par

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}(t)=\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P/R})$$

alors

$$\vec{\Gamma}(\mathrm{P/R})=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}(t)\right]_{\mathrm{R}}.$$

Par suite, et par analogie avec ce qui a été fait pour le vecteur vitesse, on en déduit que le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(\mathrm{P/R})$ est un vecteur de même direction que la tangente à la courbe (H), au point B(t).
La courbe (H) est appelée hodographe du vecteur vitesse $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P/R})$, relatif au point A.

4.3. UNITÉ

La norme du vecteur accélération est homogène à une longueur divisée par un temps au carré. Si la longueur est exprimée en mètres (m) et le temps en secondes (s) la norme du vecteur accélération s'exprimera en mètres par seconde carré (m/s²).

5. CALCUL DU VECTEUR VITESSE ET DU VECTEUR ACCÉLÉRATION D'UN POINT D'UN SOLIDE

Pour faire, par la suite, simplement ce calcul, mettons en place la relation qui existe entre la dérivée d'un vecteur $\vec{\mathrm{U}}(t)$ dans la base du repère R(O, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) et la dérivée de ce même vecteur dans la base du repère R$_1$(O$_1$, $\vec{x}_1$, $\vec{y}_1$, $\vec{z}_1$). Autrement dit, cherchons la relation qui existe entre

$$\left[\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{U}}(t)}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathrm{R}} \quad \text{et} \quad \left[\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{U}}(t)}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathrm{R}_1}.$$

Pour cela, exprimons $\vec{\mathrm{U}}(t)$ dans la base du repère R$_1$, posons

$$\vec{\mathrm{U}}(t)=a(t)\vec{x}_1+b(t)\vec{y}_1+c(t)\vec{z}_1.$$

Avant d'établir cette relation dans le cas général, commençons par traiter le cas particulier où $\vec{z}=\vec{z}_1$. Ce cas particulier concerne tous les mouvements plans, mouvements que l'on rencontre très souvent dans les mécanismes simples (engrenages, bielle-manivelle, etc.) et également les mouvements tels que le mouvement hélicoïdal.

5.1. CAS PARTICULIER $\vec{z}=\vec{z}_1$

Dans ce cas l'orientation de la base de R$_1$ par rapport à la base de R est définie par un seul paramètre :

$$\alpha(t)=(\vec{x}, \vec{x}_1).$$

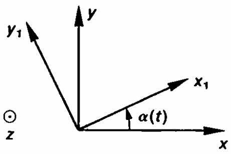


Fig. 5

Calculons $\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{U}}(t)\right]_{\mathrm{R}}$:

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{U}}(t)\right]_{\mathrm{R}}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a\vec{x}_1+b\vec{y}_1+c\vec{z}\,\right)\right]_{\mathrm{R}}$$

$$=a'\vec{x}_1+a\left[\frac{\mathrm{d}\vec{x}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathrm{R}}+b'\vec{y}_1+b\left[\frac{\mathrm{d}\vec{y}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathrm{R}}$$

$$+c'\vec{z}+c\left[\frac{\mathrm{d}\vec{z}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathrm{R}}$$

avec $\quad a'=\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t},\quad b'=\dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t},\quad c'=\dfrac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t},$

le vecteur $\left[\frac{\mathrm{d}\vec{z}}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathrm{R}}$ est nul car $\vec{z}$ est fixe dans la base de R.

Le vecteur $a'\vec{x}_1+b'\vec{y}_1+c'\vec{z}$ présente la dérivée du vecteur $\vec{\mathrm{U}}(t)$ dans la base de R$_1$.
Par suite :

$$\left[\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{U}}(t)}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathrm{R}}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathrm{U}}(t)\right]_{\mathrm{R}_1}+a\left[\frac{\mathrm{d}\vec{x}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathrm{R}}+b\left[\frac{\mathrm{d}\vec{y}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathrm{R}}. \quad (1)$$

Calculons maintenant $\left[\frac{\mathrm{d}\vec{x}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathrm{R}}$.

L'orientation de $\vec{x}_1$ dans R est fonction de l'angle $\alpha(t)$. Par conséquent, $\vec{x}_1$ peut être considéré comme une fonction de t par l'intermédiaire de l'angle $\alpha(t)$, soit $\vec{x}_1[\alpha(t)]$. Par suite, en appliquant le résultat sur la dérivée d'une fonction de fonction, on peut écrire que :

$$\left[\frac{\mathrm{d}\vec{x}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathrm{R}}=\left[\frac{\mathrm{d}\vec{x}_1}{\mathrm{d}\alpha}\right]_{\mathrm{R}}\alpha'$$

avec $\quad \alpha'=\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}.$

Pour calculer $\left[\frac{\mathrm{d}\vec{x}_1}{\mathrm{d}\alpha}\right]_{\mathrm{R}}$ exprimons $\vec{x}_1$ sur la base du repère R :

$$\left[\frac{\mathrm{d}\vec{x}_1}{\mathrm{d}\alpha}\right]_{\mathrm{R}}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\cos\alpha\,\vec{x}+\sin\alpha\,\vec{y}\,\right)\right]_{\mathrm{R}}$$

$$=-\sin\alpha\,\vec{x}+\cos\alpha\,\vec{y}$$

$$=\vec{y}_1$$

$$=\vec{z}\wedge\vec{x}_1.$$

donc $\quad \boxed{\left[\frac{\mathrm{d}\vec{x}_1}{\mathrm{d}\alpha}\right]_{\mathrm{R}}=\vec{z}\wedge\vec{x}_1.} \quad (2)$

Ce résultat s'interprète en disant que la dérivée du vecteur $\vec{x}_1$ par rapport à son angle polaire α est le vecteur directement perpendiculaire à $\vec{x}_1$, c'est-à-dire déduit de $\vec{x}_1$ par rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

De la même façon :

$$\boxed{\left[\frac{d\vec{y}_1}{d\alpha}\right]_R = \vec{z} \wedge \vec{y}_1.}$$

Si bien que $\left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_R$, exprimé dans la relation (1), se met sous la forme :

$$\left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_{R_1} + a\alpha'(\vec{z} \wedge \vec{x}_1) + b\alpha'(\vec{z} \wedge \vec{y}_1)$$

ou encore, en remarquant que $\vec{z} \wedge \vec{z}_1 = \vec{0}$,

$$\left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_{R_1} + \alpha'\vec{z} \wedge (a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1 + c\vec{z}_1),$$

ce qui fait apparaître $\vec{U}(t)$.

Posons $\boxed{\vec{\Omega}(R_1/R) = \alpha'\vec{z}}$

alors :

$$\boxed{\left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{U}(t) \qquad (3)}$$

Le vecteur $\vec{\Omega}(R_1/R)$ est un **vecteur libre** qui mesure la vitesse angulaire α' de changement d'orientation de la base de R_1 par rapport à la base de R, autour de $\vec{z}$ dans ce cas particulier.
Ce vecteur a pour direction $\vec{z}$ et sa mesure algébrique sur $\vec{z}$ est égale à la vitesse angulaire α' *(figure 6)*.

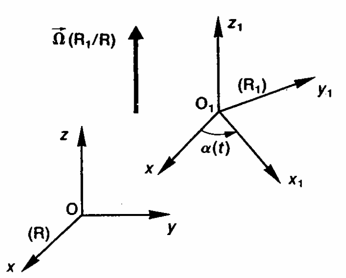


Fig. 6

Définition

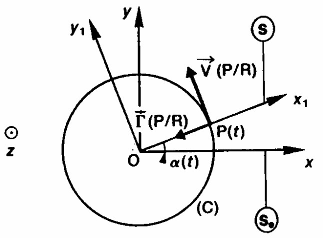
$\vec{\Omega}(R_1/R)$ est appelé vecteur rotation de la base de R_1 par rapport à la base de R.

Unité

La norme du vecteur rotation s'exprime en radians par seconde (rad/s).

Application

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à un bâti (S_0). Considé
un solide (S) ayant avec (S_0) une liaison pivot d'axe (O
(figure 7).



Fi

Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à (S), posons

$$\alpha(t) = (\vec{x}, \vec{x}_1).$$

Supposons $\alpha(t)$ de la forme :

$$\alpha(t) = \omega t$$

(ω est une constante positive exprimée en radians seconde).
Soit $P(t)$ un point du solide (S) tel que :

$$\overrightarrow{OP}(t) = a\vec{x}_1$$

(a est une constante positive exprimée en mètres).

QUESTION 1

Déterminer le vecteur vitesse du point P par rappo repère R : $\vec{V}(P/R)$.

RÉPONSE

Nous savons par définition que :

$$\vec{V}(P/R) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}(t)\right]_R$$

sachant que $\overrightarrow{OP}(t) = a\vec{x}_1$ (a = constante positive)

$$\vec{V}(P/R) = a\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right]_R.$$

Pour calculer $\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right]_R$ appliquons la relation (3 choisissant la base de R_1 comme nouvelle bas dérivation :

$$\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{x}_1$$

$\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right]_{R_1} = \vec{0}$ car $\vec{x}_1$ est constant dans R_1.

$$\vec{\Omega}(R_1/R) = \alpha'\vec{z} = \omega\vec{z}.$$

Par suite :

$$\vec{V}(P/R) = a\omega(\vec{z} \wedge \vec{x}_1)$$

$$\boxed{\vec{V}(P/R) = a\omega\vec{y}_1}$$

$a\omega$ s'exprime en mètres par seconde.
$\vec{V}(P/R)$ est un vecteur parallèle à la direction tangente en P au cercle de centre O, de rayon a *(figu*

QUESTION 2

Déterminer l'hodographe du vecteur vitesse $\vec{V}(P/R)$ relatif à un point A quelconque du repère R.

RÉPONSE

Remarquons que $\|\vec{V}(P/R)\| = a\omega =$ constante. Par conséquent, l'hodographe relatif au point A quelconque de R est un cercle de centre A et de rayon $a\omega$ *(figure 8).*

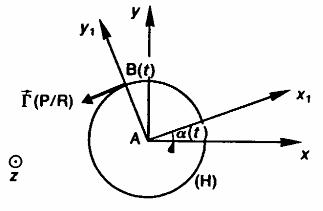


Fig. 8

QUESTION 3

Déterminer le vecteur accélération du point P par rapport au repère R : $\vec{\Gamma}(P/R)$.

RÉPONSE

Nous savons par définition que :

$$\vec{\Gamma}(P/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}(P/R)\right]_R$$

sachant que : $\vec{V}(P/R) = a\omega\vec{y}_1$

$$\vec{\Gamma}(P/R) = a\omega\left[\frac{d}{dt}\vec{y}_1\right]_R.$$

Pour calculer $\left[\frac{d}{dt}\vec{y}_1\right]_R$ appliquons la relation (3) en choisissant la base de R_1 comme nouvelle base de dérivation :

$$\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\vec{y}_1$$

$\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_{R_1} = \vec{0}$ car $\vec{y}_1$ est constant dans R_1. Par suite :

$$\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_R = \omega\vec{z}\wedge\vec{y}_1$$

$$\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_R = -\omega\vec{x}_1.$$

Par conséquent, le vecteur accélération du point P par rapport au repère R est :

$$\boxed{\vec{\Gamma}(P/R) = -a\omega^2\vec{x}_1}$$

$a\omega^2$ s'exprime en mètres par seconde carré (m/s^2).
$\vec{\Gamma}(P/R)$ est un vecteur de même direction que le rayon vecteur $\vec{OP}$, mais de sens contraire *(figure 7).*

REMARQUES

> — *On constate que le calcul de la dérivée de $\vec{x}_1$ ou de $\vec{y}_1$ dans R s'est transformé en calcul de produit vectoriel. Pour qu'il en soit toujours ainsi, il faut choisir la nouvelle base de dérivation telle que le vecteur unitaire à dériver y soit constant.*
>
> — *L'avantage d'un paramétrage convenable du mécanisme et de l'utilisation de cette formule de changement de base de dérivation est d'obtenir des résultats simples et facilement interprétables géométriquement.*

*5.2. CAS GÉNÉRAL

Dans ce cas, l'orientation de la base de R_1 par rapport à la base de R est définie par trois paramètres. Supposons que ces trois paramètres soient les trois angles d'Euler *(chapitre 1, paragraphe 4.2.2),* ce qui n'enlève rien à la généralité de l'étude. Le calcul de $\left[\frac{d}{dt}\vec{U}(t)\right]_R$ commence comme précédemment, voir relation (1) *paragraphe 5.1.,* pour arriver à :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{U}(t)\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\vec{U}(t)\right]_{R_1} + a\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right]_R + b\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_R + c\left[\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right]_R \quad (4).$$

Calculons $\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right]_R$, on obtiendra $\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_R$ et $\left[\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right]_R$ de la même façon, nous effectuerons seulement le moment venu, une permutation des vecteurs de la base de R_1.
En considérant que $\vec{x}_1$ est fonction de t par l'intermédiaire des trois angles ψ, θ, φ, on peut écrire (dérivée totale d'une fonction vectorielle de trois variables) :

$$\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right]_R = \left[\frac{\partial\vec{x}_1}{\partial\psi}\right]_R\psi' + \left[\frac{\partial\vec{x}_1}{\partial\theta}\right]_R\theta' + \left[\frac{\partial\vec{x}_1}{\partial\varphi}\right]_R\varphi' \quad (5)$$

avec $\psi' = \frac{d\psi}{dt}$, $\quad\theta' = \frac{d\theta}{dt}$, $\quad\varphi' = \frac{d\varphi}{dt}$.

Calculons $\left[\frac{\partial\vec{x}_1}{\partial\psi}\right]_R$ *(figures 9 et 10).*

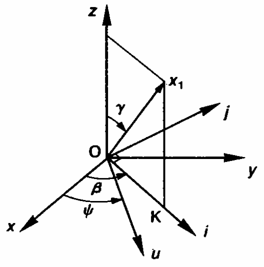


Fig. 9

Soit :

$\overrightarrow{OK}$ la projection de $(O, \vec{x}_1)$ sur le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$.

$$\begin{cases} \vec{i} \text{ un vecteur unitaire de direction OK.} \\ \vec{j} = \vec{z} \wedge \vec{i}. \\ \beta = (\vec{x}, \vec{i}). \\ \gamma = (\vec{z}, \vec{x}_1) \text{ angle orienté par } \vec{j}. \end{cases}$$

$\vec{x}_1$ peut s'exprimer par $\vec{x}_1 = \sin\gamma\,\vec{i} + \cos\gamma\,\vec{z}$ et donc :

$$\left[\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \psi}\right]_R = \left[\frac{\partial}{\partial \psi}(\sin\gamma\,\vec{i} + \cos\gamma\,\vec{z})\right]_R.$$

Remarquons que γ est indépendant de ψ ainsi que $\vec{z}$. Par conséquent :

$$\left[\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \psi}\right]_R = \sin\gamma \left[\frac{\partial \vec{i}}{\partial \psi}\right]_R.$$

D'autre part, lorsqu'on calcule une dérivée partielle de fonction par rapport à une variable on suppose les autres variables constantes. Donc pour le calcul de la dérivée partielle de $\vec{x}_1$ par rapport à l'angle ψ on supposera les deux autres angles d'Euler θ et φ constants.

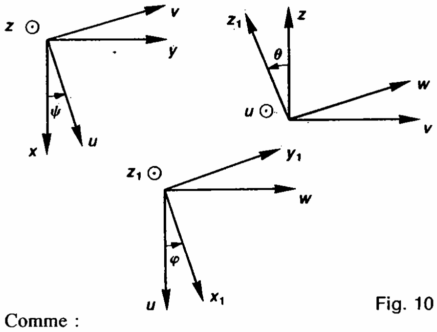


Fig. 10

Comme :

$$\vec{x}_1 = \cos\varphi\,\vec{u} + \sin\varphi\,\vec{w}$$
$$\vec{x}_1 = \cos\varphi\,\vec{u} + \sin\varphi\,(\cos\theta\,\vec{v} + \sin\theta\,\vec{z})$$
$$\vec{x}_1 = \cos\varphi\,\vec{u} + \sin\varphi\,\cos\theta\,\vec{v} + \sin\varphi\,\sin\theta\,\vec{z}.$$

On remarque que $\vec{x}_1$ est fixe dans la première base intermédiaire $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ si θ et φ sont constants.

Par suite, l'angle $(\vec{u}, \vec{i})$ est constant.

Donc $\beta = \psi + \text{constante}$

et $d\beta = d\psi$.

Alors
$$\left[\frac{\partial \vec{i}}{\partial \psi}\right]_R = \left[\frac{\partial \vec{i}}{\partial \beta}\right]_R.$$

D'après le résultat exprimé par la relation (2) *paragraphe 5.1 :*

$$\left[\frac{\partial \vec{i}}{\partial \beta}\right]_R = \vec{z} \wedge \vec{i}$$

soit
$$\left[\frac{\partial \vec{i}}{\partial \beta}\right]_R = \vec{j}.$$

Par suite :
$$\left[\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \psi}\right]_R = \sin\gamma\,\vec{j}.$$

En remarquant que : $\vec{z} \wedge \vec{x}_1 = \sin\gamma\,\vec{j}$, on obtient

$$\boxed{\left[\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \psi}\right]_R = \vec{z} \wedge \vec{x}_1}$$

ce qui veut dire que la dérivée partielle d'un vect unitaire par rapport à un angle du paramétrage R₁ par rapport à R est le produit vectoriel du vect unitaire autour duquel a lieu la rotation par vecteur unitaire que l'on dérive.

De la même façon *(figure 10) :*

$$\boxed{\left[\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \theta}\right]_R = \vec{u} \wedge \vec{x}_1}$$

$$\boxed{\left[\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \varphi}\right]_R = \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1}$$

avec ces résultats portés dans la relation (5) :

$$\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right]_R = \psi'\vec{z} \wedge \vec{x}_1 + \theta'\vec{u} \wedge \vec{x}_1 + \varphi'\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1$$
$$= (\psi'\vec{z} + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{z}_1) \wedge \vec{x}_1$$

de même, par permutation des vecteurs de la b de R₁ :

$$\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_R = (\psi'\vec{z} + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{z}_1) \wedge \vec{y}_1$$

$$\left[\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right]_R = (\psi'\vec{z} + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{z}_1) \wedge \vec{z}_1$$

si bien que $\left[\frac{d}{dt}\vec{U}(t)\right]_R$ exprimé dans la relation s'écrit, en se souvenant que

$$\vec{U}(t) = a(t)\vec{x}_1 + b(t)\vec{y}_1 + c(t)\vec{z}_1,$$

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{U}(t)\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\vec{U}(t)\right]_{R_1} + (\psi'\vec{z} + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{z}_1) \wedge$$

posons :

$$\boxed{\vec{\Omega}(R_1/R) = \psi'\vec{z} + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{z}_1.}$$

Comme précédemment $\vec{\Omega}(R_1/R)$ est appelé **vect rotation** de la base de R₁ par rapport à la base R, d'où :

$$\boxed{\left[\frac{d}{dt}\vec{U}(t)\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\vec{U}(t)\right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{U}(t)} \quad \textbf{(6)}$$

Cette relation est identique à la relation (3) *paragraphe 5.1,* mais le vecteur rotation $\vec{\Omega}(R_1/R$ est défini pour un mouvement dans l'espace 3 dimensions de la base de R₁ par rapport à la b de R.

Application

Considérons une centrifugeuse de laboratoire comp d'un bâti (S₀), d'un bras (S₁) et d'une éprouvette contenant deux liquides de masses volumiques différen

Sous l'effet centrifuge due à la rotation du bras (S_1) l'éprouvette (S_2) s'incline pour se mettre pratiquement dans l'axe du bras et le liquide dont la masse volumique est la plus grande est rejeté vers le fond de l'éprouvette, ce qui réalise la séparation des deux liquides *(figure 11)*.

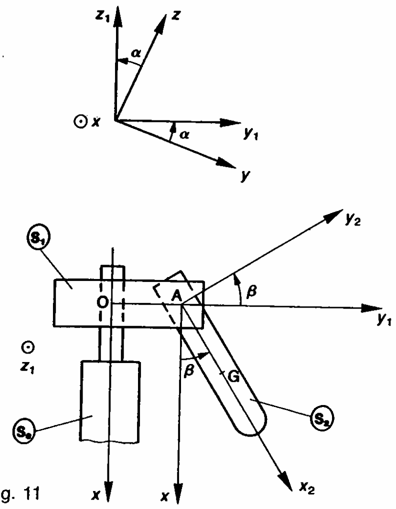


Fig. 11

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à (S_0).
Les solides (S_0) et (S_1) ont une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$.
$R_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est un repère lié à (S_1). Posons $\alpha = (\vec{y}, \vec{y}_1)$ avec $\alpha = \omega t$ (ω constante positive exprimée en radians par seconde).
Les solides (S_1) et (S_2) ont une liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_1)$ telle que :

$\overrightarrow{OA} = a\vec{y}_1$ (a constante positive exprimée en mètres).

$R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ est un repère lié à (S_2). Posons $\beta = (\vec{x}, \vec{x}_2)$.
β étant une fonction du temps inconnue.
Soit G le centre d'inertie de (S_2) tel que :

$\overrightarrow{AG} = b\vec{x}_2$ (b constante positive exprimée en mètres).

QUESTION 1

Déterminer le vecteur rotation de la base du repère R_1, lié au solide (S_1), par rapport à la base du repère R :

$$\vec{\Omega}(S_1/R) = \vec{\Omega}(R_1/R).$$

RÉPONSE

La base de R_1 est orientée par rapport à la base de R par l'angle α mesuré autour de $\vec{x}$, d'où

$$\vec{\Omega}(S_1/R) = \alpha'\vec{x}$$

soit : $$\boxed{\vec{\Omega}(S_1/R) = \omega\vec{x}.}$$

QUESTION 2

Déterminer le vecteur rotation de la base du repère R_2, lié au solide (S_2), par rapport à la base du repère R :

$$\vec{\Omega}(S_2/R) = \vec{\Omega}(R_2/R).$$

RÉPONSE

La base de R_2 est orientée par rapport à la base de R par l'angle α mesuré autour de $\vec{x}$ et par l'angle β mesuré autour de $\vec{z}_1$, d'où :

$$\vec{\Omega}(S_2/R) = \alpha'\vec{x} + \beta'\vec{z}_1$$

soit : $$\boxed{\vec{\Omega}(S_2/R) = \omega\vec{x} + \beta'\vec{z}_1.}$$

QUESTION 3

Déterminer le vecteur vitesse du point G par rapport au repère R : $\vec{V}(G/R)$.

RÉPONSE

Par définition : $\vec{V}(G/R) = \left[\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{OG}\right]_R$

avec $$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG}$$

$$\vec{V}(G/R) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}\right]_R + \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AG}\right]_R. \qquad (7)$$

Calculons successivement chaque terme :

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}a\vec{y}_1\right]_R = a\left[\frac{d}{dt}\vec{y}_1\right]_R.$$

Pour calculer la dérivée de $\vec{y}_1$ dans la base de R passons par l'intermédiaire de la base de R_1 liée à $\vec{y}_1$. La relation (3) du *paragraphe 5.1* permet d'écrire :

$$\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{y}_1.$$

$\vec{y}_1$ étant un des vecteurs de la base de R_1 :

$$\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_{R_1} = \vec{0}.$$

Par suite :

$$\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_R = \omega\vec{x} \wedge \vec{y}_1$$

soit $$\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_R = \omega\vec{z}_1$$

et $$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}\right]_R = a\omega\vec{z}_1. \qquad (8)$$

Calculons le deuxième terme de la relation (7) :

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AG}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}b\vec{x}_2\right]_R = b\left[\frac{d}{dt}\vec{x}_2\right]_R.$$

Pour calculer la dérivée de $\vec{x}_2$ dans la base de R passons par l'intermédiaire de la base de R_2 liée à $\vec{x}_2$. La relation (6) du *paragraphe 5.2* permet d'écrire :

$$\left[\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R) \wedge \vec{x}_2.$$

$\vec{x}_2$ étant un des vecteurs de la base de R_2 :

$$\left[\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_{R_2} = \vec{0}.$$

Par suite :

$$\left[\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_R = (\omega\vec{x} + \beta'\vec{z}_1) \wedge \vec{x}_2 = \omega \sin\beta\,\vec{z}_1 + \beta'\vec{y}_2$$

et $$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AG}\right]_R = b(\omega \sin\beta\,\vec{z}_1 + \beta'\vec{y}_2). \qquad (9)$$

Avec les relations (8) et (9) on obtient l'expression de $\vec{V}(G/R)$ suivante :

$$\boxed{\vec{V}(G/R) = \omega(a + b\sin\beta)\vec{z}_1 + b\beta'\vec{y}_2.}$$

QUESTION 4

Déterminer le vecteur accélération du point G par rapport au repère R : $\vec{\Gamma}(G/R)$.

RÉPONSE

Par définition :

$$\vec{\Gamma}(G/R)=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{V}(G/R)\right]_R.$$

Avec $\vec{V}(G/R)=\omega(a+b\sin\beta)\vec{z}_1+b\beta'\vec{y}_2$,

$$\vec{\Gamma}(G/R)=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega(a+b\sin\beta)\vec{z}_1\right]_R+\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}b\beta'\vec{y}_2\right]_R. \quad (10)$$

Le premier terme s'écrit :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega(a+b\sin\beta)\vec{z}_1\right]_R=\omega b\beta'\cos\beta\vec{z}_1+\omega(a+b\sin\beta)\left[\frac{\mathrm{d}\vec{z}_1}{\mathrm{d}t}\right]_R,$$

Pour calculer la dérivée de $\vec{z}_1$ dans la base de R passons par l'intermédiaire de la base de R_1 liée à $\vec{z}_1$. La relation (3) du *paragraphe 5.1* permet d'écrire :

$$\left[\frac{\mathrm{d}\vec{z}_1}{\mathrm{d}t}\right]_R=\left[\frac{\mathrm{d}\vec{z}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{R_1}+\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\vec{z}_1$$

$\left[\frac{d\vec{z}_1}{\mathrm{d}t}\right]_{R_1}=\vec{0}$, car $\vec{z}_1$ est constant dans R_1.

Par suite :

$$\left[\frac{\mathrm{d}\vec{z}_1}{\mathrm{d}t}\right]_R=\omega\vec{x}\wedge\vec{z}_1$$

soit

$$\left[\frac{\mathrm{d}\vec{z}_1}{\mathrm{d}t}\right]_R=-\omega\vec{y}_1.$$

Alors :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega(a+b\sin\beta)\vec{z}_1\right]_R=\omega b\beta'\cos\beta\vec{z}_1-\omega^2(a+b\sin\beta)\vec{y}_1. \quad (11)$$

Le deuxième terme de (10) s'écrit :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}b\beta'\vec{y}_2\right]_R=b\beta''\vec{y}_2+b\beta'\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y}_2\right]_R.$$

Pour calculer la dérivée de $\vec{y}_2$ dans la base de R passons par l'intermédiaire de la base de R_2 liée à $\overrightarrow{y_2}$. La relation (6) du *paragraphe 5.2* permet d'écrire :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y}_2\right]_R=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y}_2\right]_{R_2}+\vec{\Omega}(R_2/R)\wedge\vec{y}_2$$

$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y}_2\right]_{R_2}=\vec{0}$ car $\vec{y}_2$ est constant dans R_2.

Par suite :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y}_2\right]_R=(\omega\vec{x}+\beta'\vec{z}_1)\wedge\vec{y}_2$$

soit

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y}_2\right]_R=\omega\cos\beta\vec{z}_1-\beta'\vec{x}_2.$$

Alors :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}b\beta'\vec{y}_2\right]_R=b\beta''\vec{y}_2+\omega b\beta'\cos\beta\vec{z}_1-b\beta'^2\vec{x}_2. \quad (12)$$

En rassemblant les résultats obtenus en (11) et (12), le vecteur accélération du point G par rapport au repère R s'écrit :

$$\boxed{\vec{\Gamma}(G/R)=2\omega b\beta'\cos\beta\vec{z}_1-\omega^2(a+b\sin\beta)\vec{y}_1+b\beta''\vec{y}_2-b\beta'^2\vec{x}_2.}$$

6. DÉRIVATION GRAPHIQUE

La méthode de dérivation graphique d'une fonctio $x(t)$ dont on connaît la courbe représentative s un intervalle $[t_1, t_2]$ est une méthode géométriq simple fondée sur l'interprétation géométrique de dérivée $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ de la fonction $x(t)$, dont voici principe :
Soit la courbe représentative de la fonction x(supposée continue sur l'intervalle $[t_1$, *(figure 12).*

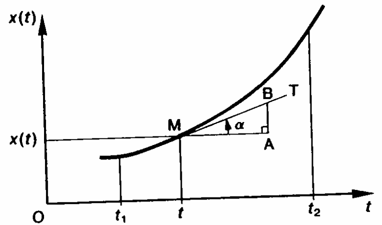


Fig. 12

Soit MT la tangente à la courbe en un point d'abscisse $t\in[t_1, t_2]$.
Soit α l'angle de cette tangente avec l'axe abscisses $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

Nous savons que la pente de la courbe au point c'est-à-dire tg α, est égale à la dérivée de la fonc $x(t)$ en ce point, soit

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Considérons le triangle rectangle MAB tel que soit parallèle à l'axe des abscisses, AB soit para à l'axe des ordonnées et que l'hypoténuse MB située sur la tangente MT.

Alors tg $\alpha=\frac{\overline{AB}}{\overline{MA}}$ et par suite :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\overline{AB}}{\overline{MA}}}$$

Donc, après avoir tracé au point M la tange la courbe $x(t)$, la valeur de la dérivée $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ point s'obtient par le calcul du rapport des côtés AB et MA mesurés algébriquement s axes avec les unités convenables.

Application

Le schéma cinématique de la *figure 13* modél système bielle-manivelle.
Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti ⓪. La maniv a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$ avec le bâti (0

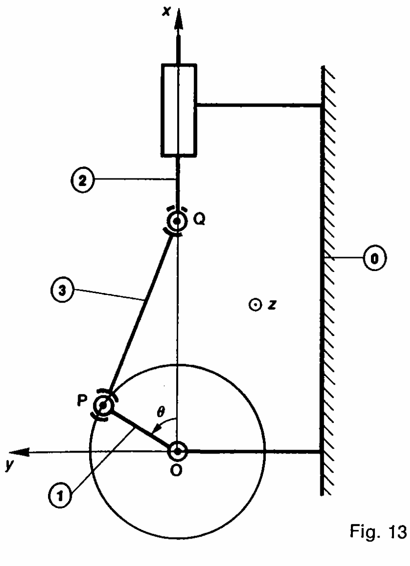


Fig. 13

coulisseau ② a une liaison pivot glissant d'axe $(O, \vec{x})$ avec le bâti ⓪.

La bielle ③ a une liaison rotule avec ① et ② de centres P et Q respectivement, situés dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$. Le point Q décrit l'axe $(O, \vec{x})$.

On pose $\theta = (\vec{x}, \overrightarrow{OP})$ avec

$$\begin{cases} \theta = \omega t & (\omega = 452{,}4 \text{ rad/s}) \\ r = OP & (r = 30 \text{ mm}) \\ l = PQ & (l = 70 \text{ mm}). \end{cases}$$

Définissons la position du point Q du coulisseau ② par rapport au bâti ⓪ par la variable $x(t) = \overline{OQ}$. Comme $\theta = \omega t$, $x(t)$ peut-être également considérée comme une fonction de θ : $x(\theta)$.

QUESTION 1

Déterminer graphiquement la courbe représentative de la position du coulisseau par rapport au bâti en fonction de la position angulaire de la manivelle :

$$\boldsymbol{x(\theta)} \textbf{ pour } \boldsymbol{\theta \in [0, 2\pi]}.$$

RÉPONSE

Pour cela placer le repère (x, θ) par rapport au système bielle-manivelle comme indiqué sur la *figure 14a*.

Choix des échelles :

— *en abscisse :* $\frac{\pi}{6}$ rad est représenté par 7,5 mm;

— *en ordonnée :* le système bielle-manivelle étant dessiné à l'échelle $\frac{1}{2}$, 1 mm de la course du coulisseau est représenté par 0,5 mm (x varie entre 40 et 100 mm).

Les points de mesure choisis correspondent aux valeurs de θ variant de 0 à 2π avec un pas de $\frac{\pi}{6}$ rad.

Les différentes positions du point Q s'obtiennent en portant avec un compas une distance de 35 mm à partir des positions du point P correspondant aux différentes valeurs de θ (le point M correspondant à la valeur $\theta = \frac{\pi}{6}$ a été dessiné sur la *figure 14a*).

La courbe $x(\theta)$ est symétrique par rapport à la droite $\theta = \pi$.

QUESTION 2

En déduire par dérivation graphique la courbe représentative de la vitesse du coulisseau par rapport au bâti en fonction de la position angulaire de la manivelle :

$$x'_t(\theta) = \frac{dx(\theta)}{dt} \quad \textbf{pour} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

RÉPONSE

Avec $\theta = \omega t$, $x'_t(\theta) = \frac{dx(\theta)}{dt}$ s'écrit :

$$x'_t(\theta) = \omega \frac{dx(\theta)}{d\theta}.$$

Choix de l'échelle sur l'axe des ordonnées : une vitesse de 1 m/s est représentée par 2,5 mm. Pour obtenir, par exemple, au point d'abscisse $\theta = \frac{\pi}{6}$ la valeur de x'_t, tracer le triangle rectangle MAB défini au *paragraphe 6,* tel que $\overline{MA} = \frac{\pi}{3}$ pour avoir une précision suffisante *(figure 14a).*

Alors $\overline{AB} = -22$ mm

et
$$x'_t = 452{,}4 \times \frac{-0{,}022}{\frac{\pi}{3}},$$

$$x'_t = -9{,}5 \text{ m/s}.$$

La courbe $x'_t(\theta)$ est symétrique par rapport au point $\theta = \pi$.

QUESTION 3

En déduire par dérivation graphique la courbe représentative de l'accélération du coulisseau par rapport au bâti en fonction de la position angulaire de la manivelle :

$$x''_t(\theta) = \frac{dx'_t(\theta)}{dt} \quad \textbf{pour} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

RÉPONSE

Avec $\theta = \omega t$, $x''_t(\theta) = \frac{dx'_t(\theta)}{dt}$ s'écrit :

$$x''_t(\theta) = \omega \frac{dx'_t(\theta)}{d\theta}.$$

Choix de l'échelle sur l'axe des ordonnées : une accélération de 10^3 m/s^2 est représentée par 5 mm. Pour obtenir, par exemple, au point d'abscisse $\theta = \frac{\pi}{6}$ la valeur de x''_t tracer le triangle rectangle M'A'B' tel que $\overline{M'A'} = \frac{\pi}{3}$ *(figure 14b).*

$$\text{Alors } \overline{A'B'} = -10{,}8 \text{ m/s et } x''_t = 452{,}4 \times \frac{-10{,}8}{\frac{\pi}{3}},$$

$$x''_t = -4\,668 \text{ m/s}^2.$$

La courbe $x''_t(\theta)$ est symétrique par rapport à la droite $\theta = \pi$ *(figure 14c).*

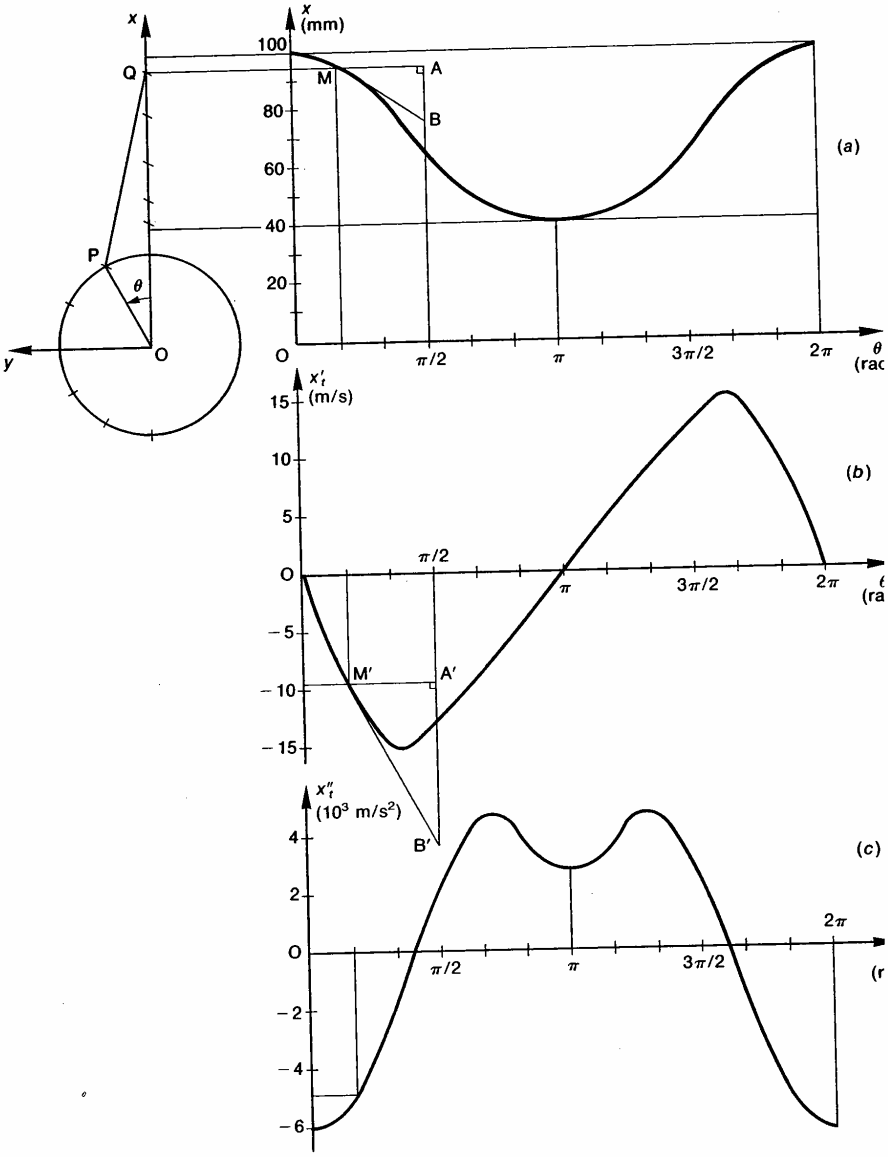

x
Q
P
θ
y
O
x
(mm)
100
80
60
40
20
O
M
A
B
π/2
π
3π/2
2π
θ
(rad
(a)
x'_t
(m/s)
15
10
5
0
−5
−10
−15
π/2
π
3π/2
2π
(ra
M'
A'
B'
(b)
x''_t
(10³ m/s²)
4
2
0
−2
−4
−6
π/2
π
3π/2
2π
(r
(c)

Fig. 14

A SAVOIR

1. Dans un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, le vecteur position d'un point P dans R, à la date t est $\overrightarrow{OP}$. Le vecteur vitesse du point P par rapport à R, à la date t, est :

$$\vec{V}(P/R)=\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_R$$

Le vecteur accélération du point P par rapport à R à la date t est :

$$\vec{\Gamma}(P/R)=\left[\frac{d}{dt}\vec{V}(P/R)\right]_R$$

2. A connaître aussi la relation de changement de base de dérivation :

$$\left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_R=\left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right]_{R_1}+\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\vec{U}(t).$$

*Quand l'orientation de la base de R_1 par rapport à la base de R est définie par les trois angles d'Euler :

$$\vec{\Omega}(R_1/R)=\psi'\vec{z}+\theta'\vec{u}+\varphi'\vec{z}_1.$$

PROBLÈME RÉSOLU

Étude du mouvement d'un point M de l'arête coupante d'un outil de fraise par rapport à une pièce bridée sur la table de la fraiseuse, la table étant animé d'un mouvement transversal *(figure 15)*.

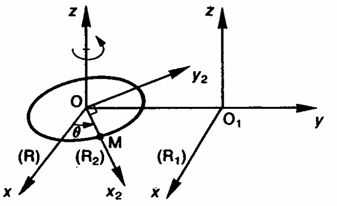


Fig. 15

Le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié au bâti et le repère $R_1(O_1, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié à la pièce.

L'origine O_1 a un mouvement de translation rectiligne uniforme d'axe $(O, \vec{y})$ par rapport au repère R. On pose :

$$\overrightarrow{OO_1}=at\vec{y},\quad \text{avec } a=2 \text{ mm/tr}$$

(mouvement d'avance de la pièce).

Soit $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ un repère lié à la fraise. On pose :

$$\theta=(\vec{x}, \vec{x}_2),\quad \text{avec } \theta=\omega t \text{ et } \omega=21 \text{ rad/s}$$

(mouvement de coupe de la fraise).

Le point M de l'arête coupante de la fraise est tel que :

$$\overrightarrow{OM}=r\vec{x}_2,\quad \text{avec } r=50 \text{ mm.}$$

QUESTION 1

Déterminer les deux composantes du vecteur position $\overrightarrow{O_1M}$ du point M dans le repère R_1, en fonction du temps t : $x_1(t)$, $y_1(t)$.

Tracer approximativement la trajectoire du point M dans le repère R_1, pour $t \geq 0$.

RÉPONSE

Le vecteur position $\overrightarrow{O_1M}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{O_1M}=\overrightarrow{O_1O}+\overrightarrow{OM}$$
$$=-at\vec{y}+r\vec{x}_2$$

avec $\vec{x}_2=\cos\theta\,\vec{x}+\sin\theta\,\vec{y}$ et $\theta=\omega t$,

$$\overrightarrow{O_1M}=r\cos\omega t\,\vec{x}+(-at+r\sin\omega t)\,\vec{y}.$$

Les deux composantes de $\overrightarrow{O_1M}$, sur les axes $(O_1, \vec{x})$ et $(O_1, \vec{y})$, donnent l'équation paramétrique de la trajectoire de M par R_1 :

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t)&=r\cos\omega t\\ y_1(t)&=-at+r\sin\omega t.\end{aligned}}$$

Cette trajectoire a l'allure suivante *(figure 16)* :

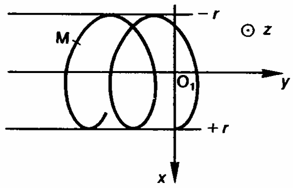


Fig. 16

QUESTION 2

Calculer le vecteur vitesse du point M par rapport au repère R_1 : $\vec{V}(M/R_1)$.

RÉPONSE

Le vecteur vitesse du point M par rapport au repère R_1 est la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{O_1M}$ par rapport à t, dans R_1 :

$$\vec{V}(M/R_1)=\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_1M}\right]_{R_1}$$

avec $\overrightarrow{O_1M} = -at\vec{y} + r\vec{x}_2,$

$$\vec{V}(M/R_1) = \left[\frac{d}{dt}(-at\vec{y})\right]_{R_1} + \left[\frac{d}{dt}r\vec{x}_2\right]_{R_1}. \quad (13)$$

Calculons successivement chaque terme :

$$\left[\frac{d}{dt}(-at\vec{y})\right]_{R_1} = -a\vec{y}$$

$\vec{y}$ étant fixe dans R_1.

Pour calculer la dérivée de $r\vec{x}_2$ dans R_1 utilisons la base intermédiaire du repère R_2 dont $\vec{x}_2$ est un vecteur unitaire :

$$\left[\frac{d}{dt}r\vec{x}_2\right]_{R_1} = \left[\frac{d}{dt}r\vec{x}_2\right]_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge r\vec{x}_2.$$

Le vecteur $r\vec{x}_2$ étant constant dans la base de R_2 :

$$\left[\frac{d}{dt}r\vec{x}_2\right]_{R_2} = \vec{0}.$$

L'orientation de la base de R_2 par rapport à la base de R étant définie par l'angle θ $(\theta = \omega t)$ mesuré autour de $\vec{z}$:

$$\vec{\Omega}(R_2/R_1) = \omega\vec{z}.$$

Alors :

$$\left[\frac{d}{dt}r\vec{x}_2\right]_{R_1} = \omega\vec{z} \wedge r\vec{x}_2 = \omega r\vec{y}_2.$$

Par suite, l'expression de $\vec{V}(M/R_1)$ écrite en (13) devient :

$$\boxed{\vec{V}(M/R_1) = -a\vec{y} + \omega r\vec{y}_2.}$$

QUESTION 3

Déterminer l'hodographe de $\vec{V}(M/R_1)$ relatif au point O_1. En déduire la variation maximale de $\|\vec{V}(M/R_1)\|$ en mètres par minute.

RÉPONSE

Dans le repère R_1 plaçons le point B tel que *(figure 17)* :

$$\overrightarrow{O_1B} = \vec{V}(M/R_1) = -a\vec{y} + \omega r\vec{y}_2.$$

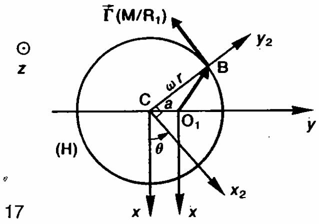


Fig. 17

Posons $\overrightarrow{O_1C} = -a\vec{y}$ et $\overrightarrow{CB} = \omega r\vec{y}_2$.

Le vecteur $\overrightarrow{O_1C}$ est constant dans R_1, par conséquent le point C est un point fixe de l'axe $(O_1, \vec{y})$.

Le vecteur $\overrightarrow{CB}$ a une norme constante égale à ωr, par conséquent le point B reste à une distance constante du point C au cours du mouvement. Par suite, l'hodographe (H) est le cercle de centre C de rayon ωr.

Avec les valeurs numériques proposées $\omega r > a$. Alors le point O_1 se trouve à l'intérieur de l'hodographe.

$\|\overrightarrow{O_1B}\|$ est minimal pour $\theta = 0$ (à $2k\pi$), donc

$$\|\vec{V}(M/R_1)\|_{\min} = \omega r - a;$$

$\|\overrightarrow{O_1B}\|$ est maximal pour $\theta = \pi$ (à $2k\pi$), donc

$$\|\vec{V}(M/R_1)\|_{\max} = \omega r + a.$$

Par suite, la variation maximale de $\|\vec{V}(M/R_1)\|$ est égale à $2a$, soit 0,8 m/min.

QUESTION 4

Déterminer le vecteur accélération du point M par rapport au repère R_1 : $\vec{\Gamma}(M/R_1)$.

RÉPONSE

Le vecteur accélération du point M par rapport au repère R_1 est la dérivée du vecteur vitesse $\vec{V}(M/R_1)$ par rapport à t dans R_1 :

$$\vec{\Gamma}(M/R_1) = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}(M/R_1)\right]_{R_1}$$

avec $\vec{V}(M/R_1) = -a\vec{y} + \omega r\vec{y}_2$

$$\vec{\Gamma}(M/R_1) = \left[\frac{d}{dt}(-a\vec{y})\right]_{R_1} + \left[\frac{d}{dt}\omega r\vec{y}_2\right]_{R_1}.$$

Le vecteur $-a\vec{y}$ est constant dans R_1, donc :

$$\left[\frac{d}{dt}(-a\vec{y})\right]_{R_1} = \vec{0}.$$

Alors $\vec{\Gamma}(M/R_1) = \omega r\left[\frac{d}{dt}\vec{y}_2\right]_{R_1}.$

Pour calculer la dérivée de $\vec{y}_2$ dans la base de R_1 utilisons la base de R_2 dans laquelle $\vec{y}_2$ est constant :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{y}_2\right]_{R_1} = \left[\frac{d}{dt}\vec{y}_2\right]_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{y}_2$$

sachant que

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{y}_2\right]_{R_2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}(R_2/R_1) = \omega\vec{z}.$$

Le vecteur accélération s'écrit :

$$\vec{\Gamma}(M/R_1) = \omega r(\omega\vec{z} \wedge \vec{y}_2)$$

soit $\boxed{\vec{\Gamma}(M/R_1) = -\omega^2 r\vec{x}_2.}$

Ce vecteur est bien tangent au point B à l'hodographe (H) *(figure 17)*.

$\vec{\Gamma}(M/R_1)$ est un vecteur de même direction que le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$, mais de sens contraire.

CONSEILS POUR LA RÉSOLUTION

1. Avant toute étude cinématique d'un problème il convient de bien paramétrer le mécanisme en définissant, en particulier, toutes les bases intermédiaires.

2. Pour les calculs de dérivées de vecteurs, utiliser la relation de changement de base de déviation, pour obtenir des résultats simples et facilement interprétables géométriquement.

3. Les vecteurs position, vitesse et accélération s'expriment à partir de différents vecteurs unitaires des bases intermédiaires. Il est inutile, pour l'instant, de projeter tous ces vecteurs sur une base particulière.

4. Pour tracer la courbe des vitesses ou des accélérations par dérivation graphique, définir avec soin les échelles utilisées.

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 — Soit un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Un point P décrit une hélice circulaire d'axe $(O, \vec{z})$ de rayon r *(figure 18).*

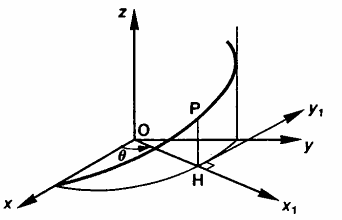


Fig. 18

Soit H la projection orthogonale du point P sur le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$.
Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ le repère tel que $\vec{x}_1$ ait même direction et même sens que $\overrightarrow{OH}$.

On pose : $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$ et

$$\overline{HP} = z = k\theta \quad (k \text{ constante positive}).$$

QUESTIONS

1° Calculer $\vec{V}(P/R)$ et $\vec{\Gamma}(P/R)$.

2° Lorsque $\theta = \omega t$ (ω constante positive), montrer que la norme du vecteur vitesse est constante et que le vecteur accélération a pour direction $\vec{x}_1$.

RÉPONSES

1° $\vec{V}(P/R) = r\theta'\vec{y}_1 + k\theta'\vec{z}$

$\vec{\Gamma}(P/R) = r\theta''\vec{y}_1 - r\theta'^2\vec{x}_1 + k\theta''\vec{z}.$

2° $\theta = \omega t,\ \theta' = \omega,\ \theta'' = 0$

$$\|\vec{V}(P/R)\| = \omega\sqrt{r^2 + k^2}$$

$$\vec{\Gamma}(P/R) = -r\omega^2\vec{x}_1.$$

2 — On considère le problème plan suivant :
Soit (S) un disque de centre C, de rayon a, situé dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ d'un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et en contact en un point I de sa circonférence avec l'axe $(O, \vec{x})$.

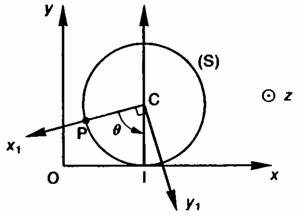


Fig. 19

Soit $R_1(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié au disque.

On pose : $\theta = (\vec{x}_1, -\vec{y})$
avec $\theta = \omega t$ (ω constante positive).

Soit un point P du disque tel que

$$\overline{CP} = a\vec{x}_1.$$

Ce disque roule sans glisser sur l'axe $(O, \vec{x})$, c'est-à-dire qu'à chaque instant $\overline{OI} = \widehat{PI}$.

QUESTIONS

1° Déterminer l'équation paramétrique de la trajectoire du point P dans le repère R. La tracer pour $\theta \in [0, 2\pi]$.

2° Déterminer $\vec{\Omega}(S/R)$.

3° Calculer $\vec{V}(P/R)$.

4° Déterminer l'hodographe de $\vec{V}(P/R)$ relatif au point O.
Pour quelles valeurs de θ la norme de $\vec{V}(P/R)$ est-elle minimale; est-elle maximale?

5° Calculer $\vec{\Gamma}(P/R)$.

RÉPONSES

1° $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta). \end{cases}$

La trajectoire est une cycloïde dont l'allure est donnée *figure 20* pour $\theta \in [0, 2\pi]$.

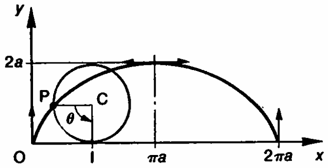


Fig. 20

2° $\vec{\Omega}(S/R) = -\omega\vec{z}$.

3° $\vec{V}(P/R) = a\omega\,(\vec{x} - \vec{y}_1)$.

4° L'hodographe est le cercle de centre C ($a\omega$, 0) de rayon $a\omega$ *(figure 21).*

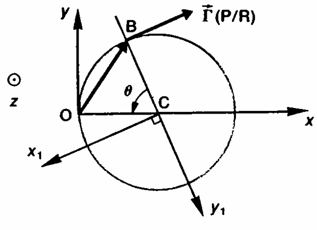


Fig. 21

$$\|\vec{V}(P/R)\|_{max} = 2a\omega \quad \text{pour} \quad \theta = (2k+1)\pi$$
$$\|\vec{V}(P/R)\|_{min} = 0 \quad \text{pour} \quad \theta = 2k\pi.$$

5° $\vec{\Gamma}(P/R) = -a\omega^2\vec{x}_1$.

3 — La *figure 22* représente une tronçonneuse destiné à couper un tube fabriqué en continu. La scie ② doi se déplacer à la même vitesse de translation que l tube ③.
Le mouvement est obtenu à l'aide d'un systèm bielle-manivelle. Le plateau ⑤ muni d'une rainure es entraîné à une vitesse de rotation uniforme par l moto-variateur ④. Le plateau ⑦ tourne libremen autour d'un axe, parallèle à celui du plateau ⑤ mai décalé d'une distance Δ.

Le doigt ⑥ relie les deux plateaux; une extrémité es fixée à ⑦, l'autre coulisse dans la rainure de ⑤. L bielle ⑧ entraîne à partir du doigt ⑥ l coulisseau ⑨ sur lequel est monté l'ensemble moteu ①-scie ②.
— L'entraxe entre ⑤ et ⑦ est $\overrightarrow{O'O} = \Delta\vec{y}$ ave $\Delta = 30$ mm.
— L'axe ⑥ est fixé sur ⑦ à une distance

$$O'M = R = 90 \text{ mm}.$$

— La longueur de la bielle ⑧ est

$$MC = l = 900 \text{ mm}.$$

La *figure 23* représente le schéma cinématique d mécanisme.

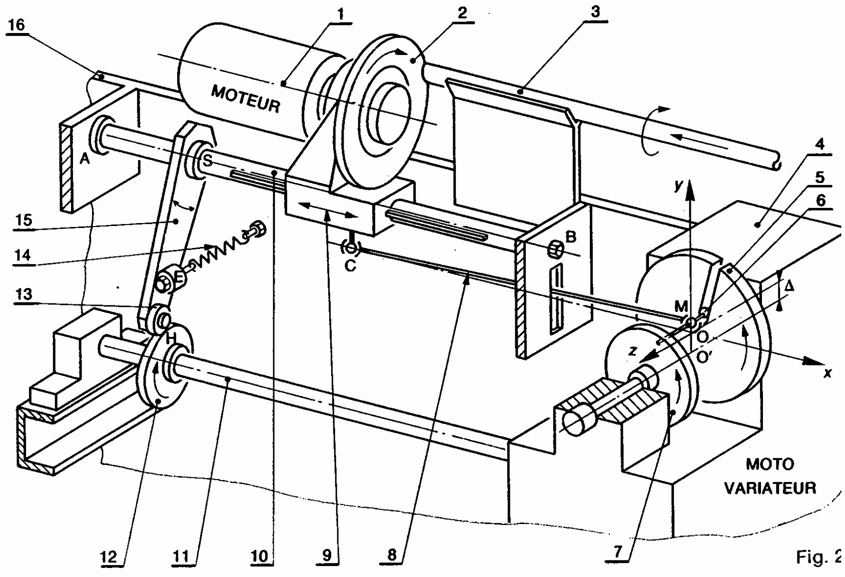


Fig. 2

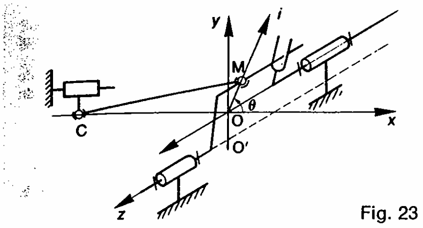


Fig. 23

QUESTIONS

1° Tracer la courbe des abscisses du point C, par rapport au bâti, en fonction de l'angle de rotation θ du plateau ⑤. Pour $\theta = 0$ la bielle ⑧ est portée par l'axe $(O, \vec{x})$.

2° En déduire la courbe des vitesses du point C, par rapport au bâti en fonction de θ. Déterminer l'angle dont a tourné le plateau ⑤ pendant la période où la vitesse du point C est constante à 10 % près.

3° En déduire la courbe des accélérations du point C, par rapport au bâti, en fonction de θ.

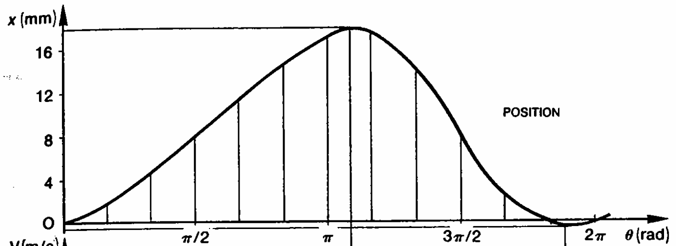


Fig. 24

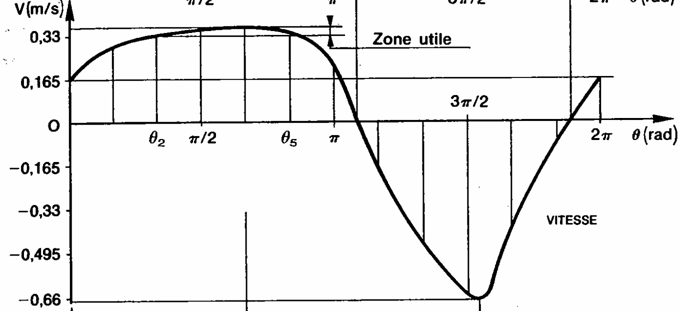


Fig. 25

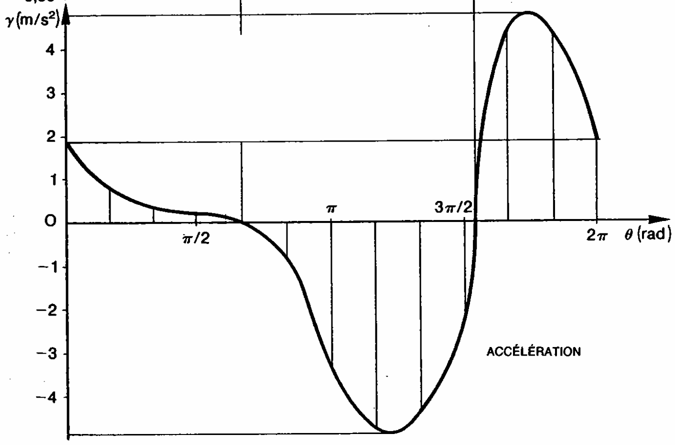


Fig. 26

RÉPONSES

1° Courbe des abscisses du point C *(figure 24).*

2° Courbe des vitesses du point C *(figure 25).*

Entre les angles θ_2 et θ_5 la vitesse du point C est constante à 10 % près, soit un quart de tour du plateau ⑤.

3° Courbe des accélérations du point C *(figure 26).*

4 — Détermination du profil d'une came.

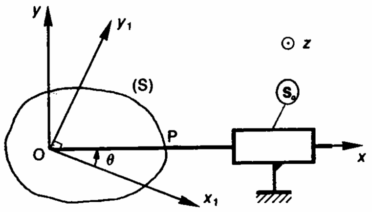


Fig. 27

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à un bâti (S_0). La came (S) a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$ avec (S_0).
Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à (S).

On pose $\theta \doteq (\vec{x}_1, \vec{x})$

avec $\theta = \omega t$ (ω constante positive).

La tige T a une liaison glissière d'axe $(O, \vec{x})$ avec (S_0).
La came et la tige ont une liaison ponctuelle, de normale perpendiculaire à $\vec{z}$, en un point P de l'axe $(O, \vec{x})$.
On impose $\|\overrightarrow{OP}\|_{\min} = a$ et $\|\overrightarrow{OP}\|_{\max} = a + h$, et l'on pose

$$\overrightarrow{OP} = \rho\vec{x} = (a + x)\vec{x}.$$

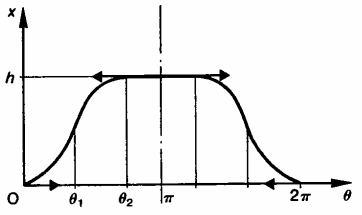


Fig. 28

Le profil de la came doit être tel que :
— quand θ varie de 0 à θ_1 (θ_1 donné) la tige ait un mouvement uniformément accéléré, d'accélération γ_1 ($\gamma_1 > 0$);
— quand θ varie de θ_1 à θ_2 (θ_2 donné) la tige ait un mouvement uniformément retardé, d'accélération $-\gamma_2$ ($\gamma_2 > 0$);
— quand θ varie de θ_2 à π la tige reste immobile;
— quand θ varie de π à 2π la tige ait un mouvement symétrique de celui défini entre 0 et π.
De plus, on veut que x et x'_t n'aient pas de discontinuités entre les différentes phases du mouvement.

QUESTIONS

1° Déterminer γ_1 et γ_2 en fonction de θ_1, θ_2, ω et h. Faire l'application numérique pour :

$$\begin{cases} \theta_1 = 40° \\ \theta_2 = 60° \\ \omega = 209{,}3 \text{ rad/s } (= 2\,000 \text{ tr/min}) \\ h = 10 \text{ mm.} \end{cases}$$

2° En déduire le profil de la came. Le tracer approximativement pour $a = 20$ mm.

RÉPONSES

1° $\gamma_1 = \dfrac{2\omega^2 h}{\theta_1\theta_2} = 1\,200 \text{ m/s}^2$

$$\gamma_2 = \frac{2\omega^2 h}{\theta_2(\theta_2 - \theta_1)} = 2\,400 \text{ m/s}^2.$$

2° Équation polaire de la came :

$$\theta \in [0, \theta_1] : \quad \rho = a + \frac{h\theta^2}{\theta_1\theta_2}$$

$$\theta \in [\theta_1, \theta_2] : \quad \rho = a + \frac{h(-\theta^2 + 2\theta_2\theta - \theta_1\theta_2)}{\theta_2(\theta_2 - \theta_1)}$$

$$\theta \in [\theta_2, \pi] : \quad \rho = a + h.$$

L'allure du profil de la came est le suivant :

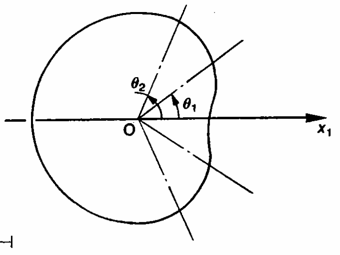


Fig. 29

5 — Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à la Terre. L'origine O est située au centre de la Terre et l'axe $(O, \vec{z})$ est dirigé suivant l'axe des pôles, orienté du pôle Sud vers le pôle Nord *(figure 30).*
Un repère local $R_1(M, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ utile au point M pour la navigation à la surface de la Terre est constitué de la manière suivante :
L'axe $(M, \vec{i})$, tangent au parallèle de M, est orienté vers l'Est.
L'axe $(M, \vec{j})$, tangent au méridien de M, est orienté vers le Nord.
L'axe $(M, \vec{k})$ est orienté suivant la verticale ascendante de M.

Soit $\alpha(t)$ la longitude du point M, mesurée autour de $\vec{z}$.
Soit $\beta(t)$ la latitude du point M, mesurée autour de $-\vec{i}$.
Soit r le rayon de la Terre.

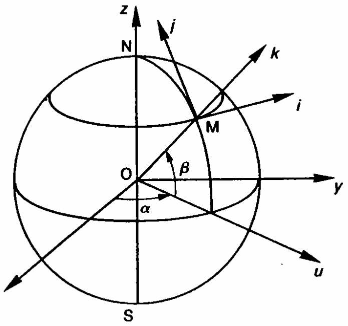


Fig. 30

QUESTIONS

Déterminer :

1° Le vecteur rotation de la base du repère R_1 par rapport à la base du repère R : $\vec{\Omega}(R_1/R)$.

2° Le vecteur vitesse du point M par rapport au repère R, $\vec{V}(M/R)$, exprimé dans la base du repère R_1.

3° Le vecteur accélération du point M par rapport au repère R, $\vec{\Gamma}(M/R)$, exprimé dans la base du repère R_1.

RÉPONSES

1° $\vec{\Omega}(R_1/R) = \alpha'\vec{z} - \beta'\vec{i}$

2° $\vec{V}(M/R) = r\alpha' \cos\beta\,\vec{i} + r\beta'\vec{j}$

3° $$\vec{\Gamma}(M/R) = r(\alpha'' \cos\beta - 2\alpha'\beta' \sin\beta)\vec{i} + r(\beta'' + \alpha'^2 \sin\beta \cos\beta)\vec{j} + r(-\beta'^2 - \alpha'^2 \cos^2\beta)\vec{k}.$$

EXERCICES SANS RÉPONSE

6 — La *figure 31* représente un dispositif de commande de table vibrante.

L'excentrique (E) est un disque de centre C et de rayon a, qui tourne autour de l'axe $(O, \vec{z}_0)$ fixe par rapport au bâti (B).
La table schématisée par le rectangle (T) est en liaison glissière d'axe $(O, \vec{x}_0)$ avec le bâti (B). Le ressort assure le maintien du contact entre (E) et (T).
L'excentration OC vaut $a/2$.

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère lié au bâti et $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ le repère lié à l'excentrique.
Soit A le point de la table (T) du plan de contact avec l'excentrique (E), situé sur l'axe $(O, \vec{x}_0)$.
On pose :

$$\overrightarrow{OA} = x(t)\vec{x}_0 \quad \text{et} \quad \theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$$

avec $\theta = \omega t$ (ω constante positive).
Rayon de l'excentrique : $a = 10$ mm; vitesse de rotation uniforme de l'excentrique : $\omega = 10{,}47$ rad/s (= 100 tr/min).

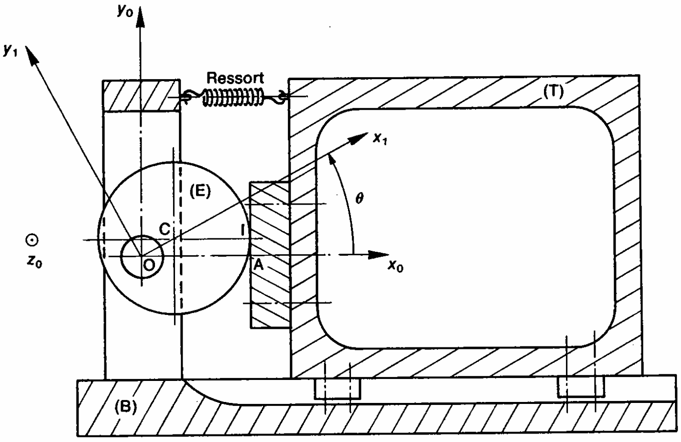


Fig. 31

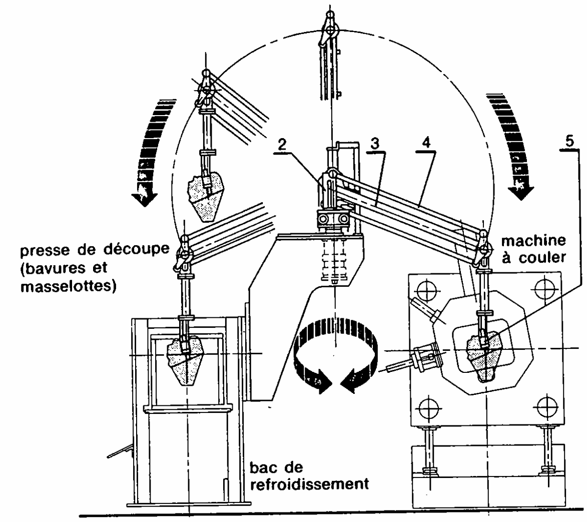


Fig. 32

QUESTIONS

1° Exprimer $x(t)$ en fonction de a, ω et t.

2° Construire la courbe représentative de la fonction $x(t)$ pour $t \in [0; 0,6]$, t est exprimée en secondes.

3° Exprimer le vecteur vitesse du point A par rapport au bâti : $\vec{V}(A/R_0)$.

4° Construire la courbe représentative de la valeur algébrique $v(t)$ du vecteur vitesse

$$\vec{V}(A/R_0) = v(t)\,\vec{x}_0$$

pour $t \in [0; 0,6]$, t en secondes.

5° Exprimer le vecteur accélération du point A par rapport au bâti : $\vec{\Gamma}(A/R_0)$.

6° Construire la courbe représentative de la valeur algébrique $\gamma(t)$ du vecteur accélération $\vec{\Gamma}(A/R_0) = \gamma(t)\,\vec{x}_0$ pour $t \in [0; 0,6]$, t en secondes.

7 — Le manipulateur de fonderie *(figure 32)* permet saisir la pièce lors de son éjection de la machine coulée, d'assurer son transport vers le bac de refroid sement et vers la machine de démasselotage d'ébavurage.

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère lié au bâti définiss la position initiale du manipulateur face à la machi à couler et $R_3(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ le repère lié au bras ③. pose $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$.

Le mouvement de rotation du bras comporte tr phases :

a) Quand θ varie de 0° à 15° $\left(15° = \frac{\pi}{12}\text{ rad}\right)$ le bra un mouvement de rotation uniformément accéléré.

b) Quand θ varie de 15° à 195°, le bras a mouvement de rotation uniforme à la vitesse angula de 1 rad/s.

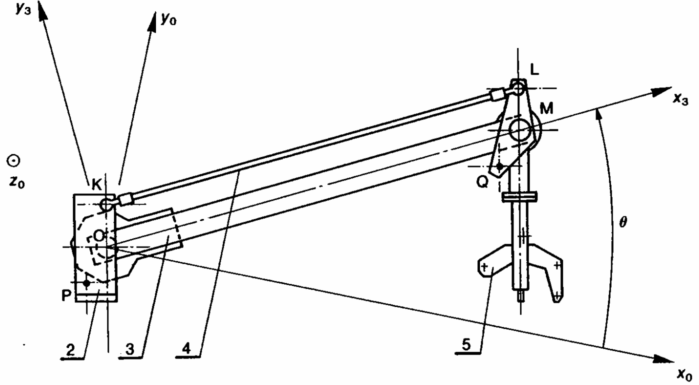


Fig. 33

c) Quand θ varie de 195° à 225°, le bras a un mouvement de rotation uniformément décéléré.
Les vitesses angulaires de départ et d'arrivée sont nulles. Le bras moteur ③ et la barre ④ ont même longueur $l = \mathrm{OM} = \mathrm{KL} = 1\,700$ mm.

QUESTIONS

1° Déterminer la durée, l'accélération ou la décélération angulaire de chaque phase.

2° Tracer les diagrammes des rotations, des vitesses et des accélérations ou décélérations angulaires du bras ③ par rapport au bâti. Indiquer les valeurs numériques remarquables.

3° Donner les expressions des vecteurs vitesse et accélération du point M par rapport au bâti :

$$\vec{V}(M/R_0) \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma}(M/R_0),$$

en fonction de l, θ', θ'', et exprimées dans la base du repère R_3.

Applications numériques :

$$l = 1\,700 \text{ mm}, \quad \theta' = 1 \text{ rad/s}, \quad \theta'' = 0.$$

8 — La *figure 34* représente un compresseur ROOT utilisé sur le moteur à compresseur volumétrique des véhicules LANCIA. L'air est véhiculé dans le creux des dents, entre le carter et le pignon.

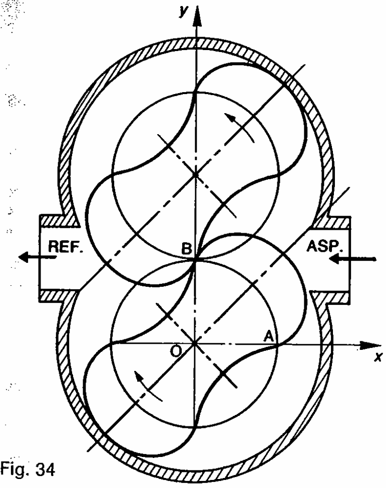


Fig. 34

Pour expliquer le mouvement de génération d'un des quatre profils extérieurs aux cercles primitifs (C_1) et (C_2), adoptons le schéma d'étude suivant pour le profil AB.
Soit (C) un cercle de centre O, de rayon $4a$, situé dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ d'un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et lié à ce repère.
Soit (C') un cercle de centre O', de rayon a, situé dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ du repère R et en contact extérieur en un point I de sa circonférence avec le cercle (C).

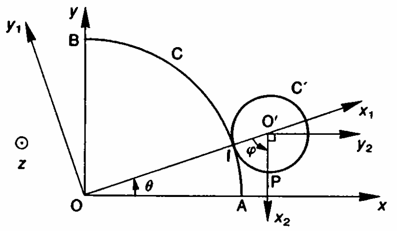


Fig. 35.

Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère tel que :

$$\overrightarrow{OO'} = 5a\,\vec{x}_1.$$

On pose $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$, avec $\theta = \omega t$ (ω constante positive).
Soit $R_2(O', \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ un repère lié au cercle (C') on pose :

$$\varphi = (-\vec{x}_1, \vec{x}_2).$$

Soit P un point du cercle (C') tel que

$$\overrightarrow{O'P} = a\vec{x}_2.$$

Le cercle (C') roule sans glisser sur le cercle (C), c'est-à-dire qu'à chaque instant : $\overset{\frown}{AI} = \overset{\frown}{IP}$.
Le taillage du profil s'effectue de la façon suivante :
Pendant que la machine à tailler réalise le mouvement de roulement sans glissement du cercle (C') sur le cercle (C) la pointe de l'outil décrit à cadence rapide l'axe $(P, \vec{z})$.

QUESTIONS

1° Quelle relation y a-t-il entre φ et θ?

2° Déterminer l'équation paramétrique de la trajectoire du point P dans le repère R. La tracer pour $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

3° Déterminer $\vec{\Omega}(R_1/R)$ et $\vec{\Omega}(R_2/R)$.

4° Calculer $\vec{V}(P/R)$ (vitesse d'avance).

5° Calculer $\vec{\Gamma}(P/R)$.

9 — La *figure 36* représente le corps (S_0) d'un aérogénérateur à hélice bipale muni d'un empennage lui permettant de s'orienter dans le « lit » du vent.

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié au corps (S_0). Le rotor (S_1) entraîne un alternateur électrique situé dans le corps (S_0) et a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{y}_0)$ avec celui-ci. Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{z}_1)$ un repère lié à (S_1). On pose $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$, avec

$$\theta = \omega t \quad \text{et} \quad \omega = 120 \text{ rad/s}.$$

Par fort vent un dispositif de mise en drapeau permet aux pales de l'hélice de pivoter autour de l'axe $(O, \vec{x}_1)$.
Soit $R_2(O, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère lié à la pale (S_2) tel que l'axe $(O, \vec{z}_2)$ soit dirigé suivant la droite de référence AB de la pale. On pose $\beta = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$, en fonctionnement normal l'angle de calage $\beta = 20°$.
Soit G le centre d'inertie de la pale (S_2), tel que

$$\overrightarrow{OG} = a\vec{x}_1 + c\vec{z}_2$$

avec $\quad a = 160 \text{ mm} \quad \text{et} \quad c = 13 \text{ mm}.$

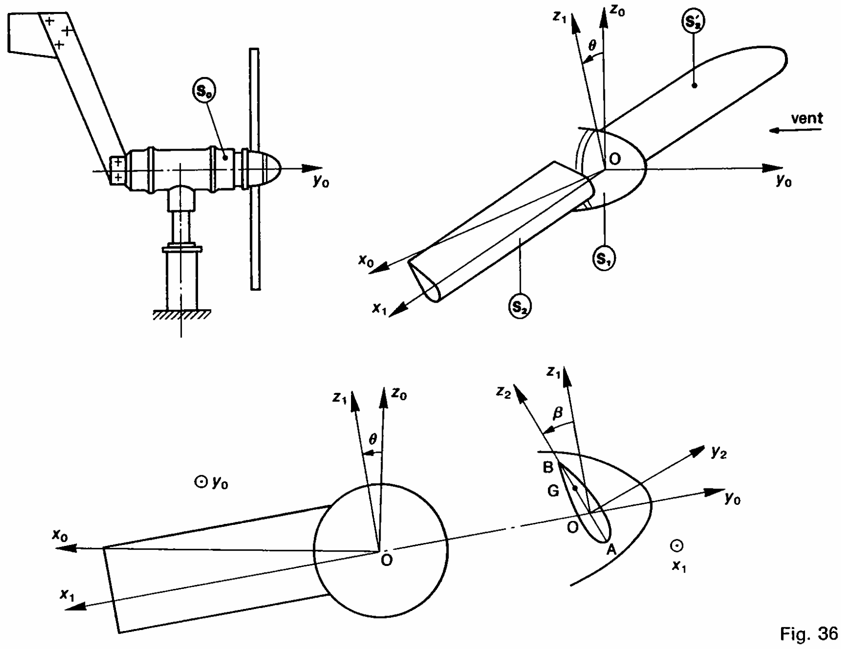


Fig. 36

QUESTIONS

1° Construire le schéma cinématique de l'aérogénérateur.

2° Déterminer la norme du vecteur vitesse du point G par rapport au bâti R_0 : $\|\vec{V}(G/R_0)\|$ lorsque l'angle β reste égal à 20°.

3° Déterminer la norme du vecteur accélération du point G par rapport au bâti R_0 : $\|\vec{\Gamma}(G/R_0)\|$ lorsque l'angle β reste égal à 20°.

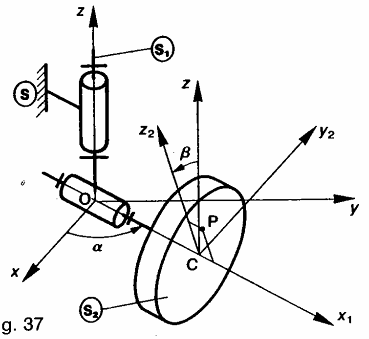


Fig. 37

10 — Le schéma cinématique d'une équilibreuse de roue de véhicule est donné *figure 37:*

$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est un repère lié au bâti (S) de l'équilibreuse. Le bras (S_1) a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$ avec (S). Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à (S_1). On pose $\alpha(t) = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.
La roue (S_2) de centre C a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x}_1)$ avec (S_1). Soit $R_2(C, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère lié à (S_2), tel que

$$\overrightarrow{OC} = r\vec{x}_1 \qquad (r \text{ constante positive}).$$

On pose $\beta(t) = (\vec{z}, \vec{z}_2)$.
Lorsque la roue n'est pas équilibrée, les effets dynamiques font varier l'angle α entre deux bornes qu peuvent être mesurées.
Afin de supprimer cette variation, des masselottes appropriées sont placées sur la périphérie de la jante Une masselotte d'équilibrage est assimilée à un poin P, dont la position dans R_2 est définie par :

$$\overrightarrow{CP} = a\vec{x}_1 + c\vec{z}_2$$

(a et c sont des constantes positives).

QUESTIONS

1° Déterminer le vecteur vitesse du point P par rappor au bâti (S) : $\vec{V}(P/R)$.

2° Déterminer le vecteur accélération du point P pa rapport au bâti (S) : $\vec{\Gamma}(P/R)$.

3 champ des vecteurs vitesse et accélération des points d'un solide

Deux points, appartenant à un même solide, restant à une distance constante l'un de l'autre, il est logique de supposer que leurs vecteurs vitesse, comme leurs vecteurs accélération, ne sauraient être indépendants les uns des autres et que, par conséquent, il existe des relations entre ces vecteurs. L'objet du présent chapitre est précisément de mettre en évidence ces relations.

1 CHAMP DES VECTEURS VITESSE DES POINTS D'UN SOLIDE

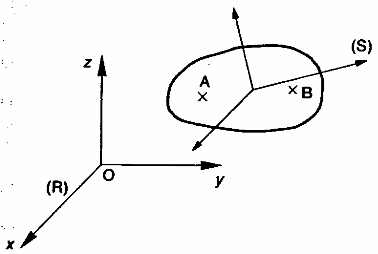


Fig. 1

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
Considérons deux points A et B de ce solide.
Entre la dérivée du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base de R et la dérivée du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base d'un repère lié au solide (S) (repère que l'on notera (S) comme le solide) il existe la relation :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_S + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}$$

or $\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_S = \vec{0}$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ étant constant dans la base liée à (S), et

$$\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right]_R - \left[\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right]_R$$
$$= \vec{V}(B/R) - \vec{V}(A/R)$$

par conséquent, la relation entre les deux vecteurs vitesse $\vec{V}(B/R)$ et $\vec{V}(A/R)$ est la suivante :

$$\boxed{\vec{V}(B/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}.} \quad (1)$$

Les vecteurs vitesse des points d'un solide vérifient donc la relation de changement de point du moment d'un torseur. Par suite, le champ des vecteurs vitesse des points d'un solide répond à la définition d'un torseur, ce qui nous permet d'énoncer le théorème suivant :

1.1. THÉORÈME

Le champ des vecteurs vitesse des points du solide (S) dans son mouvement par rapport au repère R est représenté, au point A, par le torseur suivant :

$$\boxed{\{\mathcal{V}(S/R)\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A/R) \end{Bmatrix}.}$$

Définition

Le torseur $\{\mathcal{V}(S/R)\}$ est appelé *torseur cinématique* du solide (S) dans son mouvement par rapport au repère R.

REMARQUE

Le point A est un point lié au solide (S). Si éventuellement dans un exercice un doute est possible, nous noterons ce vecteur vitesse :

$$\vec{V}(A \in S/R).$$

1.2. PROPRIÉTÉS

Le champ des vecteurs vitesse des points d'un solide, étant caractérisé par un torseur, possède toutes les propriétés du torseur.
Nous allons donc voir à quoi correspondent, dans le domaine de la cinématique du solide, les propriétés mathématiques du torseur.

1.2.1. Axe central - moment central

Rappels

— Un **point central** d'un torseur est un point où le moment résultant a même direction que la résultante générale.
— L'**axe central** d'un torseur est la droite constituée par l'ensemble des points centraux (l'axe central n'existe que si la résultante générale du torseur n'est pas nulle).
L'axe central a même direction que la résultante du torseur.
Supposons le torseur défini en un point O par :

$$\begin{Bmatrix}\vec{R}\\ \vec{M}_0\end{Bmatrix}_{O}.$$

Alors le pied H de la perpendiculaire abaissée de O sur l'axe central est défini par le vecteur :

$$\boxed{\overline{OH}=\frac{\vec{R}\wedge\vec{M}_0}{\vec{R}^2}.} \qquad (2)$$

— Le **moment central** d'un torseur est le moment résultant de ce torseur en un point de son axe central.
Le moment central a même direction que l'axe central du torseur.
Le moment central est le même en tout point de l'axe central.

Soit Δ l'axe central du torseur cinématique du mouvement du solide (S) par rapport au repère R (Δ existe si $\vec{\Omega}(S/R)\neq\vec{0}$).
Δ est appelé **axe instantané de rotation et de glissement** dans le mouvement de (S) par rapport à R, ou **axe de viration.**
Cet axe central Δ est défini à toute date *t*. Lorsque *t* varie, Δ engendre dans (S) et dans R deux surfaces réglées (surfaces engendrées par une droite) appelées *axoïdes* du mouvement de (S) par rapport à R.
Ces deux axoïdes sont tangentes suivant Δ.

Illustrations

- *Dans un engrenage cylindrique,* si on considère le torseur cinématique qui représente le mouvement d'une roue par rapport à l'autre, nous verrons au *chapitre 4* que :

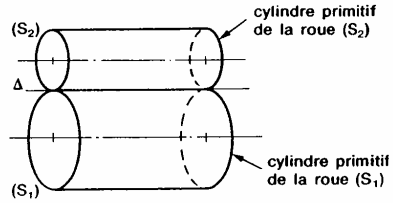

(S₂)
cylindre primitif de la roue (S₂)
Δ
cylindre primitif de la roue (S₁)
(S₁)

Fig. 2

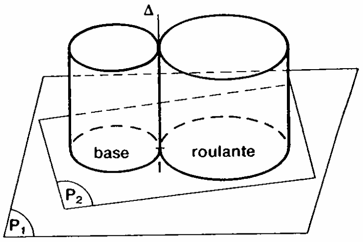


Fig. 3

— *L'axe central* Δ de ce torseur est la générat
de contact des cylindres primitifs de l'engren
— *Les axoïdes* sont les cylindres primitifs.
— *Le moment central* représente la vitesse
glissement le long de Δ des cylindres primitifs;
le cas présent cette vitesse est nulle (dans le
d'un engrenage gauche cette vitesse de glisser
n'est pas nulle).

- *Dans un mouvement plan sur plan,* si on consi
le torseur cinématique qui représente le mouve
d'un plan par rapport à l'autre, nous verron
chapitre 5 que :

— *L'axe central* Δ de ce torseur est la d
perpendiculaire aux plans passant par le c
instantané de rotation I du mouvement d'un
par rapport à l'autre.
— *Les axoïdes* sont deux cylindres de générat
parallèles à Δ. Leurs sections droites avec les
définissent *la base* et *la roulante* du mouve
plan sur plan.
— *Le moment central* est nul, car il représen
vitesse du centre instantané de rotation da
mouvement d'un plan par rapport à l'autre.

1.2.2. Torseurs particuliers

- **LE COUPLE**

Le torseur cinématique du mouvement du solid
par rapport au repère R est un couple, s'il e
la forme :

$$\{\mathcal{V}(S/R)\}=\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{V}(A/R)\end{Bmatrix}_{A}$$

avec $\vec{V}(A/R)\neq\vec{0}$.

Calculons le vecteur vitesse d'un point B quelconque du solide (S) à partir du vecteur vitesse du point A, en utilisant la relation (1) :

$$\vec{V}(B/R)=\vec{V}(A/R)+\vec{\Omega}(S/R)\wedge\vec{AB}.$$

Comme : $\vec{\Omega}(S/R)=\vec{0}$

$$\vec{V}(B/R)=\vec{V}(A/R).$$

Par conséquent, à un instant donné, tous les vecteurs vitesse des points du solide ont même direction. Entre deux instants distincts cette direction peut changer.
Le mouvement de (S) par rapport à R est donc un **mouvement de translation.**

— **Mouvement de translation rectiligne**

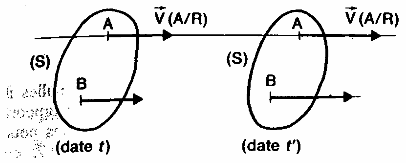


Fig. 4

Le mouvement de translation de (S) par rapport à R est dit rectiligne si la trajectoire d'un point A de (S) dans R est une droite.

Dans ce cas, $\vec{V}(A/R)$ a pour direction la trajectoire du point A.

— **Mouvement de translation circulaire**

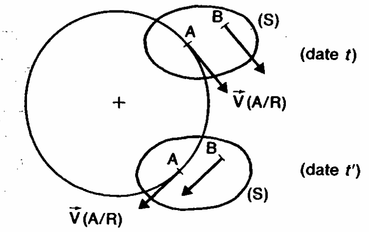


Fig. 5

Le mouvement de translation de (S) par rapport à R est dit circulaire si la trajectoire d'un point A de (S) dans R est un cercle.

Dans ce cas, $\vec{V}(A/R)$ change de direction entre deux dates *t* et *t'*.

- **LE TORSEUR A RÉSULTANTE**

Le torseur cinématique du mouvement du solide (S) par rapport au repère R est un torseur à résultante, s'il est de la forme :

$$\{\mathcal{V}(S/R)\}={}_{A}\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}(S/R)\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$$

avec $\vec{\Omega}(S/R)\neq\vec{0}$.
Le point A est un point de l'axe central Δ de ce torseur.

Calculons le vecteur vitesse d'un point B quelconque du solide (S), situé sur Δ, à partir du vecteur vitesse du point A :

$$\vec{V}(B/R)=\vec{V}(A/R)+\vec{\Omega}(S/R)\wedge\vec{AB}$$

avec $\vec{V}(A/R)=\vec{0}$.
Le vecteur rotation $\vec{\Omega}(S/R)$ a pour direction Δ ainsi que le vecteur $\vec{AB}$, par conséquent, le produit vectoriel de ces deux vecteurs est nul, et :

$$\vec{V}(B/R)=\vec{0}\qquad\forall B\in\Delta.$$

Le mouvement de (S) par rapport à R est donc, à un instant donné, un mouvement de rotation autour de Δ.
Il faut bien préciser que c'est un mouvement de rotation à un instant donné, car, dans le cas général, Δ se déplace dans (S) et dans R lorsque *t* varie.

Cas particulier

Lorsque Δ est fixe dans (S) et dans R le mouvement de (S) par rapport à R est un mouvement de rotation autour de Δ.

EXEMPLE

Considérons un arbre (S) ayant avec un bâti (S_0) une liaison pivot d'axe $(O,\vec{x})$.
Dans ce cas, quel que soit le temps, les points de (S) situés sur l'axe $(O,\vec{x})$ ont une vitesse nulle par rapport à (S_0). Par suite, le torseur représentant le mouvement de (S) par rapport à R est un torseur à résultante dont l'axe central est l'axe de rotation $(O,\vec{x})$.

1.2.3. Équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse des points d'un solide

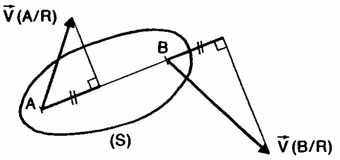


Fig. 6

Le champ des moments d'un torseur étant équiprojectif, le champ des vecteurs vitesse des points d'un solide l'est également.
Cette propriété se traduit par la relation scalaire suivante :

$$\forall A \text{ et } B\in(S) : \boxed{\vec{AB}\cdot\vec{V}(A/R)=\vec{AB}\cdot\vec{V}(B/R).}\quad(3)$$

Cette relation a une interprétation géométrique simple *(figure 6)* :

A une date *t* donnée, les projections orthogonales des vecteurs vitesse $\vec{V}(A/R)$ et $\vec{V}(B/R)$ sur un axe de direction AB sont égales.

REMARQUES

> — *Les projections orthogonales, de vecteurs, sur un axe sont des nombres algébriques, donc faire attention à construire ces projections du même côté par rapport respectivement aux points* A *et* B.
>
> — *Intuitivement ce résultat se comprend facilement : un solide étant indéformable par définition, on comprend que nécessairement, sous peine de le voir éclater, la vitesse du point* A *dans la direction* AB *doit être la même que la vitesse du point* B *dans la direction* AB.

1.3. TORSEURS CINÉMATIQUES DES LIAISONS

Pour les liaisons entre deux solides (S_1) et (S_2) que nous avons définies au *chapitre 1* nous allons indiquer la forme du torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$ de chaque liaison.

Ce torseur s'écrit à l'origine du rep $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/S_1) \\ \vec{V}(O \in S_2/S_1) \end{Bmatrix}.$$

Nous noterons, quand elles ne sont pas nulles, composantes des éléments de réduction dans la b de R par :

$$\vec{\Omega}(S_2/S_1) = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z}$$
$$\vec{V}(O \in S_2/S_1) = u\vec{x} + v\vec{y} + w\vec{z}$$

et nous écrivons le torseur cinématique avec composantes de la façon suivante :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = {}_O\begin{Bmatrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{Bmatrix}.$$

Pour mettre en évidence les composantes null faut placer convenablement le repère R par rap à la liaison. C'est pourquoi, nous préciserons p chaque liaison, dans le tableau de la *figure 7*, quel point on peut exprimer le torseur cinémati pour qu'il conserve ses composantes nulles, la b $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ restant inchangée (colonne « forme part lière conservée » du tableau).

TORSEURS CINÉMATIQUES DES LIAISONS

Liaison	$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$	Forme particulière conservée	Liaison	$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$	Forme particulière conservée
ponctuelle de normale $(O, \vec{z})$	${}_O\begin{Bmatrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & 0 \end{Bmatrix}$	points de $(O, \vec{z})$	pivot glissant d'axe $(O, \vec{x})$	${}_O\begin{Bmatrix} \alpha & u \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	points de $(O, \vec{x})$
linéique rectiligne d'axe $(O, \vec{x})$ de normale $(O, \vec{z})$	${}_O\begin{Bmatrix} \alpha & u \\ 0 & v \\ \gamma & 0 \end{Bmatrix}$	points du plan $(O, \vec{z}, \vec{x})$	glissière hélicoïdale d'axe $(O, \vec{x})$	${}_O\begin{Bmatrix} \alpha & u \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ $u = p\alpha$	points de $(O, \vec{x})$
linéique annulaire d'axe $(O, \vec{x})$	${}_O\begin{Bmatrix} \alpha & u \\ \beta & 0 \\ \gamma & 0 \end{Bmatrix}$	au point O	glissière d'axe $(O, \vec{x})$	${}_O\begin{Bmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	en tout point
rotule de centre O	${}_O\begin{Bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \\ \gamma & 0 \end{Bmatrix}$	au point O	pivot d'axe $(O, \vec{x})$	${}_O\begin{Bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	points de $(O, \vec{x})$
appui plan de normale $(O, \vec{z})$	${}_O\begin{Bmatrix} 0 & u \\ 0 & v \\ \gamma & 0 \end{Bmatrix}$	en tout point	encastrement	${}_O\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	en tout point

Fig. 7

1.4. TORSEUR DES PETITS DÉPLACEMENTS DES POINTS D'UN SOLIDE

1.4.1. Déplacements des points d'un solide

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à un repère R. Notons (1) sa position dans R à la date t et (2) sa position dans R à la date t' *(figure 8)*.

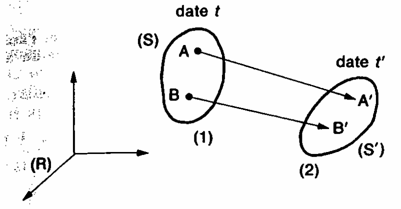


Fig. 8

Soient deux points quelconques du solide (S), notés A et B à la date t et A' et B' à la date t'.

Définition

Le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est appelé *vecteur déplacement* du point A par rapport au repère R, entre les dates t et t'.

De même, le vecteur $\overrightarrow{BB'}$ est appelé vecteur déplacement du point B par rapport au repère R, entre les dates t et t'.
Lorsque la position (2) du solide (S) est quelconque par rapport à sa position (1), il n'y a pas de relation simple entre les vecteurs déplacement des points A et B. Par contre, si la position(2) est voisine de la position (1), il existe entre les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$ une relation analogue à celle qui existe entre les vecteurs vitesse des points A et B, relation que nous allons démontrer.

1.4.2. Petits déplacements des points d'un solide

Considérons, à la date t, le torseur cinématique du mouvement du soliee (S) par rapport au repère R.

$$\{\mathcal{V}(S/R)\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}(S/R)\\ \vec{V}(A/R)\end{matrix}\right\}.$$

Entre les vecteurs vitesse des deux points A et B du solide (S) existe la relation que nous avons repérée (1) au *paragraphe 1 :*

$$\vec{V}(B/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}.$$

Posons $t' = t + dt$, dt représentant un intervalle de temps élémentaire, et multiplions les deux membres de l'égalité précédente par dt :

$$\vec{V}(B/R)\,dt = \vec{V}(A/R)\,dt + \vec{\Omega}(S/R)\,dt \wedge \overrightarrow{AB}.$$

Posons :

$$\begin{cases}\vec{U}(A/R) = \vec{V}(A/R)\,dt\\ \vec{U}(B/R) = \vec{V}(B/R)\,dt\\ \vec{W}(S/R) = \vec{\Omega}(S/R)\,dt.\end{cases}$$

Le vecteur déplacement élémentaire du point A est en toute rigueur le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ représenté *figure 9.*

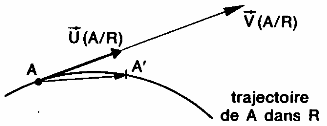


Fig. 9

Lorsque $dt \longrightarrow 0$, on considère que le vecteur $\vec{U}(A/R)$ est pratiquement égal au vecteur $\overrightarrow{AA'}$ et qu'il représente lui aussi le déplacement élémentaire, ou le petit déplacement, du point A par rapport au repère R.

Définitions

$\vec{U}(A/R)$ est appelé *vecteur petit déplacement* du point A par rapport au repère R, à la date t.

$\vec{W}(S/R)$ est appelé *vecteur petite rotation* du solide (S) par rapport au repère R, à la date t.

Par suite, entre les vecteurs petits déplacements des deux points A et B du solide (S) existe la relation :

$$\boxed{\vec{U}(B/R) = \vec{U}(A/R) + \vec{W}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}.}$$

relation qui montre que le champ des vecteurs petits déplacements des points du solide (S) par rapport au repère R peut être représenté par un torseur, que nous écrirons au point A de la façon suivante :

$$\{\mathcal{U}(S/R)\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{W}(S/R)\\ \vec{U}(A/R)\end{matrix}\right\}.$$

Définition

Le torseur $\{\mathcal{U}(S/R)\}$ est appelé *torseur des petits déplacements* des points du solide (S) par rapport au repère R.

REMARQUES

— Généralement, on considère que le solide (S) *a un petit déplacement, par rapport au repère* R, *lorsque les déplacements de ses points sont de quelques millimètres et sa rotation de quelques degrés.*
— Cette notion de torseur des petits déplacements est utile pour déterminer simplement le petit déplacement d'un point particulier d'un solide,

> *car ce calcul se ramène, en fait, au calcul du vecteur vitesse de ce point.*
> *— En résistance des matériaux, on définit le déplacement du repère principal d'inertie quadratique d'une section droite d'une poutre, entre la position non déformée et la position déformée de cette poutre, par un torseur de petits déplacements défini au centre de gravité de la section droite considérée.*
> *— En métrologie, pour optimiser la position d'une première surface théorique associée à la surface réelle, nécessaire pour mesurer les écarts de position et de forme, on définit une deuxième surface théorique associée qui se déduit de la première par un torseur de petits déplacements.*

1.4.3. Application

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti (S_0) d'un système bielle-manivelle représenté par la *figure 10*.

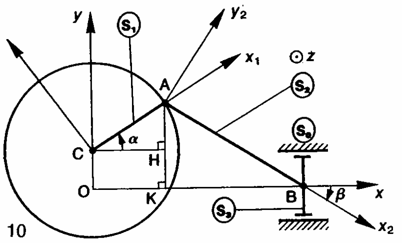


Fig. 10

La manivelle (S_1) a une liaison pivot d'axe $(C, \vec{z})$ avec (S_0) telle que : $\overline{OC} = h\vec{y}$ $(h > 0)$. Soit $R_1(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à (S_1). On pose $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.
La bielle (S_2) d'extrémités A et B a une liaison rotule de centre A avec (S_1) telle que : $\overline{CA} = r\vec{x}_1$ $(r > 0)$ et une liaison rotule de centre B avec le coulisseau (S_3) telle que le point B décrive l'axe $(O, \vec{x})$. Soit $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ un repère lié à (S_2) tel que $\overline{AB} = l\vec{x}_2$ $(l > 0)$. On pose $\beta = (\vec{x}, \vec{x}_2)$.

QUESTION 1

Déterminer les vecteurs vitesse $\vec{V}(A/R)$ et $\vec{V}(B/R)$.

RÉPONSE

Les deux points C et A appartenant au même solide (S_1), calculons $\vec{V}(A/R)$ à partir de $\vec{V}(C/R)$:

$$\vec{V}(A/R) = \vec{V}(C/R) + \vec{\Omega}(S_1/R) \wedge \overline{CA}$$
$$= \vec{0} + \alpha'\vec{z} \wedge r\vec{x}_1$$

comme $\vec{z} \wedge \vec{x}_1 = \vec{y}_1$, on peut écrire :

$$\boxed{\vec{V}(A/R) = r\alpha'\vec{y}_1.}$$

Les deux points A et B appartenant au même solide (S_2), calculons $\vec{V}(B/R)$ à partir de $\vec{V}(A/R)$:

$$\vec{V}(B/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S_2/R) \wedge \overline{AB}$$
$$= r\alpha'\vec{y}_1 \quad + \beta'\vec{z} \wedge l\vec{x}_2$$

comme $\vec{z} \wedge \vec{x}_2 = \vec{y}_2$ on peut écrire :

$$\boxed{\vec{V}(B/R) = r\alpha'\vec{y}_1 + l\beta'\vec{y}_2.}$$

QUESTION 2

Déterminer la relation entre les angles α et β.

RÉPONSE

En remarquant que : $\overline{HA} = \overline{KA} - h$

avec $\begin{cases} \overline{HA} = r \sin \alpha \\ \overline{KA} = -l \sin \beta \quad (\beta < 0 \text{ sur la figure}). \end{cases}$

On obtient la relation :

$$\boxed{r \sin \alpha = -l \sin \beta - h.}$$

QUESTION 3

Déterminer le petit déplacement du point B suivant l'a $(O, \vec{x})$ lorsque la manivelle (S_1) tourne d'un angle $d\alpha$ partir d'une position α donnée.

Application numérique :

$r = 20$ mm
$l = 50$ mm
$h = 10$ mm
$\alpha = 30°$
$d\alpha = 2°$.

RÉPONSE

Le petit déplacement du point B par rapport au repère est :

$$\vec{U}(B/R) = \vec{V}(B/R)\,dt$$

sachant que :

$$\vec{V}(B/R) = r\alpha'\vec{y}_1 + l\beta'\vec{y}_2$$

et que :

$$\begin{cases} \alpha' \, dt = d\alpha \\ \beta' \, dt = d\beta \end{cases}$$

$\vec{U}(B/R)$ s'écrit :

$$\vec{U}(B/R) = r\, d\alpha \vec{y}_1 + l\, d\beta \vec{y}_2.$$

REMARQUE

> *Si t est exprimé en secondes et α' en radians p seconde, dα s'exprime en radians.*

Soit en projection sur $\vec{x}$:

$$U_x(B/R) = -r \sin \alpha \, d\alpha - l \sin \beta \, d\beta.$$

Exprimons ce déplacement élémentaire en fonct de $d\alpha$.
$d\beta$ s'obtient en différenciant la relation :

$$r \sin \alpha = -l \sin \beta - h$$

soit

$$r \cos \alpha \, d\alpha = -l \cos \beta \, d\beta$$

d'où $\quad d\beta = -\frac{r}{l} \times \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \, d\alpha \quad (\text{si } \cos \beta \neq 0).$

Par suite :

$$U_x(B/R) = -r \sin \alpha \, d\alpha + r \cos \alpha \operatorname{tg} \beta \, d\alpha$$

$$\boxed{U_x(B/R) = -r[\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \beta]\,d\alpha.}$$

Application numérique

Avec les valeurs proposées :

$$\sin \beta = -\frac{1}{l}(h + r \sin \alpha) = -0{,}4$$

d'où $\quad \beta = -23{,}58°$

et $\quad \boxed{U_x(B/R) = -0{,}61 \text{ mm.}}$

2 CHAMP DES VECTEURS ACCÉLÉRATION DES POINTS D'UN SOLIDE

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
Considérons deux points A et B de ce solide.
Entre les vecteurs vitesse des deux points A et B du solide (S) par rapport au repère R, nous avons établi la relation (1) *(voir paragraphe 1)* :

$$\vec{V}(B/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}.$$

Pour obtenir la relation entre les vecteurs accélération des deux points A et B du solide (S) par rapport au repère R, dérivons les deux membres de cette égalité par rapport à la date t, pour un observateur lié au repère R.

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{V}(B/R)\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}(A/R)\right]_R + \left[\frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}\right)\right]_R.$$

Soit

$$\vec{\Gamma}(B/R) = \vec{\Gamma}(A/R) + \left[\frac{d}{dt}\vec{\Omega}(S/R)\right]_R \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_R.$$

Pour calculer $\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_R$ utilisons la base liée à (S) :

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_S + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}.$$

Le vecteur $\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_S$ est nul car le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est constant dans (S).
Par conséquent, la relation entre les 2 vecteurs accélération $\vec{\Gamma}(B/R)$ et $\vec{\Gamma}(A/R)$ est la suivante :

$$\boxed{\vec{\Gamma}(B/R) = \vec{\Gamma}(A/R) + \left[\frac{d}{dt}\vec{\Omega}(S/R)\right]_R \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \left[\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}\right].} \quad (4)$$

Les vecteurs accélération des points d'un solide ne vérifient pas la relation de changement de point du moment d'un torseur à cause de l'existence du dernier terme $\vec{\Omega}(S/R) \wedge [\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}]$. Par suite, le champ des vecteurs accélération des points d'un solide n'est pas représentable par un torseur.

REMARQUE

> *Si nécessaire, pour bien préciser que le point* A *est lié au solide* (S) *nous noterons le vecteur accélération :*
>
> $$\vec{\Gamma}(A \in S/R).$$

Application

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à un bâti (S_0). Considérons un solide (S) ayant avec (S_0) une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$ *(figure 11)*.

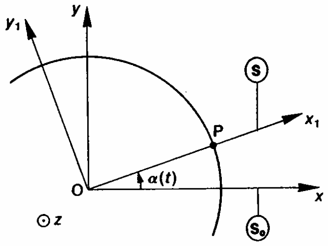


Fig. 11

Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à (S).
Posons $\alpha(t) = (x, \vec{x}_1)$.
Soit P un point du solide (S) tel que

$$\overrightarrow{OP} = a\vec{x}_1 \quad (a : \text{constante positive}).$$

QUESTION

Déterminer le vecteur accélération du point P par rapport au repère R : $\vec{\Gamma}(P/R)$.

RÉPONSE

En écrivant entre les points O et P la relation (4), on obtient :

$$\vec{\Gamma}(P/R) = \vec{\Gamma}(O/R) + \left[\frac{d}{dt}\vec{\Omega}(S/R)\right]_R \wedge \overrightarrow{OP} + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \left[\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{OP}\right].$$

Le point O étant fixe dans le repère R :

$$\vec{\Gamma}(O/R) = \vec{0}.$$

De plus :

$$\vec{\Omega}(S/R) = \alpha'\vec{z}$$

et

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{\Omega}(S/R)\right]_R = \alpha''\vec{z}.$$

Alors

$$\vec{\Gamma}(P/R) = \alpha''\vec{z} \wedge a\vec{x}_1 + \alpha'\vec{z} \wedge \left(\alpha'\vec{z} \wedge a\vec{x}_1\right).$$

En remarquant que $\vec{z} \wedge \vec{x}_1 = \vec{y}_1$, $\vec{\Gamma}(P/R)$ s'écrit :

$$\vec{\Gamma}(P/R) = a\alpha''\vec{y}_1 + \alpha'\vec{z} \wedge a\alpha'\vec{y}_1.$$

Soit, avec $\vec{z} \wedge \vec{y}_1 = -\vec{x}_1$:

$$\boxed{\vec{\Gamma}(P/R) = a\alpha''\vec{y}_1 - a\alpha'^2\vec{x}_1.}$$

A SAVOIR

1. Le torseur cinématique du mouvement du solide (S) par rapport au repère R s'écrit :

$$\{\mathcal{V}(S/R)\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A/R) \end{Bmatrix}$$

Le point A étant lié au solide S.

La vitesse d'un autre point B lié au solide (S) se calcule à partir de la vitesse du point A par la relation :

$$\vec{V}(B/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}.$$

Ce torseur cinématique possède un axe central appelé axe de viration du mouvement de (S) par rapport à R.

Un mouvement de translation se représente un couple et un mouvement de rotation représente par un torseur à résultante.

Le champ des vecteurs vitesse d'un solide équiprojectif, c'est-à-dire que :

$$\forall A \text{ et } B \in (S) : \quad \overrightarrow{AB} \cdot \vec{V}(A/R) = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{V}(B/R).$$

2. Entre les vecteurs accélération de 2 points et B du solide (S) existe la relation :

$$\vec{\Gamma}(B/R) = \vec{\Gamma}(A/R) + \left[\frac{d}{dt}\vec{\Omega}(S/R)\right]_R \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}(S/R) \wedge [\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{A}$$

Le champ des accélérations des points d'un sol n'est pas représentable par un torseur.

PROBLÈME RÉSOLU

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à un bâti (S_0) *(figure 12)*. Une tige (S), de longueur l, d'extrémité A et B, d'épaisseur négligeable, a une liaison linéique annulaire de centre A, d'axe $(O, \vec{x})$ avec (S_0) et une autre liaison linéique annulaire de centre B, d'axe $(O, \vec{y})$ avec (S_0). Soit $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à la tige (S) tel que $\overrightarrow{AB} = l\vec{y}_1$, on pose $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.

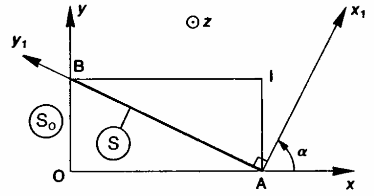


Fig. 12

QUESTION 1

Déterminer $\{\mathcal{V}(S/R\}$ au point A.

RÉPONSE

Ce torseur est constitué des deux vecteurs suivants :

$$\{\mathcal{V}(S/R)\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A/R) \end{Bmatrix}$$

avec

$$\vec{\Omega}(S/R) = \alpha'\vec{z}$$

et

$$\vec{V}(A/R) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\, l \sin\alpha\,\vec{x}\right]_R = l\alpha'\cos\alpha\,\vec{x}$$

donc

$$\boxed{\{\mathcal{V}(S/R)\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} \alpha'\vec{z} \\ l\alpha'\cos\alpha\,\vec{x} \end{Bmatrix}.}$$

QUESTION 2

Déterminer le moment central et l'axe central d ce torseur.

RÉPONSE

Les deux éléments de réduction du torseur so perpendiculaires, par conséquent ce torseur e à résultante et par suite son moment central e nul.

L'axe central Δ a même direction que résultante générale du torseur, soit $\vec{z}$.

Notons I l'intersection de Δ avec le pla $(O, \vec{x}, \vec{y})$.

Le moment central étant nul :

$$\boxed{\vec{V}(I \in S/R) = \vec{0}.}$$

Connaissant le torseur au point A, la position d point I est donnée par la relation (*paragraphe 1.2.1*

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\alpha'\vec{z} \wedge l\alpha'\cos\alpha\,\vec{x}}{(\alpha'\vec{z})^2}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AI} = l\cos\alpha\,\vec{y}.}$$

Ce point I est le quatrième sommet du rectang BOAI.

REMARQUE

> *Le point I est appelé centre instantané rotation du mouvement du plan $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ p rapport au plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$.*

QUESTION 3

Déterminer les axoïdes du mouvement de (S) par rapport à R.

RÉPONSE

Les axoïdes sont les surfaces engendrées par Δ dans (S) et dans R. Comme Δ a même direction que $\vec{z}$ les axoïdes sont des cylindres de génératrices parallèles à $\vec{z}$. Ces axoïdes seront donc déterminées par leur section droite avec les plans

$$(\mathrm{O}, \vec{x}, \vec{y}) \quad \text{et} \quad (\mathrm{A}, \vec{x}_1, \vec{y}_1).$$

Ce qui revient à chercher les lieux de I dans R et R_1.

– Lieu de I dans R (base du mouvement). Remarquons que $\mathrm{OI} = l$ *(figure 12)*, par suite le lieu de I dans R est le cercle de centre O de rayon l.

– Lieu de I dans R_1 (roulante du mouvement). Remarquons que l'angle $\widehat{\mathrm{AIB}}$ est droit, par suite le lieu de I dans R_1 est le cercle de diamètre AB.

QUESTION 4

Calculer $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{B/R})$ de deux façons :

***a*) en dérivant le vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$,**

***b*) à partir de $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{A/R})$.**

RÉPONSE

a) $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{B/R}) = \left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right]_{\mathrm{R}} = \left[\dfrac{d}{dt}\, l \cos \alpha \vec{y}\right]_{\mathrm{R}}$

$$\boxed{\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{B/R}) = -l\alpha' \sin \alpha\, \vec{y}.}$$

b) $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{B/R}) = \vec{\mathrm{V}}(\mathrm{A/R}) + \vec{\Omega}(\mathrm{S/R}) \wedge \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$$= l\alpha' \cos \alpha\, \vec{x} + \alpha' \vec{z} \wedge l\vec{y}_1$$

$$= l\alpha' \cos \alpha\, \vec{x} - l\alpha' \vec{x}_1$$

sachant que $\vec{x}_1 = \cos \alpha\, \vec{x} + \sin \alpha\, \vec{y}$

$$\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{B/R}) = l\alpha' \cos \alpha\, \vec{x} - l\alpha'(\cos \alpha\, \vec{x} + \sin \alpha\, \vec{y}),$$

soit $\boxed{\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{B/R}) = -l\alpha' \sin \alpha\, \vec{y}.}$

REMARQUE

> *La trajectoire du point* B *étant connue la première méthode de calcul est préférable.*

QUESTION 5

Calculer le vecteur vitesse du point O, supposé lié à (S) à l'instant considéré, par rapport au repère R : $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{O} \in \mathrm{S/R})$.

RÉPONSE

La méthode pour calculer $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{O} \in \mathrm{S/R})$ est de passer par l'intermédiaire d'un point qui appartient sans ambiguïté au solide (S), par exemple le point A. Autrement dit d'appliquer aux points O et A la relation entre les vecteurs vitesse de deux points d'un solide.

$$\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{O} \in \mathrm{S/R}) = \vec{\mathrm{V}}(\mathrm{A/R}) + \vec{\Omega}(\mathrm{S/R}) \wedge \overrightarrow{\mathrm{AO}}$$

$$= l\alpha' \cos \alpha\, \vec{x} + \alpha' \vec{z} \wedge l \sin \alpha\, \vec{x}$$

avec $\vec{z} \wedge \vec{x} = \vec{y}$, on obtient

$$\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{O} \in \mathrm{S/R}) = l\alpha' \cos \alpha\, \vec{x} - l\alpha' \sin \alpha\, \vec{y}$$

soit

$$\boxed{\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{O} \in \mathrm{S/R}) = l\alpha'(\cos \alpha\, \vec{x} - \sin \alpha\, \vec{y}).}$$

QUESTION 6

***a*) Calculer le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(\mathrm{A/R})$ en dérivant le vecteur vitesse $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{A/R})$.**

***b*) Calculer le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(\mathrm{B/R})$ en dérivant le vecteur vitesse $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{B/R})$.**

c*) Retrouver l'expression de $\vec{\Gamma}(\mathrm{B/R})$ à partir de $\vec{\Gamma}(\mathrm{A/R})$ en utilisant la relation 4 du *paragraphe 2.

RÉPONSE

a) $\vec{\Gamma}(\mathrm{A/R}) = \left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{A/R})\right]_{\mathrm{R}} = \left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, l\alpha' \cos \alpha\, \vec{x}\right]_{\mathrm{R}}$

$\vec{x}$ étant constant dans R:

$$\boxed{\vec{\Gamma}(\mathrm{A/R}) = l(\alpha'' \cos \alpha - \alpha'^2 \sin \alpha)\vec{x}.}$$

b) $\vec{\Gamma}(\mathrm{B/R}) = \left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{B/R})\right]_{\mathrm{R}}$

$$= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-l\alpha' \sin \alpha\, \vec{y})\right]_{\mathrm{R}}$$

$\vec{y}$ étant constant dans R :

$$\boxed{\vec{\Gamma}(\mathrm{B/R}) = -l(\alpha'' \sin \alpha + \alpha'^2 \cos \alpha)\vec{y}.}$$

c) Utilisons la relation (4) du *paragraphe 2* entre les points A et B :

$$\vec{\Gamma}(\mathrm{B/R}) = \vec{\Gamma}(\mathrm{A/R}) + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\Omega}(\mathrm{S/R})\right]_{\mathrm{R}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \vec{\Omega}(\mathrm{S/R}) \wedge [\vec{\Omega}(\mathrm{S/R}) \wedge \overrightarrow{\mathrm{AB}}]$$

soit en remplaçant :

$$\vec{\Gamma}(\mathrm{B/R}) = l(\alpha'' \cos \alpha - \alpha'^2 \sin \alpha)\vec{x} + \alpha'' \vec{z} \wedge l\vec{y}_1 + \alpha' \vec{z} \wedge (\alpha' \vec{z} \wedge l\vec{y}_1)$$

en effectuant les produits vectoriels :

$$\vec{\Gamma}(\mathrm{B/R}) = l(\alpha'' \cos \alpha - \alpha'^2 \sin \alpha)\vec{x} - l\alpha'' \vec{x}_1 - l\alpha'^2 \vec{y}_1$$

et en notant que :

$$\begin{cases} \vec{x}_1 = \cos \alpha\, \vec{x} + \sin \alpha\, \vec{y} \\ \vec{y}_1 = -\sin \alpha\, \vec{x} + \cos \alpha\, \vec{y} \end{cases}$$

on obtient :

$$\boxed{\vec{\Gamma}(\mathrm{B/R}) = -l(\alpha'' \sin \alpha + \alpha'^2 \cos \alpha)\vec{y}.}$$

QUESTION 7

Calculer le vecteur accélération du point O, supposé lié à (S) à l'instant considéré, par rapport au repère R : $\vec{\Gamma}(O \in S/R)$.

RÉPONSE

Comme pour calculer $\vec{V}(O \in S/R)$, on calcule $\vec{\Gamma}(O \in S/R)$ en passant par l'intermédiaire du vecteur accélération connu d'un autre point du solide (S), par exemple le point A.

$$\vec{\Gamma}(O \in S/R) = \vec{\Gamma}(A/R) + \left[\frac{d}{dt}\vec{\Omega}(S/R)\right]_R \wedge \overrightarrow{AO} + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \left[\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AO}\right]$$

soit en remplaçant

$$\vec{\Gamma}(O \in S/R) = l(\alpha'' \cos\alpha - \alpha'^2 \sin\alpha)\vec{x} + \alpha''\vec{z} \wedge -l \sin\alpha\vec{x} + \alpha'\vec{z} \wedge \left(\alpha'\vec{z} \wedge -l \sin\alpha\vec{x}\right)$$

en effectuant les produits vectoriels :

$$\vec{\Gamma}(O \in S/R) = l(\alpha'' \cos\alpha - \alpha'^2 \sin\alpha)\vec{x} - l\alpha'' \sin\alpha\vec{y} + l\alpha'^2 \sin\alpha\vec{x}$$

soit

$$\boxed{\vec{\Gamma}(O \in S/R) = l\alpha''(\cos\alpha\vec{x} - \sin\alpha\vec{y}).}$$

REMARQUE

— *Pour calculer* $\vec{V}(O \in S/R)$ *surtout ne pas dériver le vecteur position du point* O *dans le repère* R. *Cette opération n'a jamais été définie et de plus elle donne un résultat faux. En effet, le vecteur position du point* O *dans le repère* R *est le vecteur nul, et en appliquant les règles de dérivation habituelles, qui ignorent que le point* O *appartient au solide* (S) *à l'instant considéré, on trouverait un vecteur vitesse nul.*

— *Pour calculer* $\vec{\Gamma}(O \in S/R)$ *surtout ne pas dériver* $\vec{V}(O \in S/R)$, *pour les mêmes raisons que précédemment.*

CONSEILS POUR LA RÉSOLUTION

— La relation $\vec{V}(B/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}$ ne s'applique qu'entre deux points A et B liés au solide (S) à l'instant considéré.

— Soit P un point en mouvement par rapport au solide (S). Pour calculer, à un instant donné, $\vec{V}(P \in S/R)$ passer par l'intermédiaire d'un point appartenant effectivement au solide (S), par exemple A, pour écrire la relation :

$$\vec{V}(P \in S/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP}.$$

Surtout ne pas dériver le vecteur position du point P dans le repère R.

— Pour calculer $\vec{\Gamma}(P \in S/R)$ procéder de la même façon. Surtout ne pas dériver $\vec{V}(P \in S/R)$.

— Pour appliquer graphiquement le théorème de l'équiprojectivité du champ des vitesses d'un solide faire attention de bien porter les projections des vecteurs vitesse du même côté des points considérés.

De plus, ce théorème ne s'applique qu'entre deux points d'un solide.

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 — Le dispositif représenté *figure 13* est une partie du mécanisme de prise de passes automatiques d'une machine à fileter.

La rotation de la came ① autour de l'axe $(O, \vec{x})$ provoque la rotation autour de l'axe $(A, \vec{z})$ du levier ③ qui entraîne la biellette ④, donc la rotation autour de l'axe $(E, \vec{z})$ de la pièce ⑤. Par l'intermédiaire du cliquet ⑥, ⑤ engendre la rotation de la roue à rochet ⑦ et du pignon ⑧ autour de $(K, \vec{z})$.
L'engrenage ⑧ - ⑨ provoque la rotation de l'excentrique ⑩ autour de $(M, \vec{z})$ qui permet le déplacement d'une butée (non représentée sur la figure) en contact avec ⑩ au point N.
Le but de l'étude est de déterminer, dans la configuration proposée, le vecteur vitesse du point N de l'excentrique par rapport au bâti : $\vec{V}(N \in 10/0)$, connaissant le vecteur vitesse du point C de la came par rapport au bâti : $\vec{V}(C \in 1/0)$, représenté sur la figure. En supposant que le galet ② roule sans glisser sur la came ①, on admettra que :

$$\vec{V}(C \in 1/0) = \vec{V}(C \in 2/0).$$

QUESTIONS

1° Déterminer graphiquement le vecteur vitesse : $\vec{V}(H \in 7/0)$; sachant que

$$\|\vec{V}(C \in 1/0)\| = 1\,100 \text{ mm/s}.$$

2° Déterminer $\vec{\Omega}(7/0)$ et $\vec{\Omega}(10/0)$. Pour cela, on admettra que :

$$\vec{V}(H \in 7/0) = -50\vec{x} + 400\vec{y}.$$

3° En déduire la norme du vecteur vitesse $\vec{V}(N \in 10/0)$.

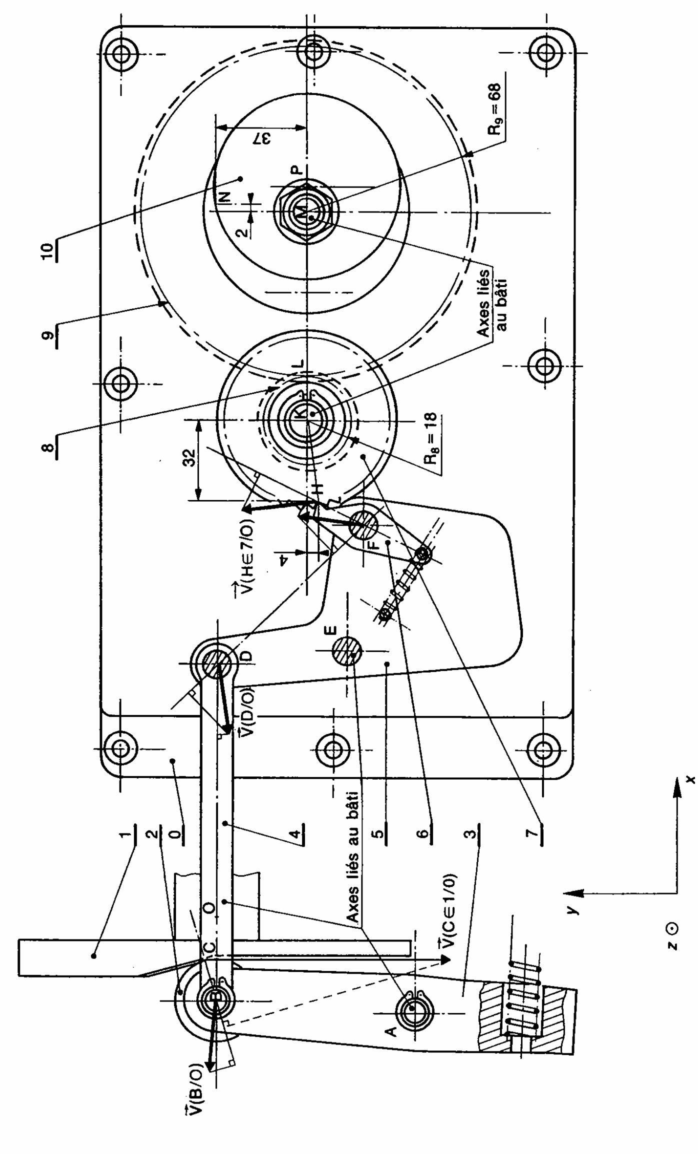

$R_9 = 68$
37
P
N
2
M
10
9
Axes liés au bâti
L
8
K
$R_8 = 18$
32
H
$\vec{V}(H \in 7/O)$
4
F
E
D
$\vec{V}(D/O)$
1
2
0
4
5
6
3
7
x
y
z
Axes liés au bâti
O
C
B
A
$\vec{V}(C \in 1/0)$
$\vec{V}(B/O)$

Fig. 13

RÉPONSES

1° En appliquant le théorème de l'équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse des points d'un solide successivement entre les points C et B de ③, B et D de ④, D et F de ⑤, F et H de ⑥ on détermine $\vec{V}(H \in 7/0)$. On trouve que

$$\|\vec{V}(H \in 7/0)\| \approx 400 \text{ mm/s}.$$

2° $\vec{\Omega}(7/0) = -12{,}5\vec{z}$ et $\vec{\Omega}(10/0) = 3{,}46\vec{z}$.

3° $\vec{V}(N \in 10/0) = -128{,}02\vec{x} + 6{,}92\vec{y}$

et $\|\vec{V}(N \in 10/0)\| = 128{,}21$ mm/s.

2 — Le dispositif représenté *figure 14* permet de centrer entre pointes des troncs d'arbres pour les dérouler en feuilles minces sur une machine analogue à un tour. Ces feuilles seront ensuite collées entre-elles pour obtenir du contre-plaqué multiplis.

Le vérin (V) articulé sur le bâti ⓪ en N et sur la pince ② en A, permet par l'intermédiaire des biellettes ④ et ⑤ d'entraîner en rotation par rapport au bâti les pinces ① autour de $(F, \vec{z})$, ② autour de $(D, \vec{z})$ et ③ autour de $(K, \vec{z})$.

Le but de l'étude est de déterminer les vecteurs vitesse par rapport au bâti des points des pièces ①, ② et ③ en contact avec le tronc d'arbre.

QUESTIONS

1° Connaissant le vecteur vitesse du point A par rapport au bâti : $\vec{V}(A/0)$, déterminer graphiquement le vecteur vitesse des points de contact R, T, S des pinces 1, 2 et 3 avec le tronc d'arbre : $\vec{V}(R \in 1/0)$, $\vec{V}(S \in 2/0)$ et $\vec{V}(T \in 3/0)$.

2° Expliquer pourquoi ces vecteurs vitesse sont de même norme.

RÉPONSES

1° Voir *figure 14.*

— D est le centre de rotation de la pince ② par rapport au bâti : $\vec{V}(S \in 2/0)$ est directement déterminé à partir de $\vec{V}(A/0)$.

— Après avoir déterminé $\vec{V}(C/0)$, appliquons le théorème de l'équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse des points d'un solide entre les points C et G de ④, pour tracer $\vec{V}(G/0)$. F est le centre de rotation de la pince ① par rapport au bâti; $\vec{V}(R \in 1/0)$ est directement déterminé à partir de $\vec{V}(G/0)$.

— Après avoir déterminé $\vec{V}(E/0)$, appliquons le théorème de l'équiprojectivité entre les points E et H de ⑤ pour tracer $\vec{V}(H/0)$. K est le centre de rotation de la pince ③ par rapport au bâti. $\vec{V}(T \in 3/0)$ est directement déterminé à partir de $\vec{V}(H/0)$.

2° Ces vecteurs vitesse sont de même norme car le parallélogrammes HEDK et CGFD sont identiques les points R et S sont disposés de la même façon p rapport à GF et ED, ainsi que les points S et T p rapport à CD et HK. Cette condition est nécessai pour éviter de mater le bois lors du serrage.

3 — La *figure 15* représente un pendule double const tué de deux tiges OA et AB.

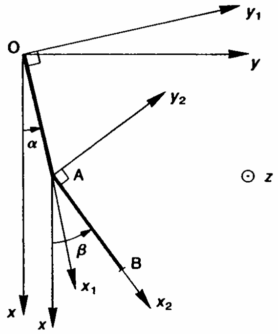


Fig. 15

La tige OA est en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$ avec l bâti. La tige AB est en liaison pivot d'axe $(A, \vec{z})$ ave la tige OA.

Soient trois repères : $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié au bât $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ lié à la tige OA et $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ li à la tige AB, tels que :

$$\overrightarrow{OA} = a\vec{x}_1 \quad (a > 0)$$
$$\overrightarrow{AB} = b\vec{x}_2 \quad (b > 0)$$
$$\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$$
$$\beta = (\vec{x}, \vec{x}_2).$$

QUESTIONS

Déterminer :

1° Le vecteur vitesse du point B par rapport au repèr R : $\vec{V}(B/R)$.

2° Le vecteur vitesse du point B par rapport au repèr R_1 : $\vec{V}(B/R_1)$.

3° Le vecteur vitesse du point B appartenant au repèr R_1 par rapport au repère R : $\vec{V}(B \in R_1/R)$.

4° Le vecteur accélération du point B par rapport a repère R : $\vec{\Gamma}(B/R)$.

5° Le vecteur accélération du point B par rapport a repère R_1 : $\vec{\Gamma}(B/R_1)$.

6° Le vecteur accélération du point B appartenant a repère R_1 par rapport au repère R :

$\vec{\Gamma}(B \in R_1/R)$.

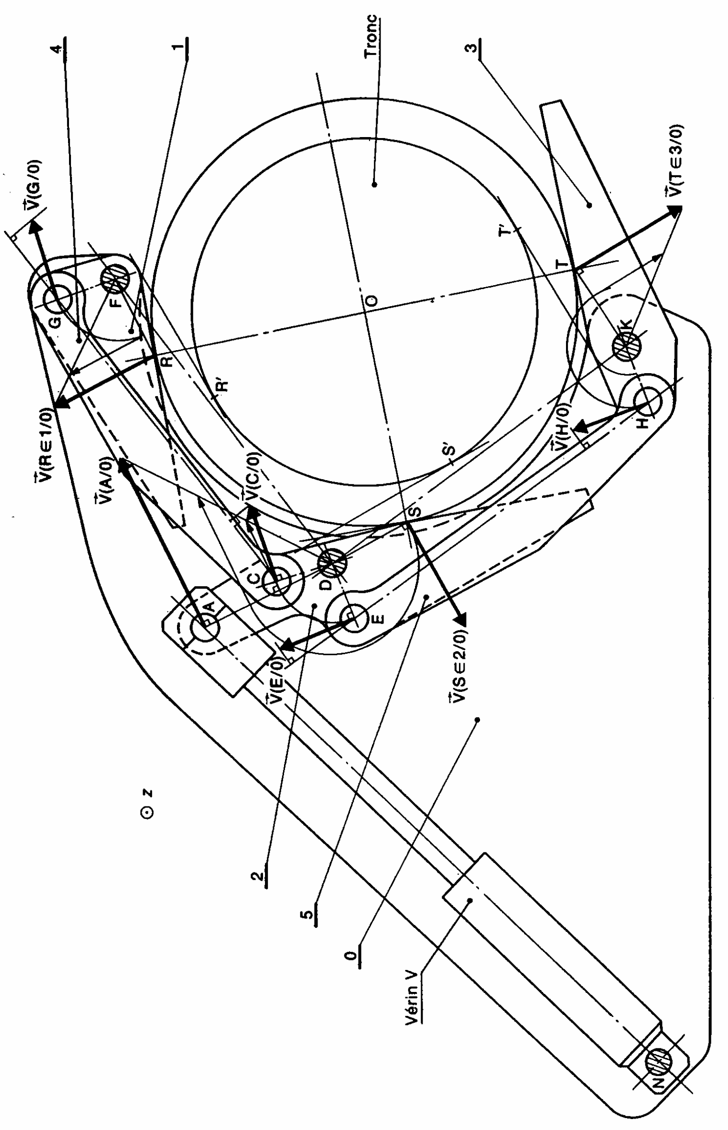

4
1
Tronc
3
$\vec{V}(G/0)$
$\vec{V}(T\in 3/0)$
T'
T
O
K
H
$\vec{V}(H/0)$
G
F
R
R'
S'
S
$\vec{V}(R\in 1/0)$
$\vec{V}(A/0)$
$\vec{V}(C/0)$
C
D
A
E
$\vec{V}(E/0)$
$\vec{V}(S\in 2/0)$
z
2
5
0
Vérin V
N

Fig. 14

RÉPONSES

1° $\vec{V}(B/R) = a\alpha'\vec{y}_1 + b\beta'\vec{y}_2$.

2° $\vec{V}(B/R_1) = b(\beta' - \alpha')\vec{y}_2$.

3° $\vec{V}(B \in R_1/R) = a\alpha'\vec{y}_1 + b\alpha'\vec{y}_2$.

4° $\vec{\Gamma}(B/R) = a\alpha''\vec{y}_1 - a\alpha'^2\vec{x}_1 + b\beta''\vec{y}_2 - b\beta'^2\vec{x}_2$.

5° $\vec{\Gamma}(B/R_1) = b(\beta'' - \alpha'')\vec{y}_2 - b(\beta' - \alpha')^2\vec{x}_2$.

6° $\vec{\Gamma}(B \in R_1/R) = a\alpha''\vec{y}_1 - a\alpha'^2\vec{x}_1 + b\alpha''\vec{y}_2 - b\alpha'^2\vec{x}_2$.

4 — Le manipulateur schématisé *figure 16* est constitué :

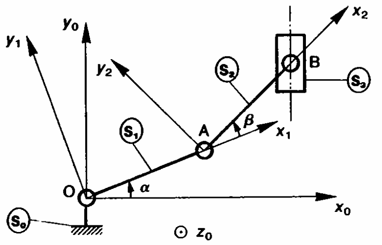


Fig. 16

— d'un bâti (S_0) auquel est lié le repère $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$,
— d'un bras (S_1) en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec le bâti. $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ est un repère lié à (S_1), on pose $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$,
— d'un bras (S_2) en liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_0)$ avec l bras (S_1). $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ est un repère lié à (S_2) te que $\overrightarrow{OA} = a\vec{x}_1$, on pose $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$,
— d'une tête (S_3) en liaison pivot d'axe $(B, \vec{z}_0)$ ave le bras (S_2) telle que $\overrightarrow{AB} = b\vec{x}_2$.
Le manipulateur est immobilisé dans la position $\alpha = 3$ et $\beta = 20°$. On donne $a = 300$ mm et $b = 400$ mm

QUESTION

De quelles valeurs doivent varier les angles α et β pou que le centre B de la tête se déplace de −3 mm suiva $\vec{x}_0$ et de +1 mm suivant $\vec{y}_0$?

RÉPONSES

$d\alpha = -0{,}65°$.

$d\beta = 1{,}52°$.

5 — Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti ⓪ d'u régulateur à boules schématisé comme l'indique *figure 17.*

Le corps ① a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$ avec (0
Soit $R_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à ①.

On pose : $\alpha(t) = (\vec{y}, \vec{y}_1)$.

Le levier ② a une liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_1)$ avec (1
Soit $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ un repère lié à ②. On pose $\overrightarrow{OA} = r\vec{y}_1$ $(r > 0)$ et $\beta(t) = (\vec{x}, \vec{x}_2)$.
Le levier ③ a une liaison pivot d'axe $(B, \vec{z}_1)$ avec (2
Soit $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_1)$ un repère lié à ③. On pose $\overrightarrow{AB} = l\vec{x}_2$ $(l > 0)$.
La pièce ④ a une liaison pivot glissant d'axe $(O, \vec{x}$

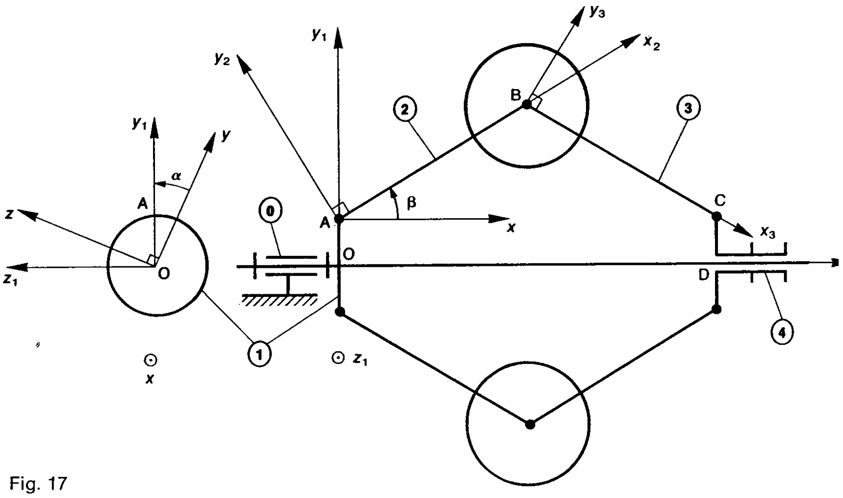


Fig. 17

avec ⓪. Soit $R_4(D, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à ④. Le point D est situé sur l'axe $(O, \vec{x})$. La pièce ④ a une liaison pivot d'axe $(C, \vec{z}_1)$ avec ③. On pose : $\overrightarrow{DC} = r\vec{y}_1$ et $\overrightarrow{BC} = l\vec{x}_3$.

QUESTIONS

Déterminer :

1° Les vecteurs rotation :

$\vec{\Omega}(1/0)$, $\vec{\Omega}(2/0)$, $\vec{\Omega}(3/0)$, $\vec{\Omega}(3/2)$.

2° Les vecteurs vitesse du point B :

$\vec{V}(B/1)$, $\vec{V}(B \in 1/0)$, $\vec{V}(B/0)$.

3° Les vecteurs vitesse du point C :

$\vec{V}(C/2)$, $\vec{V}(C \in 2/0)$, $\vec{V}(C/0)$.

4° Les vecteurs accélération du point B :

$\vec{\Gamma}(B/1)$, $\vec{\Gamma}(B \in 1/0)$, $\vec{\Gamma}(B/0)$.

RÉPONSES

1° $\vec{\Omega}(1/0) = \alpha'\vec{x}$

$\vec{\Omega}(2/0) = \alpha'\vec{x} + \beta'\vec{z}_1$

$\vec{\Omega}(3/0) = \alpha'\vec{x} - \beta'\vec{z}_1$

$\vec{\Omega}(3/2) = -2\beta'\vec{z}_1$.

2° $\vec{V}(B/1) = l\beta'\vec{y}_2$

$\vec{V}(B \in 1/0) = \alpha'(r + l \sin\beta)\vec{z}_1$

$\vec{V}(B/0) = l\beta'\vec{y}_2 + \alpha'(r + l \sin\beta)\vec{z}_1$.

3° $\vec{V}(C/2) = -2l\beta'\vec{y}_3$

$\vec{V}(C \in 2/0) = r\alpha'\vec{z}_1 + l\beta'(\vec{y}_2 + \vec{y}_3)$

$\vec{V}(C/0) = r\alpha'\vec{z}_1 - 2l\beta' \sin\beta\vec{x}$.

4° $\vec{\Gamma}(B/1) = l\beta''\vec{y}_2 - l\beta'^2\vec{x}_2$

$\vec{\Gamma}(B \in 1/0) = (r + l \sin\beta)(\alpha''\vec{z}_1 - \alpha'^2\vec{y}_1)$

$\vec{\Gamma}(B/0) = l\beta''\vec{y}_2 - l\beta'^2\vec{x}_2 + (r + l \sin\beta)(\alpha''\vec{z}_1 - \alpha'^2\vec{y}_1) + 2l\alpha'\beta' \cos\beta\vec{z}_1$.

EXERCICES SANS RÉPONSE

6 — Le mécanisme du releveur de fil d'une piqueuse plate est constitué comme l'indique la *figure 18*.

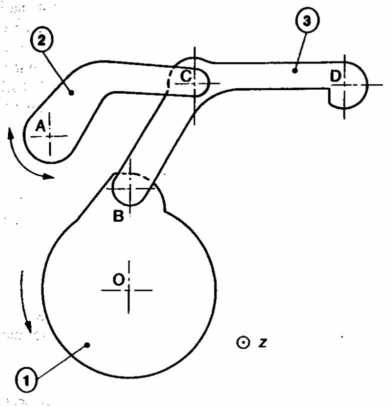


Fig. 18

Le plateau moteur ① et le levier du releveur de fil ② ont une liaison pivot, respectivement d'axe $(O, \vec{z})$ et $(A, \vec{z})$, avec le bâti ⓪ de la machine.
Le releveur de fil ③ est articulé avec ① et ② par l'intermédiaire de deux liaisons pivot, respectivement d'axe $(B, \vec{z})$ et $(C, \vec{z})$.
Le fil passe par le trou centré au point D.

QUESTION

Connaissant le vecteur vitesse du point B par rapport au bâti ⓪, déterminer graphiquement, dans la configuration proposée, le vecteur vitesse du point D par rapport au bâti ⓪.

7 — La *figure 19* représente une pompe à eau à trois bielles. Le mouvement est donné par un motoréducteur électrique tournant à 36 tr/min dans le sens trigonométrique.

Sur l'arbre moteur est fixé une roue dentée ① qui engrène avec un pignon ②. La manivelle ③ est solidaire du pignon ②. Les liaisons aux points D et E sont des liaisons rotule : E est un point fixe du bâti ⓪. En F les trois bielles ④, ⑤ et 7 sont articulées autour de l'axe 6 .
La bielle ⑦ entraîne le piston ⑧ qui se déplace dans le cylindre ⓪.

On donne : OA = 55 mm, AB = 33 mm, BC = 11 mm, CD = 50 mm, OE = 87 mm, DF = EF = FG = 100 mm, $\alpha = 35°$.

QUESTION

Déterminer graphiquement à l'instant de la configuration de la figure ($\alpha = 35°$), la vitesse de translation du piston ⑧ par rapport au bâti ⓪.

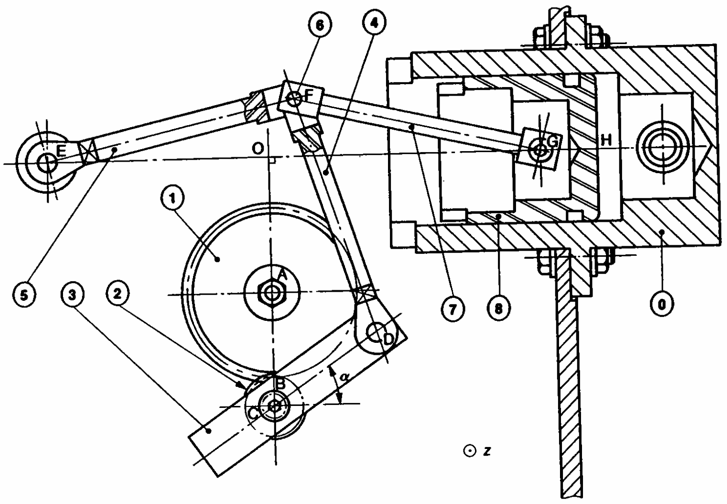


Fig. 19

8 — Soit R(O, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) un repère lié au bâti ⓪ d'une petite machine à cambrer une série de pièces *(figure 20)*.

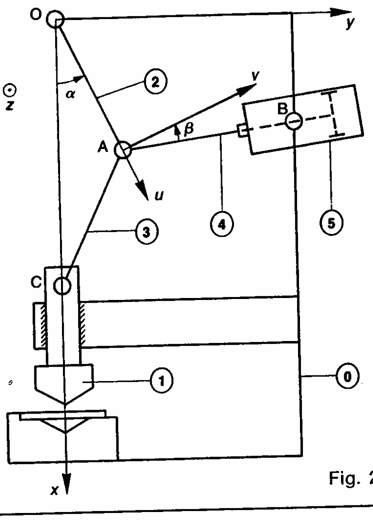


Fig. 20

Le poinçon ① a une liaison glissière d'axe (O, $\vec{x}$) av le bâti ⓪. Sa translation est assurée par un système genouillère constitué d'une biellette ② articulée en avec le bâti, et d'une biellette ③ articulée en C avec poinçon. La tige ④ d'un vérin pneumatique, dont corps ⑤ a une liaison pivot d'axe (B, $\vec{z}$) avec le bâ agit sur le point d'articulation A des deux biellettes (et ③.

Données géométriques :

$$OA = AC = l = 100 \text{ mm};$$

$$\overline{OB} = h\vec{x} + d\vec{y}, \quad \text{avec} \quad h = 90 \text{ mm}, \quad d = 150 \text{ mm}$$

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire tel que $\overline{OA} = l\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vect unitaire directement perpendiculaire à $\vec{u}$.

On pose : $\begin{cases} \alpha = (\vec{x}, \vec{u}) \\ \beta = (\overline{AB}, \vec{v}). \end{cases}$

Le système étant immobilisé dans la position $\alpha =$ la tige sort du corps du vérin d'une longueur $\lambda = 5$ n

QUESTIONS

1° Déterminer la relation entre λ et le petit déplacen du point A (on négligera les infiniments petits deuxième ordre).

2° Calculer cos β en fonction de h, d, l, et α. En déd la valeur numérique de la variation angulaire dα l'angle α.

3° Déterminer le petit déplacement du poinçon rapport au bâti.

4 composition des mouvements

Dans le calcul du vecteur vitesse ou du vecteur accélération d'un point d'un solide par rapport à un repère il est souvent plus facile de passer par l'intermédiaire d'autres repères. Le but de ce chapitre est donc d'établir les relations qui existent entre les différents mouvements de repères les uns par rapport aux autres.

1. COMPOSITION DES VECTEURS VITESSE

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à deux repères $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ eux-mêmes en mouvement l'un par rapport à l'autre. Soit P un point du solide (S). Cherchons la relation entre $\vec{V}(P/R_0)$ et $\vec{V}(P/R)$. Pour cela calculons $\vec{V}(P/R_0)$. Par définition :

$$\vec{V}(P/R_0)=\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_0P}\right]_{R_0}.$$

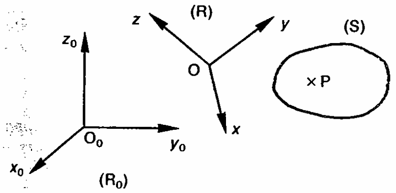


Fig. 1

En écrivant que $\overrightarrow{O_0P}=\overrightarrow{O_0O}+\overrightarrow{OP}$

$$\vec{V}(P/R_0)=\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_0O}\right]_{R_0}+\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_{R_0}.$$

En remarquant que : $\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_0O}\right]_{R_0}=\vec{V}(O/R_0)$ et en utilisant la relation de dérivation mise en évidence au *chapitre 2* (relation 6 *paragraphe 5.2)*

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_{R_0}=\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_{R}+\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\overrightarrow{OP}$$

$\vec{V}(P/R_0)$ s'écrit :

$$\vec{V}(P/R_0)=\vec{V}(O/R_0)+\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_{R}+\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\overrightarrow{OP}$$

soit en remarquant que $\vec{V}(P/R)=\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_{R}$:

$$\vec{V}(P/R_0)=\vec{V}(P/R)+\vec{V}(O/R_0)+\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\overrightarrow{OP}. \quad (1)$$

Si on suppose le point P lié à R, $\vec{V}(P/R)$ est nul et la relation précédente s'écrit :

$$\vec{V}(P\in R/R_0)=\vec{V}(O/R_0)+\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\overrightarrow{OP}$$

qui est la relation entre les vecteurs vitesse de deux points O et P d'un solide lié à R.
Alors la relation (1) ci-dessus peut s'écrire :

$$\boxed{\vec{V}(P/R_0)=\vec{V}(P/R)+\vec{V}(P\in R/R_0).} \quad (2)$$

Définitions

- **$\vec{V}(P/R_0)$ est appelé *vecteur vitesse absolue.***
- **$\vec{V}(P/R)$ est appelé *vecteur vitesse relative.***
- **$\vec{V}(P\in R/R_0)$ est appelé *vecteur vitesse d'entraînement.***

REMARQUE

Si le point P *n'appartient pas au solide* (S), *cette relation doit s'écrire :*

$$\boxed{\vec{V}(P\in S/R_0)=\vec{V}(P\in S/R)+\vec{V}(P\in R/R_0).} \quad (3)$$

Application

Considérons le mécanisme plan d'entraînement d'une pompe à main représenté *figure 2.*
Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié a un bâti (S_0).
Le levier (S_1) a une liaison pivot d'axe $(O_1, \vec{z})$ avec (S_0).
Soit $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à (S_1). L'axe $(O_1, \vec{y}_1)$ est dirigé suivant l'axe du levier.
La tige (S_2) a une liaison glissière d'axe $(O, \vec{x})$ avec (S_0) et le centre A d'un maneton lié à (S_2), situé sur $(O, \vec{x})$, décrit l'axe $(O_1, \vec{y}_1)$ lié à (S_1).

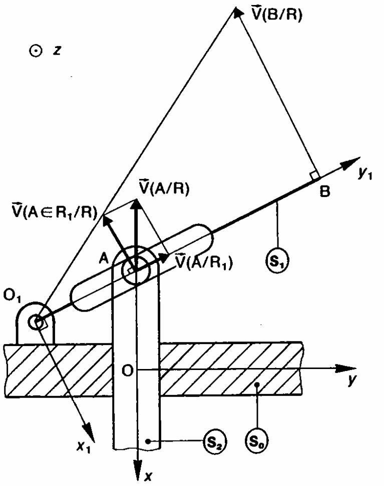


Fig. 2

QUESTION

Connaissant le vecteur vitesse de translation de la tige (S_2) par rapport au repère R, déterminer graphiquement le vecteur vitesse de l'extrémité B du levier (S_1) par rapport au repère R.

RÉPONSE

Appliquons au point A la relation (2) de composition des vecteurs vitesse entre les repères R et R_1 :

$$\vec{V}(A/R) = \vec{V}(A/R_1) + \vec{V}(A \in R_1/R).$$

$\vec{V}(A/R)$ est connu, il a même direction que le vecteur unitaire $\vec{x}$.
$\vec{V}(A/R_1)$ a pour direction O_1A.
$\vec{V}(A \in R_1/R)$ est le vecteur vitesse du point A, supposé lié à R_1, par rapport à R. La liaison entre (S_1) et (S_0) étant une liaison pivot d'axe $(O_1, \vec{z})$, tout point lié à (S_1) décrit dans R un arc de cercle d'axe $(O_1, \vec{z})$.
Le vecteur vitesse $\vec{V}(A \in R_1/R)$ est donc perpendiculaire au rayon O_1A de la trajectoire du point A, supposé lié à R_1.
D'où la construction de la *figure 2* pour déterminer $\vec{V}(A \in R_1/R)$.
Le vecteur vitesse du point B par rapport à R : $\vec{V}(B/R)$ se déduit du vecteur vitesse $\vec{V}(A \in R_1/R)$ en remarquant que dans un mouvement de rotation les normes des vecteurs vitesse sont proportionnelles à la distance des points considérés à l'axe de rotation. D'où la construction graphique de $\vec{V}(B/R)$ utilisée *figure 2.*

2. VECTEUR VITESSE DE GLISSEMENT EN UN POINT ENTRE DEUX SOLIDES

Considérons deux solides (S_1) et (S_2) en contact ponctuel au point P. Soit (Π) le plan tangent commun en P à (S_1) et (S_2).

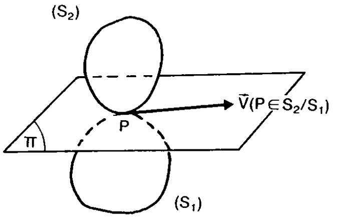


Fig. 3

Définition

Le vecteur vitesse de glissement au point P solide (S_2) par rapport au solide (S_1) est le vecte vitesse d'entraînement du point P dans le mou ment de (S_2) par rapport à (S_1), soit :

$$\boxed{\vec{V}(P \in S_2/S_1).}$$

Propriété

Le vecteur vitesse de glissement au point P du soli (S_2) par rapport au solide (S_1) est parallèle au pl tangent commun en P à (S_1) et (S_2).

Pour démontrer cette propriété appliquons en P relation (2) de composition des vecteurs vite entre (S_1) et (S_2).

$$\vec{V}(P/S_1) = \vec{V}(P/S_2) + \vec{V}(P \in S_2/S_1)$$

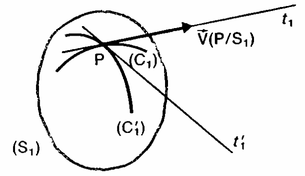
soit :

$$\vec{V}(P \in S_2/S_1) = \vec{V}(P/S_1) - \vec{V}(P/S_2).$$

REMARQUE

Lorsque deux solides (S_1) et (S_2) sont en cont en un point P il faut toujours distinguer en point, à un instant donné, trois points :
- *un premier point lié à (S_1),*
- *un deuxième point lié à (S_2),*
- *et le point géométrique de contact, n'app tenant ni à (S_1) ni à (S_2), qui au cours mouvement se déplace sur (S_1) et sur (S_2).*

Soit (C_1) la trajectoire du point P sur la surf extérieure de (S_1) *(figure 4).* $\vec{V}(P/S_1)$ a mê direction que la tangente Pt_1 à la courbe (C_1).



Fig

Or le plan tangent en P à (S_1) est défini par deux tangentes Pt_1 et Pt'_1 à deux courbes $(C_1$ (C'_1), de la surface extérieure de (S_1), concoura en P.

Par conséquent $\vec{V}(P/S_1)$ est parallèle à (Π). De même pour $\vec{V}(P/S_2)$.
Par suite $\vec{V}(P \in S_2/S_1)$ est parallèle au plan tangent commun en P à (S_1) et (S_2).

Définition

On dira que (S_2) *roule sans glisser* sur (S_1) si :

$$\boxed{\vec{V}(P \in S_2/S_1) = \vec{0}.}$$

Application

Considérons le mécanisme plan de commande d'une tige par un excentrique.

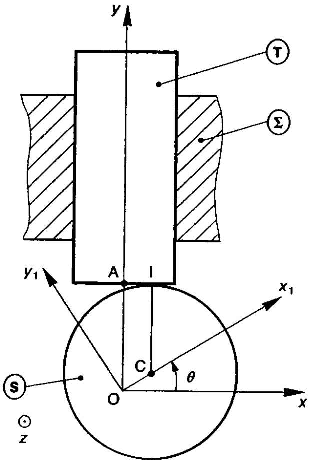


Fig. 5

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti (Σ).
L'excentrique (S) est assimilé à un disque de centre C, de rayon a. (S) a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$ avec (Σ). Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à (S) tel que :

$$\overrightarrow{OC} = e\vec{x}_1 \quad (e > 0).$$

On pose : $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.

La tige (T) a une liaison glissière d'axe $(O, \vec{y})$ avec (Σ). (S) et (T) sont en contact ponctuel en un point I de la section droite extrême de la tige.

QUESTION

Déterminer le vecteur vitesse de glissement au point I du mouvement de (S) par rapport à (T) : $\vec{V}(I \in S/T)$.

RÉPONSE

Les mouvements de (S) et (T) étant connus par rapport à (Σ), appliquons au point I la relation (3) de composition des vecteurs vitesse entre (S), (T) et (Σ) ou R.

$$\vec{V}(I \in S/T) = \vec{V}(I \in S/R) + \vec{V}(I \in R/T)$$

soit en remarquant que

$$\vec{V}(I \in R/T) = -\vec{V}(I \in T/R)$$

$$\vec{V}(I \in S/T) = \vec{V}(I \in S/R) - \vec{V}(I \in T/R).$$

Pour calculer $\vec{V}(I \in S/R)$ passons par l'intermédiaire du point O :

$$\vec{V}(I \in S/R) = \vec{V}(O/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{OI}$$

O étant l'origine du repère R : $\vec{V}(O/R) = \vec{0}$; d'autre part

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CI},$$

soit $\overrightarrow{OI} = e\vec{x}_1 + a\vec{y}$.

Par conséquent,

$$\vec{V}(I \in S/R) = \theta'\vec{z} \wedge (e\vec{x}_1 + a\vec{y}) = \theta'(e\vec{y}_1 - a\vec{x}).$$

La tige ayant un mouvement de translation rectiligne par rapport à (Σ), tous les points de la tige ont même vecteur vitesse, à un instant donné, par rapport à R.

Donc $\vec{V}(I \in T/R) = \vec{V}(A/R)$.

A : point de la section droite extrême de la tige situé sur l'axe $(O, \vec{y})$.

$$\begin{aligned}\vec{V}(A/R) &= \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}\right]_R \\ &= \left[\frac{d}{dt}(a + e\sin\theta)\vec{y}\right]_R \\ &= e\theta'\cos\theta\,\vec{y}.\end{aligned}$$

Par suite :

$$\vec{V}(I \in S/T) = \theta'(e\vec{y}_1 - a\vec{x}) - e\theta'\cos\theta\,\vec{y}.$$

En projetant sur $\vec{x}$ et $\vec{y}$ les vecteurs de la relation ci-dessus nous vérifions que le vecteur vitesse de glissement est bien parallèle au plan tangent commun en I à (S) et (T).

$$\boxed{\vec{V}(I \in S/T) = -\theta'(a + e\sin\theta)\vec{x}.}$$

3. COMPOSITION DES VECTEURS ROTATION

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à deux repères R et R_0. Cherchons la relation qui existe entre les trois vecteurs rotation $\vec{\Omega}(S/R_0)$, $\vec{\Omega}(S/R)$ et $\vec{\Omega}(R/R_0)$.

Pour cela appliquons la relation de changement de base de dérivation, mise en évidence au *chapitre 2 (relation 6, paragraphe 5.2),* à un vecteur $\vec{U}$ quelconque. Nous pouvons écrire successivement :

$$\left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_R + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{U}$$

$$\left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_S + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{U}.$$

En ajoutant membre à membre ces deux égalités, il vient :

$$\left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_S + [\vec{\Omega}(S/R) + \vec{\Omega}(R/R_0)] \wedge \vec{U}$$

d'autre part, nous pouvons écrire directement entre (S) et R_0 :

$$\left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_S + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \vec{U}.$$

En comparant ces deux expressions de $\left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{R_0}$ nous en déduisons la relation (4) de composition des vecteurs rotation :

$$\boxed{\vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R) + \vec{\Omega}(R/R_0).} \qquad (4)$$

Application

Considérons le schéma cinématique d'un train épicycloïdal à axes parallèles constitué de cinq éléments (*fig.* 6) :
- deux arbres (S_1) et (S_2) coaxiaux,
- un satellite (S),
- un porte-satellite (PS),
- un bâti (S_0).

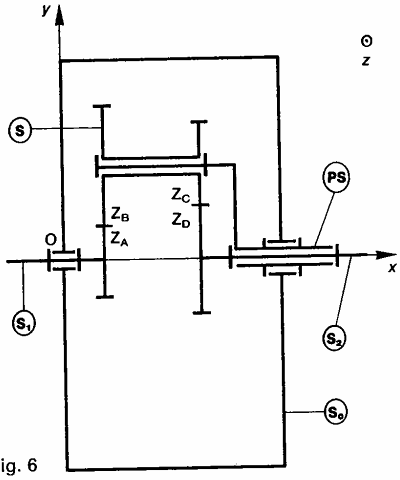


Fig. 6

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à (S_0). L'axe $(O, \vec{x})$ est parallèle à l'axe des roues.

Posons :
$$\begin{cases} \vec{\Omega}(S_1/R) = \omega_1\vec{x} \\ \vec{\Omega}(S_2/R) = \omega_2\vec{x} \\ \vec{\Omega}(PS/R) = \omega\vec{x}. \end{cases}$$

QUESTION

Déterminer la relation entre ω_1, ω_2 et ω (relation de Willis).

RÉPONSE

Remarquons que pour un observateur lié au porte-satellite (PS) les axes géométriques de toutes les roues sont immobiles.
Or nous savons calculer, pour un tel observateur, une fois fixé un sens de parcours de la chaîne cinématique du train d'engrenages, le rapport entre la vitesse de rotation de l'arbre de sortie et la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée.
Calculons $\vec{\Omega}(S_1/PS)$ et $\vec{\Omega}(S_2/PS)$ *(relation 4, paragraphe 3).*

$$\vec{\Omega}(S_1/PS) = \vec{\Omega}(S_1/R) - \vec{\Omega}(PS/R) = (\omega_1 - \omega)\vec{x}$$
$$\vec{\Omega}(S_2/PS) = \vec{\Omega}(S_2/R) - \vec{\Omega}(PS/R) = (\omega_2 - \omega)\vec{x}.$$

Pour un tel observateur le rapport entre la vitesse de rotation de l'arbre de sortie et la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée est égal à la raison K du train d'engrenages,

d'où
$$\boxed{\frac{\omega_2 - \omega}{\omega_1 - \omega} = K}$$

avec

$$\boxed{K = (-1)^n \frac{\left(\text{Produit des nombres de dents des roues menantes des engrenages}\right)}{\left(\text{Produit des nombres de dents des roues menées des engrenages}\right)}}$$

où n = nombre d'engrenages à contact extérieur.

Dans le cas présent, les nombres de dents des roues étant indiqués sur la figure, nous avons :

$$K = +\frac{Z_A Z_C}{Z_B Z_D}.$$

REMARQUES

— La relation de Willis aurait pu être obtenue en écrivant que les cylindres primitifs des différentes roues en contact roulent sans glisser l'un sur l'autre.
— La relation de Willis s'écrit aussi :

$$\boxed{\omega_2 - K\omega_1 + (K - 1)\omega = 0.}$$

Par conséquent, nous pouvons dire qu'un train épicycloïdal est un mécanisme qui réalise une fonction linéaire et homogène entre trois vitesses de rotation.

4. VECTEURS ROTATION DE ROULEMENT ET ROTATION DE PIVOTEMENT

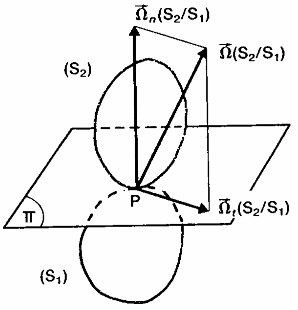


Fig. 7

Soit (S_1) et (S_2) deux solides en contact ponctu au point P. Notons (Π) le plan tangent commun P à (S_1) et (S_2).
Soit $\vec{\Omega}(S_2/S_1)$ le vecteur rotation du mouvement (S_2) par rapport à (S_1).

Posons $\vec{\Omega}(S_2/S_1) = \vec{\Omega}_n(S_2/S_1) + \vec{\Omega}_t(S_2/S_1)$, avec
$$\begin{cases} \vec{\Omega}_n(S_2/S_1) & \text{perpendiculaire au plan } (\Pi) \\ \vec{\Omega}_t(S_2/S_1) & \text{parallèle au plan } (\Pi). \end{cases}$$

Définitions

- **$\vec{\Omega}_n(S_2/S_1)$ est appelé *vecteur rotation de pivotement* du mouvement du solide S_2 par rapport au solide (S_1).**
- **$\vec{\Omega}_t(S_2/S_1)$ est appelé *vecteur rotation de roulement* du mouvement du solide (S_2) par rapport au solide (S_1).**

Application

Considérons un variateur à plateau, réglé dans une position donnée, dont le schéma cinématique est représenté *figure 8*.

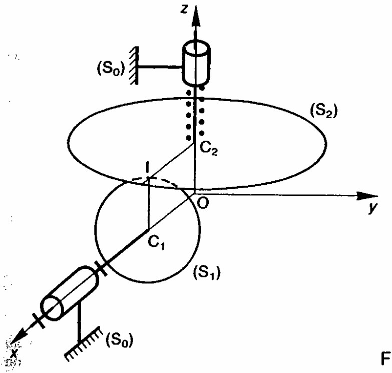


Fig. 8

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à un bâti (S_0). Un disque (S_1) de centre C_1, de rayon r_1, a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$ avec (S_0). Le centre C_1 est sur $(O, \vec{x})$ et le plan de (S_1) est perpendiculaire à $(O, \vec{x})$.
Un plateau circulaire (S_2) de centre C_2 a une liaison pivot glissant d'axe $(O, \vec{z})$ avec (S_0). Le centre C_2 est sur $(O, \vec{z})$ et le plan de (S_2) est perpendiculaire à $(O, \vec{z})$.
Le plateau circulaire (S_2) roule sans glisser sur le disque (S_1) en un point I tel que :

$$\overline{C_2I} = r_2\vec{x} \qquad (r_2 > 0).$$

On pose :

$$\begin{cases} \vec{\Omega}(S_1/R) = \alpha_1'\vec{x} \\ \vec{\Omega}(S_2/R) = \alpha_2'\vec{z}. \end{cases}$$

QUESTION 1

Déterminer la relation entre la vitesse angulaire α_2' du plateau (S_2) et la vitesse angulaire α_1' du disque (S_1).

RÉPONSE

(S_2) roule sans glisser sur (S_1), par conséquent :

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{0}.$$

En utilisant la relation (3) du *paragraphe 1*, de composition des vecteurs vitesse entre (S_2), (S_1) et R, on obtient :

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{V}(I \in S_2/R) - \vec{V}(I \in S_1/R)$$

$\vec{V}(I \in S_2/R)$ se calcule en appliquant la relation entre les vecteurs vitesse des deux points I et C_2 appartenant à (S_2).

$$\vec{V}(I \in S_2/R) = \vec{V}(C_2/R) + \vec{\Omega}(S_2/R) \wedge \overline{C_2I}$$

comme :

$$\vec{V}(C_2/R) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(I \in S_2/R) = \alpha_2'\vec{z} \wedge r_2\vec{x}$$

soit :

$$\vec{V}(I \in S_2/R) = r_2\alpha_2'\vec{y}.$$

De même, $\vec{V}(I \in S_1/R)$ se calcule en appliquant la relation entre les vecteurs vitesse des deux points I et C_1 appartenant à (S_1).

$$\vec{V}(I \in S_1/R) = \vec{V}(C_1/R) + \vec{\Omega}(S_1/R) \wedge \overline{C_1I}$$

avec :

$$\vec{V}(C_1/R) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(I \in S_1/R) = \alpha_1'\vec{x} \wedge r_1\vec{z}$$

soit :

$$\vec{V}(I \in S_1/R) = -r_1\alpha_1'\vec{y}.$$

Par suite :

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = (r_2\alpha_2' + r_1\alpha_1')\,\vec{y}.$$

La condition de non glissement se traduit donc par la relation scalaire :

$$\boxed{r_2\alpha_2' + r_1\alpha_1' = 0.}$$

QUESTION 2

Déterminer le vecteur rotation de roulement et le vecteur rotation de pivotement du mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) en fonction de α_1', r_1 et r_2.

RÉPONSE

En utilisant la relation (4) du *paragraphe 3* sur la composition des vecteurs rotation, le vecteur rotation du mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) peut s'écrire :

$$\vec{\Omega}(S_2/S_1) = \vec{\Omega}(S_2/R) - \vec{\Omega}(S_1/R) = \alpha_2'\vec{z} - \alpha_1'\vec{x}$$

avec la relation : $r_2\alpha_2' + r_1\alpha_1' = 0$

$$\vec{\Omega}(S_2/S_1) = -\frac{r_1}{r_2}\,\alpha_1'\vec{z} - \alpha_1'\vec{x}.$$

Le plan tangent en I entre (S_1) et (S_2) est le plan $(I, \vec{x}, \vec{y})$, et la normale à ce plan est définie par l'axe $(I, \vec{z})$.
Le vecteur rotation de roulement étant parallèle au plan $(I, \vec{x}, \vec{y})$, est donc le vecteur :

$$\boxed{\vec{\Omega}_t(S_2/S_1) = -\alpha_1'\vec{x}.} \qquad (5)$$

Le vecteur rotation de pivotement ayant même direction que la normale $(I, \vec{z})$, est le vecteur :

$$\boxed{\vec{\Omega}_n(S_2/S_1) = -\frac{r_1}{r_2}\,\alpha_1'\vec{z}.} \qquad (6)$$

5. COMPOSITION DES TORSEURS CINÉMATIQUES

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à deux repères R et R_0 eux-mêmes en mouvement l'un par rapport à l'autre.
Soit un point P du solide (S). Nous avons établi que :

$$\begin{cases} \vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R) + \vec{\Omega}(R/R_0) \\ \vec{V}(P \in S/R_0) = \vec{V}(P \in S/R) + \vec{V}(P \in R/R_0). \end{cases}$$

Ces deux égalités traduisent l'égalité des torseurs suivants :

$${}_P\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(P \in S/R_0) \end{Bmatrix} = {}_P\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(P \in S/R) \end{Bmatrix} + {}_P\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(R/R_0) \\ \vec{V}(P \in R/R_0) \end{Bmatrix}.$$

D'où la relation de composition des torseurs cinématiques :

$$\boxed{\{\mathcal{V}(S/R_0)\}=\{\mathcal{V}(S/R)\}+\{\mathcal{V}(R/R_0)\}.} \quad (7)$$

Application

Engrenage gauche *(figure 9)*.

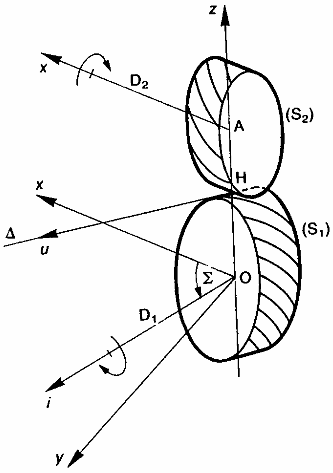


Fig. 9

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à un bâti (S_0). (S_1) et (S_2) sont deux roues constituant un engrenage.
La roue (S_1) a une liaison pivot d'axe $D_1(O, \vec{i})$ avec (S_0) telle que $\vec{i}\cdot\vec{z}=0$.

On pose : $\Sigma=(\vec{x}, \vec{i})$.

La roue (S_2) a une liaison pivot d'axe $D_2(A, \vec{x})$ avec (S_0) telle que :

$$\overrightarrow{OA}=a\vec{z} \quad (a \geqslant 0).$$

(La droite OA est la perpendiculaire commune des deux axes des roues (S_1) et (S_2).)
Les vitesses angulaires de rotation de (S_1) et (S_2) autour de leur axe sont définies par :

$$\begin{cases}\vec{\Omega}(S_1/R)=\omega_1\vec{i}\\ \vec{\Omega}(S_2/R)=\omega_2\vec{x}.\end{cases}$$

Soit $K=\dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ la raison de l'engrenage. (K est une constante.)

QUESTION 1

Déterminer au point O le torseur cinématique du mouvement de (S_2) par rapport à (S_1).

RÉPONSE

Les mouvements de (S_1) et (S_2) étant définis par rapport au repère R, appliquons la relation (7) du *paragraphe 5* de composition des torseurs cinématiques entre (S_1), (S_2) et R :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}=\{\mathcal{V}(S_2/R)\}+\{\mathcal{V}(R/S_1)\}$$

soit

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}=\{\mathcal{V}(S_2/R)\}-\{\mathcal{V}(S_1/R)\}.$$

Le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_2/R)\}$ a pour éléments de réduction au point A :

$$\{\mathcal{V}(S_2/R)\}={}_A\!\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}(S_2/R)\\ \vec{V}(A/R)\end{Bmatrix}$$

comme : $\vec{\Omega}(S_2/R)=\omega_2\vec{x}$
$\vec{V}(A/R)=\vec{0}$

$$\{\mathcal{V}(S_2/R)\}={}_A\!\begin{Bmatrix}\omega_2\vec{x}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}.$$

Ce torseur s'écrit au point O :

$$\{\mathcal{V}(S_2/R)\}={}_O\!\begin{Bmatrix}\omega_2\vec{x}\\ \omega_2\vec{x}\wedge\overrightarrow{AO}\end{Bmatrix}$$

soit, avec $\overrightarrow{AO}=-a\vec{z}$:

$$\{\mathcal{V}(S_2/R)\}={}_O\!\begin{Bmatrix}\omega_2\vec{x}\\ a\omega_2\vec{y}\end{Bmatrix}. \quad (8)$$

Le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_1/R)\}$ s'écrit au point O :

$$\{\mathcal{V}(S_1/R)\}={}_O\!\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}(S_1/R)\\ \vec{V}(O/R)\end{Bmatrix}$$

comme : $\vec{\Omega}(S_1/R)=\omega_1\vec{i}$
$\vec{V}(O/R)=\vec{0}$

$$\{\mathcal{V}(S_1/R)\}={}_O\!\begin{Bmatrix}\omega_1\vec{i}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$$

Par suite :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}={}_A\!\begin{Bmatrix}\omega_2\vec{x}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}-{}_O\!\begin{Bmatrix}\omega_1\vec{i}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}.$$

Pour soustraire ces deux torseurs exprimons-les au même point O. Compte tenu de la relation (8), on obtient :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}={}_O\!\begin{Bmatrix}\omega_2\vec{x}\\ a\omega_2\vec{y}\end{Bmatrix}-{}_O\!\begin{Bmatrix}\omega_1\vec{i}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$$

d'où

$$\boxed{\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}={}_O\!\begin{Bmatrix}\omega_2\vec{x}-\omega_1\vec{i}\\ a\omega_2\vec{y}\end{Bmatrix}.}$$

QUESTION 2

Déterminer l'axe central Δ du torseur cinématique du mouvement de (S_2) par rapport à (S_1).

RÉPONSE

L'axe central Δ du torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$ a même direction que la résultante générale $\omega_2\vec{x}-\omega_1\vec{i}$ de ce torseur *(voir chapitre 3 paragraphe 1.2.1)*.
Pour faciliter les calculs et l'interprétation des résultats, posons :

$$\vec{U}=K\vec{x}-\vec{i} \qquad \text{et} \qquad \vec{u}=\frac{\vec{U}}{\|\vec{U}\|}.$$

Les vecteurs unitaires $\vec{x}$ et $\vec{i}$ étant fixes dans la base de R, le vecteur $\vec{U}$ et le vecteur unitaire $\vec{u}$ le sont également.
Pour faire intervenir $\vec{U}$ dans l'expression de $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$, écrivons que :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}={}_O\!\begin{Bmatrix}\omega_1\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\vec{x}-\vec{i}\right)\\ \omega_1 a\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\vec{y}\end{Bmatrix}$$

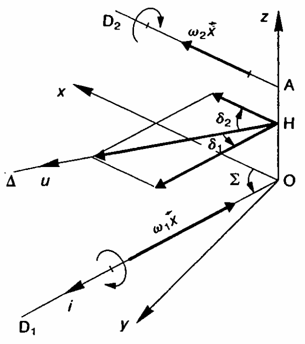


Fig. 10

alors : $$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = {}_O\begin{Bmatrix} \omega_1\vec{U} \\ aK\omega_1\vec{y} \end{Bmatrix}.$$

On constate donc que le vecteur $\vec{U}$ a même direction que l'axe central Δ et que $\vec{u}$ est un vecteur unitaire de Δ.
Définissons les angles entre Δ et les axes des roues en posant *(figures 10 et 11) :*

$$\begin{cases} \delta_1 = (\vec{u}, \vec{i}\,) \\ \delta_2 = (\vec{u}, \vec{x}\,) \end{cases}$$

(les angles δ_1 et δ_2 sont constants).

Par suite, l'angle Σ s'exprime en fonction de δ_1 et δ_2 :

$$\Sigma = (\vec{x}, \vec{i}\,)$$

soit $$\Sigma = (\vec{x}, \vec{u}\,) + (\vec{u}, \vec{i}\,)$$

d'où $$\boxed{\Sigma = \delta_1 - \delta_2.}$$

La direction de Δ étant connue, reste à déterminer la position d'un de ses points dans le repère R.
Le pied H de la perpendiculaire abaissée de O sur Δ est donné par la relation (2) du *chapitre 3 paragraphe 1.2.1.*

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\omega_1\vec{U} \wedge aK\omega_1\vec{y}}{\omega_1^2\vec{U}^2}$$

soit $$\overrightarrow{OH} = aK\,\frac{\vec{U} \wedge \vec{y}}{\vec{U}^2}.$$

Le vecteur $\vec{U}$ a même direction que le vecteur unitaire $\vec{u}$, par conséquent on peut écrire :

$$\vec{U} = (\vec{U} \cdot \vec{u}\,)\vec{u}$$

or $$\vec{U} = K\vec{x} - \vec{i}$$

et $$\begin{cases} \vec{x} \cdot \vec{u} = \cos\delta_2 \\ \vec{i} \cdot \vec{u} = \cos\delta_1 \end{cases}$$

alors : $$\vec{U} = (K\cos\delta_2 - \cos\delta_1)\,\vec{u}.$$

Par suite
$$\overrightarrow{OH} = \frac{aK}{K\cos\delta_2 - \cos\delta_1}\,\vec{u} \wedge \vec{y}$$

soit $$\overrightarrow{OH} = \frac{aK\cos\delta_2}{K\cos\delta_2 - \cos\delta_1}\,\vec{z}.$$

Le point H est un point fixe de l'axe $(O, \vec{z}\,)$.

Posons : $$\begin{cases} r_1 = \overline{OH} \\ r_2 = \overline{AH}. \end{cases}$$

Dans l'engrenage gauche $|r_1|$ et $|r_2|$ sont les rayons des cylindres primitifs des roues (S_1) et (S_2) :

si l'engrenage est à contact extérieur : $r_1 \cdot r_2 \leqslant 0$,
si l'engrenage est à contact intérieur : $r_1 \cdot r_2 \geqslant 0$.

La relation entre r_1, r_2 et l'entraxe a des roues s'obtient en écrivant que :

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{AH}$$

soit $$r_1 = a + r_2$$
d'où la relation :

$$\boxed{r_1 - r_2 = a.}$$

Par suite, on peut exprimer r_1 et r_2 en fonction de a, K, δ_1 et δ_2 :

$$\boxed{r_1 = \frac{aK\cos\delta_2}{K\cos\delta_2 - \cos\delta_1}} \qquad (8)$$

et $$\boxed{r_2 = \frac{a\cos\delta_1}{K\cos\delta_2 - \cos\delta_1}.} \qquad (9)$$

REMARQUES

— *Le rapport, membre à membre, des expressions de* r_1 *et* r_2 *obtenues en* (8) *et* (9) *donne la raison* K *de l'engrenage en fonction de* r_1, r_2, δ_1 *et* δ_2 *:*

$$\boxed{K = \frac{r_1\cos\delta_1}{r_2\cos\delta_2}.} \qquad (10)$$

(*Si* $r_2 \neq 0$ *et si* $\cos\delta_2 \neq 0$.)

— *Soit* $\vec{v}$ *le vecteur unitaire tel que* $\vec{v} = \vec{z} \wedge \vec{u}$ *(figure 11).*

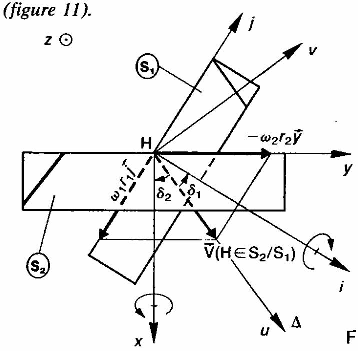


Fig. 11

$\vec{v}$ *est perpendiculaire à* $\vec{u}$, *alors :* $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

soit $$(K\vec{x} - \vec{i}\,) \cdot \vec{v} = 0$$

en remarquant que

$$\begin{cases} \vec{x} \cdot \vec{v} = \sin\delta_2 \ (\delta_2 < 0 \textit{ sur la figure}) \\ \vec{i} \cdot \vec{v} = \sin\delta_1 \end{cases}$$

l'expression précédente s'écrit :

$$K\sin\delta_2 - \sin\delta_1 = 0$$

d'où $$\boxed{K = \frac{\sin\delta_1}{\sin\delta_2}} \qquad (11)$$

(*si* $\sin\delta_2 \neq 0$).

QUESTION 3

Déterminer le moment central du torseur cinématique du mouvement de (S_2) par rapport à (S_1).

RÉPONSE

Le moment central du torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$ est le moment résultant de ce torseur en un point de son axe central *(chapitre 3 paragraphe 1.2.1).*
Au point H de Δ le moment central est le vecteur vitesse du point H lié à (S_2) par rapport à (S_1), soit : $\vec{V}(H\in S_2/S_1)$.
Ce vecteur vitesse se calcule à partir du vecteur vitesse connu $\vec{V}(O\in S_2/S_1)$ par la relation :

$$\vec{V}(H\in S_2/S_1)=\vec{V}(O\in S_2/S_1)+\vec{\Omega}(S_2/S_1)\wedge\overrightarrow{OH}.$$

$\vec{\Omega}(S_2/S_1)$ et $\vec{V}(O\in S_2/S_1)$ sont les deux éléments de réduction, au point O, du torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$ déterminé à la première question, alors :

$$\vec{V}(H\in S_2/S_1)=a\mathrm{K}\omega_1\vec{y}+\omega_1\vec{U}\wedge r_1\vec{z}.$$

Ce moment central a même direction que l'axe central Δ, c'est-à-dire que $\vec{u}$. Or le vecteur $\omega_1\vec{U}\wedge r_1\vec{z}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$. Par conséquent :

$$\vec{V}(H\in S_2/S_1)=a\mathrm{K}\omega_1(\vec{y}\cdot\vec{u})\vec{u}$$

comme $\vec{y}\cdot\vec{u}=-\sin\delta_2$ $(\delta_2<0$ sur la figure)

$$\boxed{\vec{V}(H\in S_2/S_1)=-a\mathrm{K}\omega_1\sin\delta_2\,\vec{u}.}\qquad(12)$$

Ce vecteur représente la vitesse de glissement entre les cylindres primitifs en leur point de contact H.

REMARQUES

1. *On démontre, pour qu'un engrenage puisse fonctionner correctement, que le plan tangent aux profils conjugués en leur point de contact doit être parallèle à Δ. Donc Δ définit l'inclinaison des dentures par rapport aux axes des roues.*
$|\delta_1|$ *et* $|\delta_2|$ *sont les* inclinaisons primitives *des dentures des roues* (S_1) *et* (S_2).

2. *Les surfaces conjuguées en contact étant voisines de Δ, la vitesse de glissement entre les profils en contact à une norme voisine de celle de* $\vec{V}(H\in S_2/S_1)$.
Par suite dans le cas du taillage d'une roue par fraise mère $\|\vec{V}(H\in S_2/S_1)\|$ *représente la* vitesse de coupe.

3. *Le vecteur* $\vec{V}(H\in S_2/S_1)$ *peut se mettre en place géométriquement sur la figure 11 en remarquant que :*

$$\vec{V}(H\in S_2/S_1)=\vec{V}(H\in S_2/R)-\vec{V}(H\in S_1/R).$$

Le vecteur $\vec{V}(H\in S_2/R)$ *se détermine à partir du vecteur vitesse du point* A *de l'axe de la roue* (S_2) *par la relation :*

$$\vec{V}(H\in S_2/R)=\vec{V}(A/R)+\vec{\Omega}(S_2/R)\wedge\overrightarrow{AH}$$

comme $\vec{V}(A/R)=\vec{0}$

$$\vec{V}(H\in S_2/R)=\omega_2\vec{x}\wedge r_2\vec{z}$$

soit

$$\vec{V}(H\in S_2/R)=-\omega_2r_2\vec{y}.$$

Le vecteur $\vec{V}(H\in S_1/R)$ *se détermine à partir du vecteur vitesse du point* O *de l'axe de la roue* (S_1) *par la relation :*

$$\vec{V}(H\in S_1/R)=\vec{V}(O/R)+\vec{\Omega}(S_1/R)\wedge\overrightarrow{OH}$$

comme $\vec{V}(O/R)=\vec{0}$

$$\vec{V}(H\in S_1/R)=\omega_1\vec{i}\wedge r_1\vec{z}$$

soit

$$\vec{V}(H\in S_1/R)=-\omega_1r_1\vec{j}.$$

($\vec{j}$ est le troisième vecteur unitaire de la ba orthonormée directe $(\vec{z},\vec{i},\vec{j})$).
Par suite

$$\boxed{\vec{V}(H\in S_2/S_1)=-\omega_2r_2\vec{y}+\omega_1r_1\vec{j}.}$$

QUESTION 4

Pour le cas particulier d'un engrenage à axes parallèl déterminer l'axe central Δ, la raison K en fonction r_1 et r_2, et la vitesse de glissement $\vec{V}(H\in S_2/S_1)$ ent les surfaces primitives de l'engrenage.

RÉPONSE

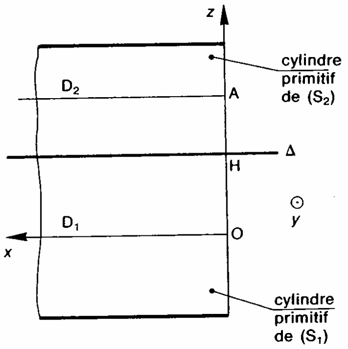


Fig. 12

Dans ce cas $\Sigma=0$ et $a\neq0$, par suite δ_1 et δ_2 *sont* *et l'axe central Δ est parallèle aux axes des roues.*
Les surfaces primitives de l'engrenage sont les surfa réglées engendrées par Δ dans (S_1) *et* (S_2) *au co du mouvement.*
Dans ce cas les surfaces primitives sont des cylin de révolution d'axe D_1 *et* D_2, *en contact suivant*
La raison K *est obtenue par la relation* (10) :

$$\boxed{\mathrm{K}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{\omega_2}{\omega_1}.}$$

La relation (12) indique que :

$$\boxed{\vec{V}(H\in S_2/S_1)=\vec{0}.}$$

Ce qui montre que les cylindres primitifs roulent glisser l'un sur l'autre.

QUESTION 5

Pour le cas particulier d'un engrenage à concourants, déterminer l'axe central Δ, la raison fonction de δ_1 et δ_2, et la vitesse de glisse $\vec{V}(H\in S_2/S_1)$ entre les surfaces primitives de l'engren

RÉPONSE

Dans ce cas $\Sigma \neq 0$ et $a=0$, les relations (8) et (9) indiquent que r_1 et r_2 sont nuls, par suite Δ passe par O.

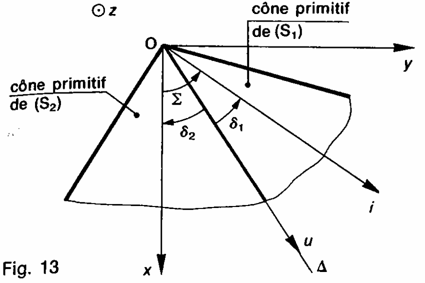


Fig. 13

Les surfaces primitives de l'engrenage sont des cônes de révolution de sommet O, d'axe D_1 et D_2 et de demi-angle au sommet $|\delta_1|$ et $|\delta_2|$, en contact suivant Δ. La raison K est obtenue par la relation (11)

$$\boxed{K=\frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2}.}$$

La relation (12) indique que :

$$\boxed{\vec{V}(H \in S_2/S_1)=\vec{0}.}$$

Ce qui montre que les cônes primitifs roulent sans glisser l'un sur l'autre.

REMARQUE

Dans le cas d'un engrenage gauche les surfaces primitives ne sont pas, en général, les surfaces réglées engendrées par Δ dans (S_1) *et* (S_2) *mais des cylindres de révolution d'axe* D_1 *et* D_2 *comme cela a été mentionné à la deuxième question, car cela conduirait à des profils conjugués difficiles à fabriquer.*

6. COMPOSITION DES VECTEURS ACCÉLÉRATION

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à deux repères

$$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \quad \text{et} \quad R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$$

eux-mêmes en mouvement l'un par rapport à l'autre. Soit P un point du solide (S). Cherchons la relation entre les vecteurs accélération du point P par rapport au repère R_0; $\vec{\Gamma}(P/R_0)$ et par rapport au repère R; $\vec{\Gamma}(P/R)$.

Dans le *paragraphe 1* nous avons établi la relation (1) suivante entre les vecteurs vitesse de P par rapport à R_0 et à R :

$$\vec{V}(P/R_0)=\vec{V}(P/R)+\vec{V}(O/R_0)+\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\overrightarrow{OP}.$$

Dérivons les deux membres de cette égalité par rapport à la date t, pour un observateur lié au repère R_0.

$$\underbrace{\left[\frac{d}{dt}\vec{V}(P/R_0)\right]_{R_0}}_{(V)}=\underbrace{\left[\frac{d}{dt}\vec{V}(P/R)\right]_{R_0}}_{(I)}+\underbrace{\left[\frac{d}{dt}\vec{V}(O/R_0)\right]_{R_0}}_{(II)}$$
$$+\underbrace{\left[\frac{d}{dt}\vec{\Omega}(R/R_0)\right]_{R_0}\wedge\overrightarrow{OP}}_{(III)}+\underbrace{\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_{R_0}}_{(IV)}.$$

Calculons successivement chaque terme :

(I) s'écrit :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{V}(P/R)\right]_{R_0}=\left[\frac{d}{dt}\vec{V}(P/R)\right]_{R}+\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\vec{V}(P/R)$$

soit

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{V}(P/R)\right]_{R_0}=\vec{\Gamma}(P/R)+\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\vec{V}(P/R)$$

(II) s'écrit :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{V}(O/R_0)\right]_{R_0}=\vec{\Gamma}(O/R_0)$$

(III) reste inchangé.

(IV) s'écrit :

$$\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_{R_0}$$
$$=\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\left[\left[\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right]_R+\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\overrightarrow{OP}\right]$$

avec $\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_R=\vec{V}(P/R)$

$$\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_{R_0}=\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\vec{V}(P/R)$$
$$+\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\left[\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\overrightarrow{OP}\right].$$

Sachant que (V) est égal à $\vec{\Gamma}(P/R_0)$ on obtient la relation suivante :

$$\vec{\Gamma}(P/R_0)=\vec{\Gamma}(P/R)+\vec{\Gamma}(O/R_0)+\left[\frac{d}{dt}\vec{\Omega}(R/R_0)\right]_{R_0}\wedge\overrightarrow{OP}$$
$$+\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\left[\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\overrightarrow{OP}\right]+2\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\vec{V}(P/R).$$

Si on suppose le point P lié à R, la relation précédente s'écrit :

$$\vec{\Gamma}(P\in R/R_0)=\vec{\Gamma}(O/R_0)+\left[\frac{d}{dt}\vec{\Omega}(R/R_0)\right]_{R_0}\wedge\overrightarrow{OP}$$
$$+\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\left[\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\overrightarrow{OP}\right]$$

qui est la relation entre les vecteurs accélération de deux points O et P d'un solide lié à R.

Alors :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\Gamma}(P/R_0)=\vec{\Gamma}(P/R)+\vec{\Gamma}(P\in R/R_0)&\\+2\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\vec{V}(P/R).&\quad(13)\end{aligned}}$$

Définitions

- **$\vec{\Gamma}(P/R_0)$ est appelé *vecteur accélération absolue.***
- **$\vec{\Gamma}(P/R)$ est appelé *vecteur accélération relative.***
- **$\vec{\Gamma}(P\in R/R_0)$ est appelé *vecteur accélération d'entraînement.***
- **$2\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\vec{V}(P/R)$ est appelé *vecteur accélération de Coriolis.***

Application

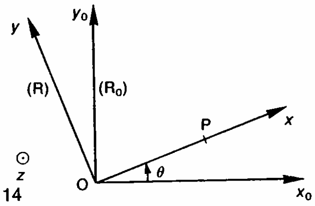


Fig. 14

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}\,)$ un repère lié à un bâti (S_0). Un solide (S) a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}\,)$ avec (S_0). Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\,)$ un repère lié à (S). On pose : $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}\,)$ avec $\theta = \omega t$ (ω constante positive).
Un solide (S_1) a une liaison linéique annulaire de centre P, d'axe $(O, \vec{x}\,)$, avec (S) telle que :

$$\overrightarrow{OP} = at^2\vec{x} \quad (a \text{ constante positive}).$$

QUESTION 1

Déterminer les vecteurs vitesse du point P :

$$\vec{V}(P/R) \quad \text{et} \quad \vec{V}(P \in R/R_0).$$

En déduire le vecteur vitesse $\vec{V}(P/R_0)$.

RÉPONSE

Le vecteur vitesse $\vec{V}(P/R)$ s'obtient en dérivant le vecteur position du point P dans R :

$$\vec{V}(P/R) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_R$$

soit $$\vec{V}(P/R) = \left[\frac{d}{dt}\, at^2\vec{x}\,\right]_R$$

d'où $$\boxed{\vec{V}(P/R) = 2at\vec{x}.}$$

Le vecteur vitesse d'entraînement du point P dans le mouvement de R par rapport à R_0 se détermine à partir du vecteur vitesse $\vec{V}(O/R)$ par la relation :

$$\vec{V}(P \in R/R_0) = \vec{V}(O/R) + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{OP}.$$

Le point O étant fixe dans R :

$$\vec{V}(O/R) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{V}(P \in R/R_0) = \omega\vec{z} \wedge at^2\vec{x}$$

soit $$\boxed{\vec{V}(P \in R/R_0) = a\omega t^2\vec{y}.}$$

Le vecteur vitesse $\vec{V}(P/R_0)$ s'obtient en appliquant la relation (2) du *paragraphe 1* de composition des vecteurs vitesse entre les repères R et R_0 :

$$\vec{V}(P/R_0) = \vec{V}(P/R) + \vec{V}(P \in R/R_0).$$

Par suite :

$$\boxed{\vec{V}(P/R_0) = 2at\vec{x} + a\omega t^2\vec{y}.}$$

Sur la *figure 15* sont placés les trois vecteurs vitesse qui viennent d'être calculés.

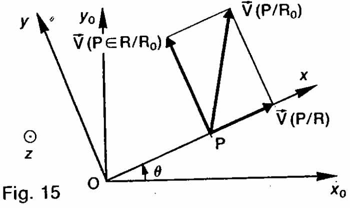


Fig. 15

QUESTION 2

Déterminer les vecteurs accélération du point P suivants :

$$\vec{\Gamma}(P/R) \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma}(P \in R/R_0).$$

Puis l'accélération de Coriolis $2\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{V}(P/R)$.

En déduire le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(P/R_0)$.

RÉPONSE

Le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(P/R)$ s'obtient en dérivant dans R le vecteur vitesse $\vec{V}(P/R)$:

$$\vec{\Gamma}(P/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}(P/R)\right]_R$$

soit $$\vec{\Gamma}(P/R) = \left[\frac{d}{dt}\, 2at\vec{x}\,\right]_R$$

d'où $$\boxed{\vec{\Gamma}(P/R) = 2a\vec{x}.}$$

Le vecteur accélération d'entraînement du point P dans le mouvement de R par rapport à R_0 se détermine à partir du vecteur accélération $\vec{\Gamma}(O/R)$ par la relation (4) du *chapitre 3 paragraphe 2.*

$$\vec{\Gamma}(P \in R/R_0) = \vec{\Gamma}(O/R_0) + \left[\frac{d}{dt}\vec{\Omega}(R/R_0)\right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{OP} + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \left[\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{OP}\right].$$

En remarquant que $\vec{\Gamma}(O/R_0) = \vec{0}$ et que $\left[\frac{d}{dt}\vec{\Omega}(R/R_0)\right]_{R_0} = \vec{0}$, il reste :

$$\vec{\Gamma}(P \in R/R_0) = \omega\vec{z} \wedge (\omega\vec{z} \wedge at^2\vec{x}\,)$$

soit

$$\boxed{\vec{\Gamma}(P \in R/R_0) = -a\omega^2t^2\vec{x}.}$$

L'accélération de Coriolis est :

$$2\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{V}(P/R) = 2\omega\vec{z} \wedge 2at\vec{x}$$

soit

$$2\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{V}(P/R) = 4a\omega t\vec{y}.$$

Le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(P/R_0)$ s'obtient en appliquar la relation (13) du *paragraphe 6* de composition de vecteurs accélération entre les repères R et R_0 :

$$\vec{\Gamma}(P/R_0) = \vec{\Gamma}(P/R) + \vec{\Gamma}(P \in R/R_0) + 2\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{V}(P/R).$$

Par suite

$$\boxed{\vec{\Gamma}(P/R_0) = a(2 - \omega^2t^2)\vec{x} + 4a\omega t\vec{y}}$$

sur la *figure 16* sont placés les quatre vecteu accélération qui viennent d'être calculés.

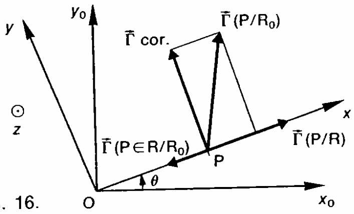


Fig. 16.

À SAVOIR

1. La relation entre les vecteurs vitesse d'un point P d'un solide (S) en mouvement par rapport à deux repères R et R_0 est :

$$\vec{V}(P/R_0)=\vec{V}(P/R)+\vec{V}(P\in R/R_0).$$

2. Le vecteur vitesse de glissement au point P du solide (S_2) par rapport au solide (S_1) est le vecteur : $\vec{V}(P\in S_2/S_1)$.
Ce vecteur est parallèle au plan tangent en P à (S_1) et (S_2).

3. Soit un solide (S) en mouvement par rapport à deux repères R et R_0. Entre les différents vecteurs rotation existe la relation

$$\vec{\Omega}(S/R_0)=\vec{\Omega}(S/R)+\vec{\Omega}(R/R_0).$$

4. Relation de Willis :

$$\frac{\omega_2-\omega}{\omega_1-\omega}=K.$$

Un sens de parcours de la chaîne cinématique du train épicycloïdal étant fixé, $\omega_2-\omega$ représente la vitesse de rotation de l'arbre de sortie par rapport au porte-satellite et $\omega_1-\omega$ représente la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée par rapport au porte-satellite. K est la raison du train d'engrenages.

5. Pour un solide (S) en mouvement par rapport à deux repères R et R_0 la relation de composition des torseurs cinématiques s'écrit :

$$\{\mathcal{V}(S/R_0)\}=\{\mathcal{V}(S/R)\}+\{\mathcal{V}(R/R_0)\}.$$

6. La relation entre les vecteurs accélération d'un point P d'un solide (S) en mouvement par rapport à deux repères R et R_0 est :

$$\vec{\Gamma}(P/R_0)=\vec{\Gamma}(P/R)+\vec{\Gamma}(P\in R/R_0)+2\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\vec{V}(P/R).$$

PROBLÈME RÉSOLU

Étude du mouvement d'une bille dans un roulement à billes *(figure 17)*.

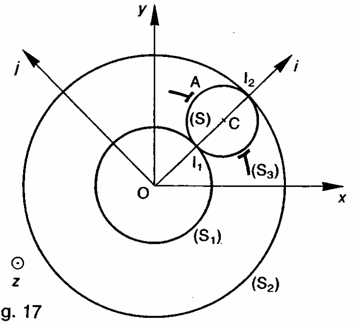


Fig. 17

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti (S_0). Les deux bagues (S_1) et (S_2) ont une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$ avec (S_0). On pose :

$$\begin{cases}\vec{\Omega}(S_1/R)=\omega_1\vec{z}\\ \vec{\Omega}(S_2/R)=\omega_2\vec{z}.\end{cases}$$

La bille (S) de centre C, animée d'un mouvement plan, roule sans glisser en I_1 avec (S_1) et en I_2 avec (S_2). Soit $R_1(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{z})$ un repère tel que $\vec{i}$ ait même direction et même sens que $\overrightarrow{OC}$. On pose :

$$\begin{cases}\overrightarrow{OI_1}=r_1\vec{i}\\ \overrightarrow{OI_2}=r_2\vec{i}.\end{cases}$$

La cage (S_3) a un mouvement de rotation d'axe $(O, \vec{z})$ par rapport à (S_0).

QUESTION 1

Déterminer le torseur cinématique, au point C, du mouvement de la bille par rapport au bâti, en fonction de ω_1, ω_2, r_1 et r_2.

RÉPONSE

Le torseur cinématique, au point C, du mouvement de la bille par rapport au bâti est de la forme :

$$\{\mathcal{V}(S/R)\}=\ {}_C\!\begin{Bmatrix}\omega\vec{z}\\ v\vec{j}\end{Bmatrix}$$

(ω et v sont des valeurs algébriques).
Exprimons qu'au point I_1 la vitesse de glissement de (S) par rapport à (S_1) est nulle :

$$\vec{V}(I_1\in S/S_1)=\vec{0}.$$

En passant par l'intermédiaire de R :

$$\vec{V}(I_1\in S/R)-\vec{V}(I_1\in S_1/R)=\vec{0}$$

$\vec{V}(I_1\in S/R)$ se calcule à partir de la vitesse du point C de (S) :

$$\begin{aligned}\vec{V}(I_1\in S/R)&=\vec{V}(C/R)+\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{CI_1}\\ &=v\vec{j}+\omega\vec{z}\wedge-\frac{1}{2}(r_2-r_1)\vec{i}\\ &=\left[v-\frac{\omega}{2}(r_2-r_1)\right]\vec{j}\end{aligned}$$

$\vec{V}(I_1\in S_1/R)$ se calcule à partir de la vitesse du point O de (S_1) :

$$\begin{aligned}\vec{V}(I_1\in S_1/R)&=\vec{V}(O/R)+\vec{\Omega}(S_1/R)\wedge\overrightarrow{OI_1}\\ &=\vec{0}+\omega_1\vec{z}\wedge r_1\vec{i}\\ &=\omega_1 r_1\vec{j}.\end{aligned}$$

La condition de non glissement en I_1 se traduit donc par la relation :

$$v - \frac{\omega}{2}(r_2 - r_1) - \omega_1 r_1 = 0.$$

Par un calcul analogue, la condition de non glissement en I_2 se traduit par la relation :

$$v + \frac{\omega}{2}(r_2 - r_1) - \omega_2 r_2 = 0.$$

La résolution de ces deux équations permet d'exprimer v et ω :

$$\boxed{v = \frac{1}{2}(\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2)}$$

et $$\boxed{\omega = \frac{\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1}{r_2 - r_1}.}$$

QUESTION 2

Déterminer la vitesse de glissement de la bille par rapport à la cage (S_3) au point A, tel que

$$\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(r_2 - r_1)\vec{j}.$$

RÉPONSE

Pour calculer la vitesse de glissement en A de (S) par rapport à (S_3) passons par l'intermédiaire du point C :

$$\vec{V}(A \in S/S_3) = \vec{V}(C \in S/S_3) + \vec{\Omega}(S/S_3) \wedge \overrightarrow{CA}$$

le point C étant lié à (S) et à (S_3) :

$$\vec{V}(C \in S/S_3) = \vec{0}.$$

Pour obtenir $\vec{\Omega}(S/S_3)$ appliquons la relation de composition des vecteurs rotation entre (S), (S_3) et R

$$\vec{\Omega}(S/S_3) = \vec{\Omega}(S/R) - \vec{\Omega}(S_3/R)$$

$\vec{\Omega}(S/R)$ a été calculé à la question précédente :

$$\vec{\Omega}(S/R) = \frac{\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1}{r_2 - r_1}\vec{z}.$$

Pour avoir $\vec{\Omega}(S_3/R)$, qui est égal à $\vec{\Omega}(R_1/R)$, écrivons la relation entre les vecteurs vitesse des points O et C appartenant à R_1 :

$$\vec{V}(C/R) = \vec{V}(O/R) + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{OC}$$

$$\frac{1}{2}(\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2)\vec{j} = \vec{0} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \frac{1}{2}(r_1 + r_2)\vec{i}.$$

Par suite :

$$\vec{\Omega}(R_1/R) = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{r_1 + r_2}\vec{z}$$

et

$$\vec{\Omega}(S/S_3) = \frac{\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1}{r_2 - r_1}\vec{z} - \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{r_1 + r_2}\vec{z}$$

soit

$$\vec{\Omega}(S/S_3) = \frac{2 r_1 r_2 (\omega_2 - \omega_1)}{r_2^2 - r_1^2}\vec{z}.$$

La vitesse de glissement cherchée s'écrit donc :

$$\vec{V}(A \in S/S_3) = \frac{2 r_1 r_2 (\omega_2 - \omega_1)}{r_2^2 - r_1^2}\vec{z} \wedge \frac{1}{2}(r_2 - r_1)\vec{j}$$

soit

$$\boxed{\vec{V}(A \in S/S_3) = \frac{r_1 r_2}{r_2 + r_1}(\omega_2 - \omega_1)\vec{i}.}$$

CONSEILS POUR LA RÉSOLUTION

1. Lorsqu'on réalise graphiquement une composition de vecteurs vitesse, vérifier que le vecteur vitesse absolue est bien la somme du vecteur vitesse relative et du vecteur vitesse d'entraînement.

2. Après le calcul d'un vecteur vitesse de glissement vérifier, au moins, que ce vecteur est bien parallèle au plan tangent commun aux deux solides, au point considéré.

3. La relation de Willis a été démontrée pour u train épicycloïdal à axes parallèles, si le tra épicycloïdal est sphérique la relation entre les tro vitesses de rotation s'obtient en exprimant roulement sans glissement des surfaces primitiv au contact.
D'autre part, rappelons que les vitesses de rotatio figurant dans la relation de Willis sont des nombr algébriques.

4. Pour ajouter deux torseurs cinématiques l écrire au préalable en un même point.

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 — Un petit avion de tourisme est équipé d'un train d'atterrissage tricycle composé :

— de deux atterrisseurs principaux latéraux,

— d'un atterrisseur auxiliaire avant.

L'étude porte sur l'atterrisseur principal gauche *(figure 18).*

A l'instant de date t_0 les deux roues du train principal entrent simultanément en contact avec le sol, la roue avant ne touchant le sol qu'ultérieurement. La longueur de l'amortisseur est alors maximale et vaut $B_0D = l_0 = 585$ mm. A l'instant de date t_1 l'amortisseur a sa longueur minimale $B_1D = h = 490$ mm.

Entre ces deux dates, le mouvement de l'avion par rapport au sol est une translation caractérisée à chaque instant par le vecteur vitesse du point A par rapport au sol ⓪ : $\vec{V}(A/0)$.

Ce vecteur vitesse est représenté *figure 19* aux deux dates t_0 et t_1.

A la date t_0 : $\vec{V}(A/0) = -30\vec{x} - 3\vec{y}$ exprimée en mètres par seconde.

A la date t_1 : $\vec{V}(A/0) = -30\vec{x}$ exprimée en mètres par seconde.

Nous supposerons que le pneu est indéformable (pas d'aplatissement).

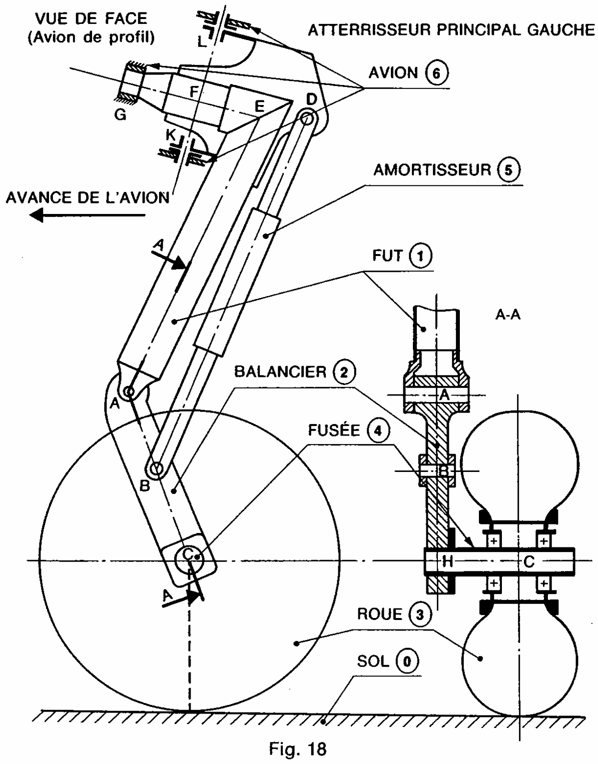

VUE DE FACE
(Avion de profil)
ATTERRISSEUR PRINCIPAL GAUCHE
L
AVION ⑥
F
E
D
G
K
AMORTISSEUR ⑤
AVANCE DE L'AVION
A
FUT ①
A-A
BALANCIER ②
A
FUSÉE ④
B
A
C
H
C
ROUE ③
SOL ⓪

Fig. 18

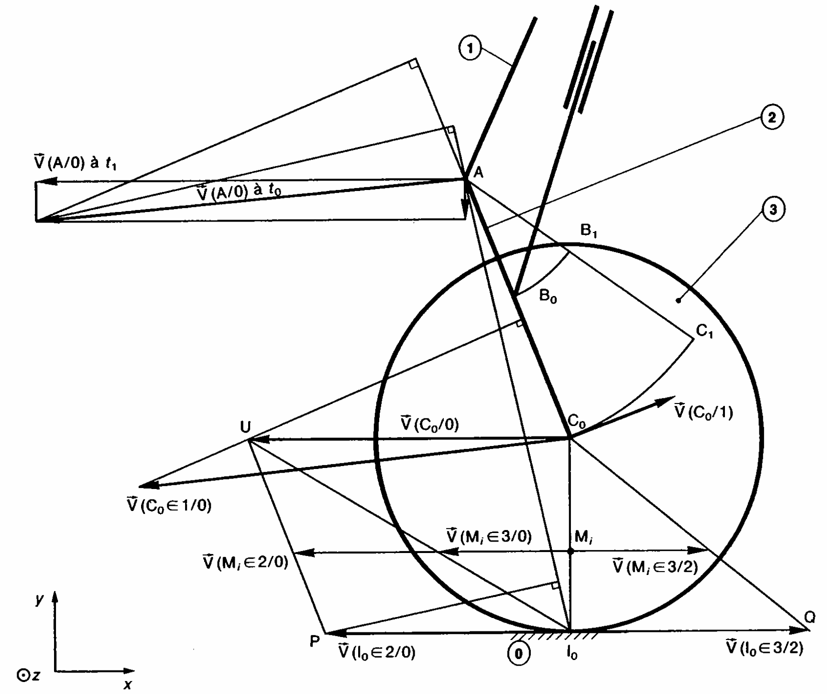


Fig. 19

QUESTIONS

1° Représenter à la date t_0 le vecteur vitesse du point C par rapport au sol : $\vec{V}(C_0/0)$.

2° Représenter à la date t_0 le vecteur vitesse du point C supposé lié au fût ① par rapport au sol ⓪ : $\vec{V}(C_0 \in 1/0)$.

3° Représenter à la date t_0 le vecteur vitesse du point C par rapport au fût ① : $\vec{V}(C_0/1)$.

4° Sachant qu'à la date t_0 la roue ③ roule sans glisser au point I_0 sur le sol ⓪, représenter à cette date t_0 le vecteur vitesse du point I_0 supposé lié au balancier ② par rapport au sol ⓪ : $\vec{V}(I_0 \in 2/0)$, ainsi que le vecteur vitesse du point I_0 supposé lié à la roue ③ par rapport au balancier ② : $\vec{V}(I_0 \in 3/2)$.

5° Pour tous les points M_i du rayon C_0I_0, déterminer, à la date t_0, la répartition des vecteurs vitesse :

$$\vec{V}(M_i \in 2/0), \quad \vec{V}(M_i \in 3/2) \quad \text{et} \quad \vec{V}(M_i \in 3/0).$$

RÉPONSES

1° Le point C reste à une distance constante du sol, donc le vecteur vitesse $\vec{V}(C_0/0)$ est horizontal. En appliquant le théorème de l'équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse des points d'un solide entre les points A et C_0 du balancier ②, on construit le vecteur $\vec{V}(C_0/0)$. On trouve que : $\|\vec{V}(C_0/0)\| = 21{,}5$ m/s.

2° A la date t_0 le fût ① a un mouvement de translation par rapport au sol ⓪. Par conséquent :

$$\vec{V}(C_0 \in 1/0) = \vec{V}(A/0)$$

et $$\|\vec{V}(C_0 \in 1/0)\| = 30{,}15 \text{ m/s}.$$

3° En appliquant la relation de composition des vecteurs vitesse au point C_0 entre le fût ① et le sol ⓪ :

$$\vec{V}(C_0/0) = \vec{V}(C_0/1) + \vec{V}(C_0 \in 1/0)$$

on peut construire le vecteur vitesse $\vec{V}(C_0/1)$, en sachant qu'il est perpendiculaire à AC_0. On trouve que $\|\vec{V}(C_0/1)\| = 9$ m/s.

4° En appliquant le théorème de l'équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse des points d'un solide entre les points I_0 et C_0 d'une part, et entre les points I_0 et A d'autre part, on peut construire le vecteur vitesse $\vec{V}(I_0 \in 2/0)$.
On trouve que :

$$\|\vec{V}(I_0 \in 2/0)\| = 16 \text{ m/s}.$$

Le roulement sans glissement de la roue ③ sur le sol ⓪ au point I_0 se traduit par la relation :

$$\vec{V}(I_0 \in 3/0) = \vec{0}.$$

Appliquons la relation de composition des vecteurs vitesse au point I_0 entre ③, ② et ⓪ :

$$\vec{V}(I_0 \in 3/0) = \vec{V}(I_0 \in 3/2) + \vec{V}(I_0 \in 2/0)$$

alors : $\vec{V}(I_0 \in 3/2) = -\vec{V}(I_0 \in 2/0)$

d'où la construction de $\vec{V}(I_0 \in 3/2)$.

5° Tous ces vecteurs vitesse ont leur origine sur le segment C_0I_0.
L'extrémité de $\vec{V}(M_i \in 2/0)$ est sur PU.
L'extrémité de $\vec{V}(M_i \in 3/2)$ est sur QC_0.
L'extrémité de $\vec{V}(M_i \in 3/0)$ est sur I_0U.
Ces trois vecteurs vitesse vérifient la relation :

$$\vec{V}(M_i \in 3/0) = \vec{V}(M_i \in 3/2) + \vec{V}(M_i \in 2/0).$$

2 — Un mécanisme de changement de vitesse, à deux vitesses et une marche arrière est représenté *figure 20.* $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est un repère lié au bâti (S_0) de ce mécanisme. L'arbre moteur (M) a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$ avec (S_0). (M) porte un satellite (S), d'axe parallèle à $\vec{x}$, constitué de trois roues dentées (S_1), (S_3) et (S_5) qui engrènent respectivement avec les 3 roues dentées (S_2), (S_4) et (S_6), d'axe $(O, \vec{x})$.
On pose

$$\vec{\Omega}(M/R) = \omega_1\vec{x}, \qquad \vec{\Omega}(S/M) = \omega\vec{x},$$
$$\vec{\Omega}(S_2/R) = \omega_2\vec{x}, \qquad \vec{\Omega}(S_4/R) = \omega_4\vec{x},$$
$$\vec{\Omega}(S_6/R) = \omega_6\vec{x}.$$

Nombre de dents de la roue (S_1) : 36, (S_2) : 36, (S_3) : 48, (S_4) : 24, (S_5) : 30, (S_6) : 42.

Les roues (S_4) et (S_6) peuvent être immobilisées par rapport à (S_0) par deux freins à commande électromagnétique F et F'. Un embrayage (E) permet la solidarisation des roues (S_2) et (S_4).

QUESTIONS

1° Déterminer la relation entre les vitesses de rotation suivantes :

a) ω_1, ω et ω_2;

b) ω_1, ω et ω_4;

c) ω_1, ω et ω_6.

2° Déterminer le rapport $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ dans chacun des cas suivants :

a) **Première vitesse : (F) desserré, (F') serré, (E) débrayé.**

b) **Deuxième vitesse : (F) et (F') desserrés, (E) embrayé.**

c) **Marche arrière : (F) serré, (F') desserré, (E) débrayé.**

RÉPONSES

1° *a*) $\omega + \omega_2 - \omega_1 = 0.$

b) $2\omega + \omega_4 - \omega_1 = 0.$

c) $5\omega + 7\omega_6 - 7\omega_1 = 0.$

2° *a*) $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{2}.$

b) $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1.$

c) $\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{2}{5}.$

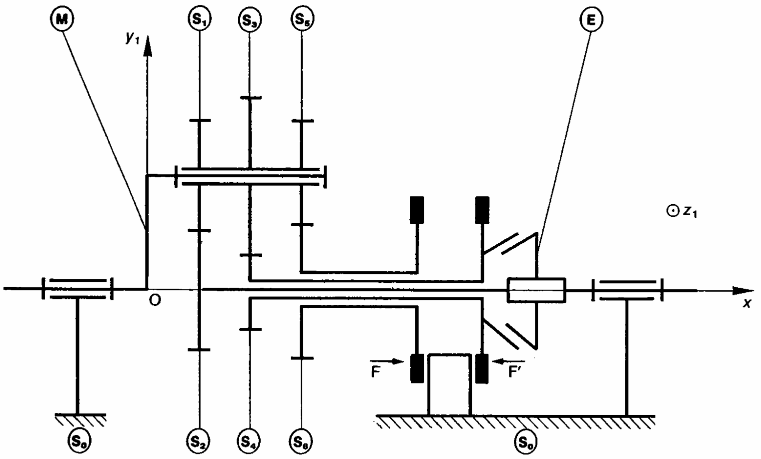


Fig. 20

3 — La pompe oscillante dont le dessin est donné *figure 21* est schématisée *figure 22* en vue du calcul de la vitesse de translation du piston (S_2) par rapport au bloc oscillant (S_3).

$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est un repère lié au corps (S_0) de la pompe. La manivelle (S_1) a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$ avec (S_0). Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à (S_1), on pose : $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.

Le piston (S_2) a une liaison pivot d'axe $(A, \vec{z})$ avec (S_1), telle que $\overrightarrow{OA} = r\vec{x}_1$ $(r > 0)$.

Le bloc oscillant (S_3) a une liaison pivot glissant d'axe $(B, \vec{z})$ avec (S_0), telle que $\overrightarrow{OB} = l\vec{x}$ $(l > r)$. (S_2) et (S_3) ont une liaison pivot glissant d'axe AB.

Soit $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ le repère lié à (S_2) tel que $\vec{x}_2$ ait même direction et même sens que $\overrightarrow{AB}$. On pose $\beta = (\vec{x}, \vec{x}_2)$.

QUESTIONS

1° Les angles α et β étant dépendants, déterminer la relation liant ces deux paramètres.

2° Déterminer le vecteur vitesse de glissement du point B dans le mouvement de (S_2) par rapport à (S_3) en fonction de :

***a*) l, β et α';**

***b*) l, r, α et α'.**

RÉPONSES

1° $l \sin \beta = r \sin(\beta - \alpha)$.
(β est négatif sur la *figure 22*).

2° *a*) $\vec{V}(B \in S_2/S_3) = l\alpha' \sin \beta \vec{x}_2$

b) $\vec{V}(B \in S_2/S_3) = \dfrac{-lr\alpha' \sin \alpha}{\sqrt{l^2 + r^2 - 2lr \cos \alpha}} \vec{x}_2$.

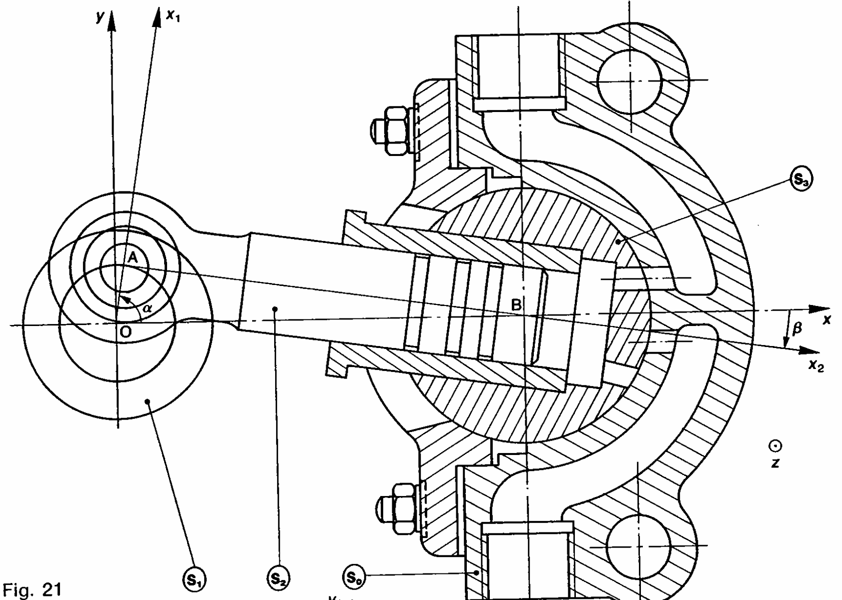


Fig. 21

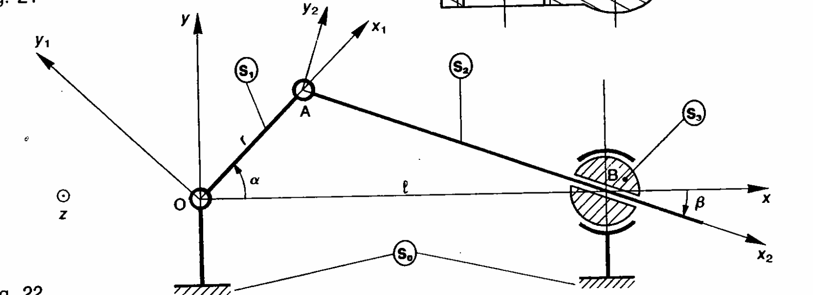


Fig. 22

4 — Le dessin partiel d'un réducteur à billes est donné *figure 23* et le schéma cinématique *figure 24*.

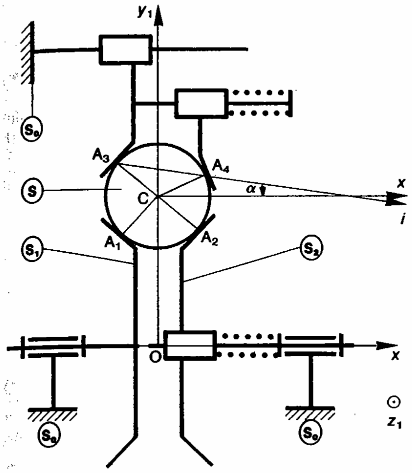


Fig. 24

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti (S_0) du réducteur. L'arbre moteur (S_1) et l'arbre récepteur (S_2) ont une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$ avec (S_0). On pose :

$$\vec{\Omega}(S_1/R) = \omega_1 \vec{x}$$
$$\vec{\Omega}(S_2/R) = \omega_2 \vec{x}.$$

Une bille (S) de centre C, de rayon a, roule sans glisser en A_1 sur (S_1), en A_2 sur (S_2), et en A_3 et A_4 sur (S_0). Soit $R_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère tel que :

$$\overrightarrow{OC} = r\vec{y}_1 \qquad (r>0).$$

Les points de contact sont tels que :

$$(\vec{y}_1, \overrightarrow{CA_3}) = (\overrightarrow{CA_1}, -\vec{y}_1) = (-\vec{y}_1, \overrightarrow{CA_2}) = \frac{\pi}{4}$$

et

$$(\vec{x}, \overrightarrow{CA_4}) = \frac{\pi}{6}.$$

Soit $\vec{i}$ le vecteur unitaire de même direction et de même sens que le vecteur $\overrightarrow{A_3A_4}$. On pose : $\alpha = (\vec{i}, \vec{x})$ (α est un angle constant).

Le but de l'exercice est de déterminer le rapport de réduction $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ du réducteur. Pour cela, répondre successivement aux questions suivantes :

QUESTIONS

1° Montrer que l'axe central du torseur cinématique du mouvement de (S) par rapport à (S_0) est la droite A_3A_4.

2° On pose : $\vec{\Omega}(S/R) = \omega\vec{i}$. Calculer $\vec{V}(A_1 \in S/R)$ et $\vec{V}(A_2 \in S/R)$ en fonction de a, ω et α.

3° Déterminer le rapport de réduction $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ du réducteur à billes. Faire l'application numérique.

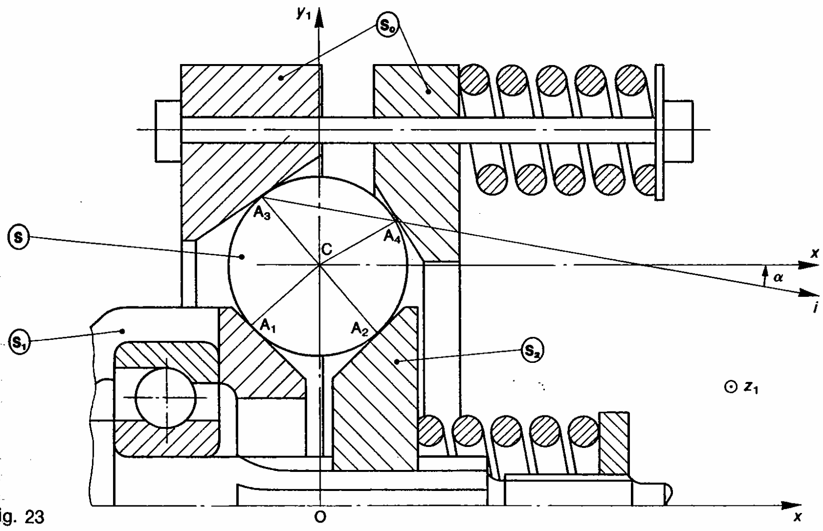


Fig. 23

RÉPONSES

1° En A_3 et A_4 les vitesses de glissement entre (S) et (S_0) sont nulles. Par conséquent, en ces points le moment résultant du torseur cinématique du mouvement de (S) par rapport à (S_0) est nul. Or, c'est en un point de l'axe central que la norme du moment résultant est minimum, donc si cette norme est nulle le point considéré est situé sur l'axe central du torseur.
Par suite, les points A_3 et A_4 sont deux points de l'axe central du torseur $\{\mathcal{V}(S/R)\}$, et on peut poser $\vec{\Omega}(S/R) = \omega\vec{i}$.

2° $\vec{V}(A_1 \in S/R) = -a\omega\sqrt{2}\cos\alpha\vec{z}_1$

$\vec{V}(A_2 \in S/R) = a\omega\sqrt{2}(\sin\alpha - \cos\alpha)\vec{z}_1$.

3° $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} = 1 - \tan\alpha$.

Application numérique : $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} = 0{,}868$.

5 — Le dessin du variateur de vitesse Graham est donné *figure 25* et le schéma cinématique *figure 26.*

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti (S_0) du variateur. L'arbre moteur (S_1) et l'arbre récepteur (S_2) ont une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$ avec (S_0). On pose :

$$\vec{\Omega}(S_1/R) = \omega_1\vec{x}$$
$$\vec{\Omega}(S_2/R) = \omega_2\vec{x}.$$

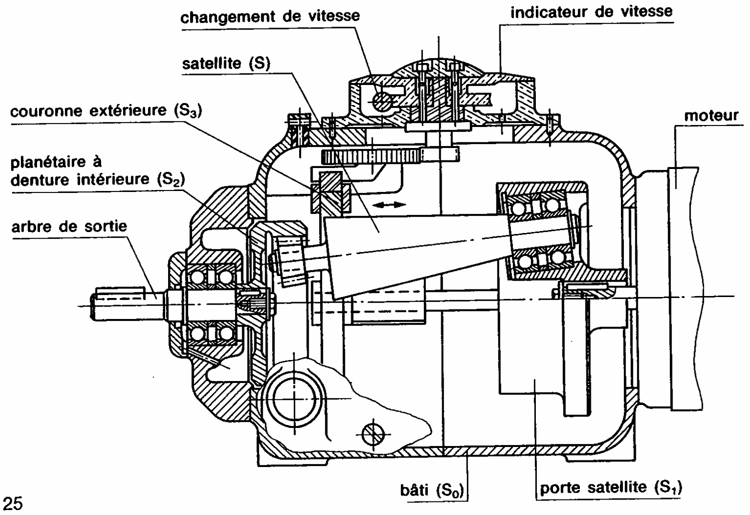

changement de vitesse
indicateur de vitesse
satellite (S)
couronne extérieure (S₃)
moteur
planétaire à denture intérieure (S₂)
arbre de sortie
bâti (S₀)
porte satellite (S₁)

Fig. 25

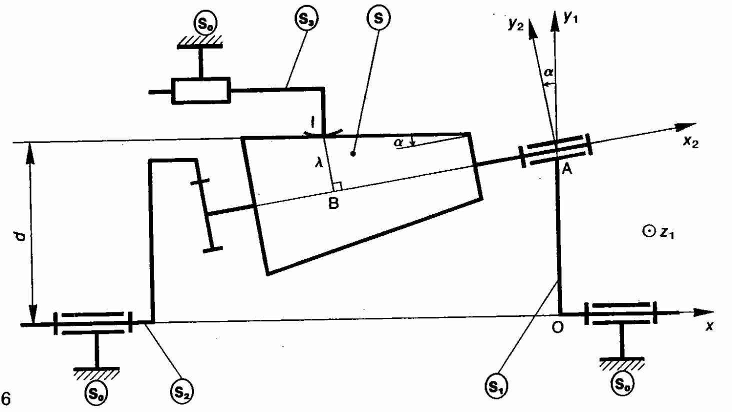

S₀
S₃
S
y₂
y₁
α
I
α
x₂
λ
B
A
d
z₁
O
x
S₀
S₂
S₁
S₀

Fig. 26

Soient $R_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ deux repères liés à (S_1) tels que $\overrightarrow{OA}$ ait même direction et même sens que $\vec{y}_1$.
On pose $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_2)$ (α est constant).
Le satellite (S) a une liaison pivot d'axe $(A, \vec{x}_2)$ avec (S_1). (S) est un tronc de cône de révolution d'axe $(A, \vec{x}_2)$, de demi-angle au sommet α.
On pose $\vec{\Omega}(S/S_1) = \omega \vec{x}_2$.
La génératrice de (S) du plan $(O, \vec{x}, \vec{y}_1)$ la plus éloignée de l'axe $(O, \vec{x})$ est parallèle à $\vec{x}$.
Notons d sa distance à l'axe $(O, \vec{x})$.
(S) roule sans glisser au point I sur une couronne (S_3), liée à (S_0) pendant le fonctionnement. Le réglage du rapport de variation s'obtient en déplaçant (S_3) suivant l'axe $(O, \vec{x})$.
Soit B le centre de la section droite du tronc de cône passant par I. On pose $\overrightarrow{BI} = \lambda \vec{y}_2$.
A l'extrémité de (S) est fixée une roue dentée de n dents, d'axe $(A, \vec{x}_2)$, qui engrène avec une couronne dentée intérieure d'axe $(O, \vec{x})$, de n_2 dents, liée à (S_2).

QUESTIONS

1° En exprimant que (S) roule sans glisser sur (S_3) au point I, déterminer ω en fonction de ω_1.

2° Quelle relation obtient-on entre ω_1, ω_2 et ω en exprimant l'engrènement des deux roues dentées?

3° En déduire le rapport de variation $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ du mécanisme en fonction de λ.

4° Tracer la courbe représentative du rapport de variation $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ en fonction de λ, sachant que $\dfrac{n}{n_2} = \dfrac{11}{38}$, $d = 55$ mm, et que λ varie entre la valeur $\lambda_{min} = 12$ mm et la valeur $\lambda_{max} = 23$ mm.

RÉPONSES

1° $\omega = -\dfrac{d}{\lambda}\,\omega_1$.

2° $n_2(\omega_2 - \omega_1) = n\omega$.

3° $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} = 1 - \dfrac{n}{n_2}\dfrac{d}{\lambda}$.

4° Voir figure.

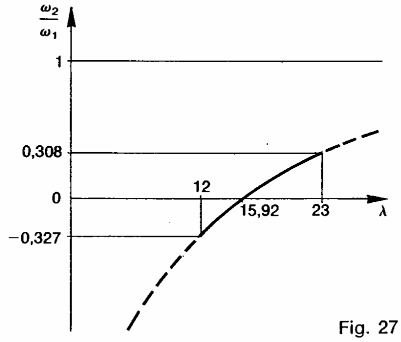


Fig. 27

EXERCICES SANS RÉPONSES

6 — La course d'une table de rectifieuse plane est réglée au moyen de deux interrupteurs de fin de course commandés par des butées réglables.
La *figure 28* donne le plan de l'un de ces ensembles.
Lorsque la butée ②, liée à la table ①, vient en contact avec le galet ③ sa vitesse de translation est

$$\vec{V}(A \in 2/0) = V\vec{x} \quad \text{avec } V = 1 \text{ m/s}.$$

Le galet roule sans glisser sur la pente de la butée ②.
Soient respectivement B, C et D les centres des articulations entre ⑦ et ③, ⑧ et ⑤, ⑥ et ⑭.
Le ressort ⑫ est destiné à ramener le bras ④ en position initiale.
Le contact ⑧ est métallique et assure, en position « repos » le passage du courant électrique entre les deux plots ⑩, et en position « action » la coupure du courant électrique.
Soit F un point de la surface de contact entre ⑧ et ⑩.
Le guide ⑪ est en liaison pivot glissant avec ⑧, et se termine dans sa partie basse par un cône à 90° en appui ponctuel au sommet E de la cuvette conique à 120° creusée dans le bâti ⑭.

QUESTIONS

1° Représenter le vecteur vitesse du point A supposé lié à la roue ③ par rapport au bâti ⓪ : $\vec{V}(A \in 3/0)$.

2° Déterminer graphiquement le vecteur vitesse du point B par rapport au bâti ⓪ : $\vec{V}(B/0)$.

3° Déterminer le vecteur vitesse du point C par rapport au bâti ⓪ : $\vec{V}(C/0)$.

**4° Déterminer le vecteur vitesse du point C par rapport au guide ⑪ : $\vec{V}(C/11)$.
En déduire le vecteur vitesse du point E supposé lié à ⑧ par rapport à ⑪.**

5° Déterminer le vecteur vitesse du point E supposé lié à ⑧ par rapport à ⓪ : $\vec{V}(E \in 8/0)$.

6° Connaissant les vecteurs vitesses $\vec{V}(C/0)$ et $\vec{V}(E \in 8/0)$ déterminer le vecteur vitesse du point F supposé lié à ⑧ par rapport à ⓪.

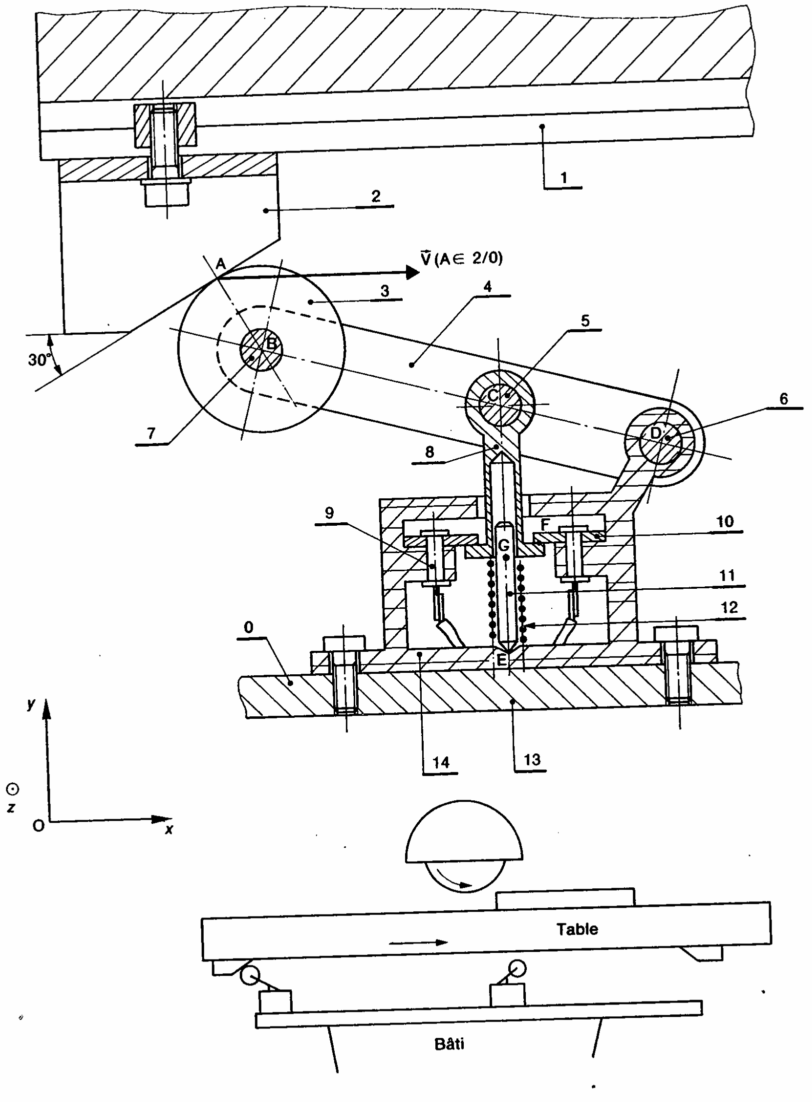

1
2
$\vec{V}$(A∈ 2/0)
A
3
4
5
B
30°
C
6
D
7
8
9
10
F
G
11
12
0
E
14
13
y
z
O
x
Table
Bâti

Fig. 28

7 — Le dessin de la pompe à débit réglable DKM est donné *figure 29* ainsi qu'un dessin partiel *figure 30.*

L'excentrique ① ayant un mouvement de rotation autour de l'axe $(O, \vec{z})$ du bâti (Σ) met en mouvement la bielle ② qui commande la translation du piston ④ par l'intermédiaire du balancier ③, articulé autour de l'axe $(C, \vec{z})$ du bâti (Σ). (Le réglage du débit est obtenu par variation de la distance EC.)

QUESTION

En supposant connu le vecteur vitesse du point A par rapport au bâti (Σ), déterminer graphiquement, dans la configuration proposée, le vecteur vitesse de translation du piston ④ par rapport au bâti (Σ).

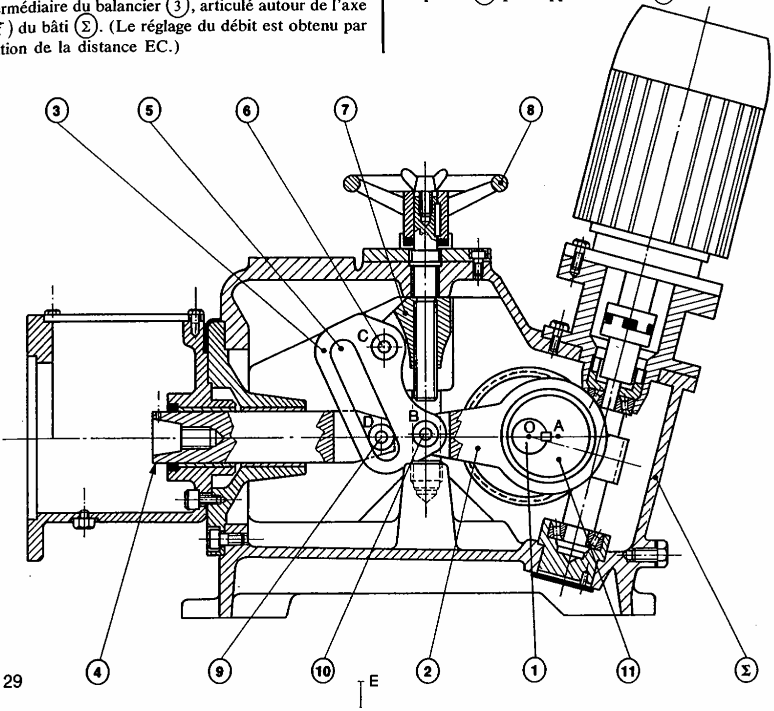


Fig. 29

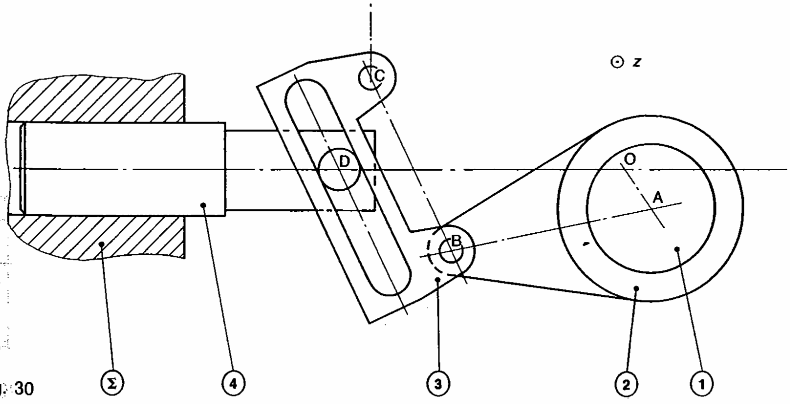


Fig. 30

8 — La *figure 31* représente une poulie réductrice REDEX qui se monte sur l'axe de l'appareil commandé. Le corps ⑤ est entraîné par cinq courroies trapézoïdales ⑧, et porte les axes porte-satellites ⑨.

Trois satellites ⑩ roulent sur un planétaire ㉔ immobilisé en rotation par un bras de réaction, non représenté sur la figure, fixé sur le fourreau ⑱. Trois autres satellites ⑥ entraînent le deuxième planétaire ㉛,

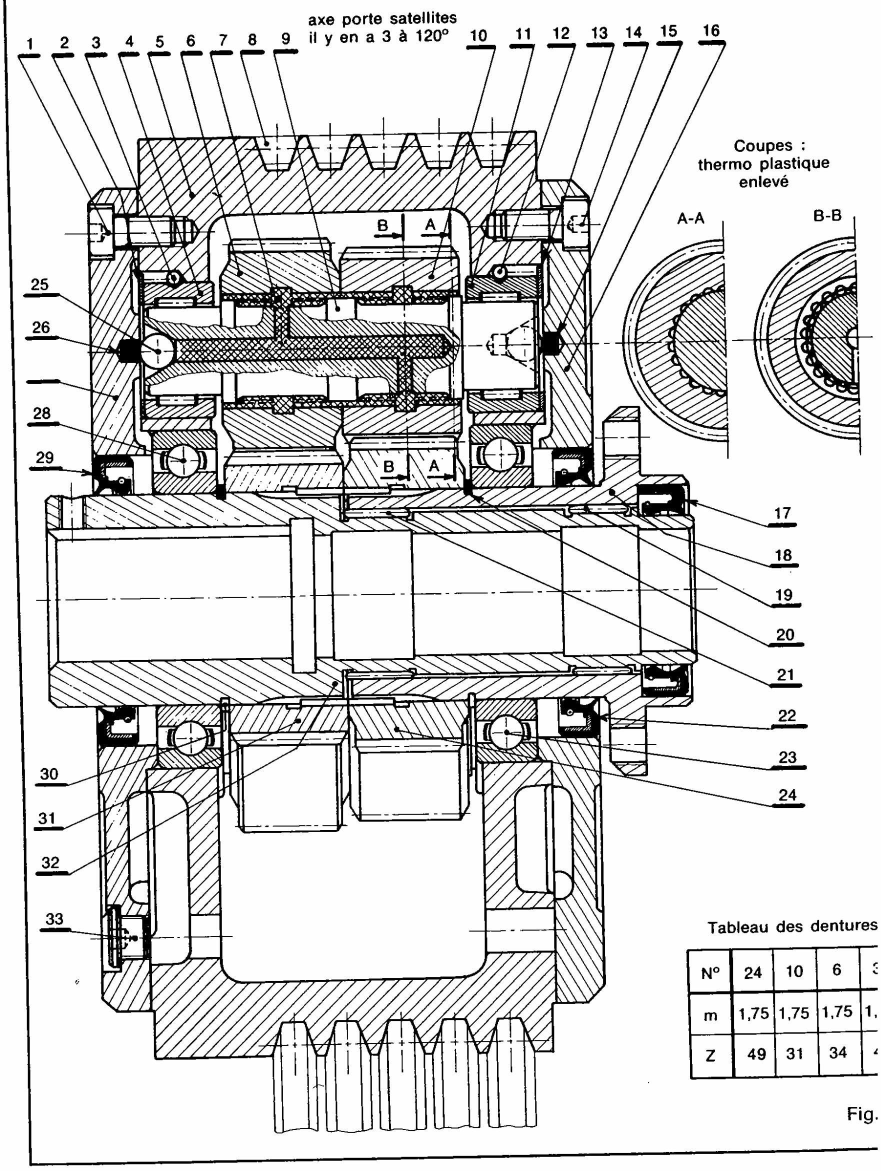

axe porte satellites
il y en a 3 à 120°
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
Coupes :
thermo plastique
enlevé
A-A
B-B
B
A
B
A
25
26
28
29
17
18
19
20
21
22
23
24
30
31
32
33

Tableau des dentures

N°	24	10	6	
m	1,75	1,75	1,75	1,
Z	49	31	34	

Fig.

solidaires du moyeu ㉜, lequel est claveté sur l'axe de l'appareil commandé.
Les nombres de dents des pignons ㉔, ⑩, ⑥, ㉛ sont donnés par le tableau de la *figure 31*.

QUESTIONS

1° Établir le schéma cinématique de ce mécanisme.

2° Déterminer la vitesse de rotation ω_2 de l'arbre de sortie ㉜ par rapport au bâti ⓪, en fonction de la vitesse de rotation ω_1 du corps ⑤ par rapport au bâti ⓪, et du nombre de dents des pignons ㉔, ⑩, ⑥ et ㉛.

9 — Le schéma cinématique de la *figure 32* est celui du variateur de vitesse « Patin ».
$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est un repère lié au bâti (S_0) du variateur de vitesse.
L'arbre d'entrée (S_1), l'arbre de sortie (S_2) et le porte-satellite (PS) ont des liaisons pivot d'axe $(O, \vec{x})$ avec (S_0). On pose :

$$\vec{\Omega}(S_1/R) = \omega_1\vec{x}$$
$$\vec{\Omega}(S_2/R) = \omega_2\vec{x}$$
$$\vec{\Omega}(PS/R) = \omega\vec{x}.$$

La rotation du porte-satellite (PS) est obtenue à partir de la rotation de l'arbre d'entrée (S_1) par l'intermédiaire d'un train épicycloïdal constitué d'un pignon satellite (S), en liaison pivot d'axe parallèle à $\vec{x}$ avec (PS), engrénant avec une roue dentée liée à (S_1) et avec une couronne à denture intérieure liée à (S_0).
Nombre de dents de la roue liée à (S_1) : n_1, du satellite (S) : n et de la couronne liée à (S_0) : n_0.
Le porte-satellite supporte des galets orientables tels que le galet (G).
Soit $R_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à (PS).
Le galet (G) de rayon a, de centre C tel que $\overrightarrow{OC} = l\vec{y}_1$ ($l > 0$), roule sans glisser en I_1 et I_2 sur deux surfaces toriques liées à (S_1) et (S_2).
Soit $R_2(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ le repère tel que $(C, \vec{x}_2)$ ait même direction et même sens que $\overrightarrow{I_1I_2}$.
On pose : $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_2)$ (α est réglable mais supposé constant pendant le fonctionnement).
Le galet (G) a une liaison pivot d'axe $(C, \vec{y}_2)$ avec (PS). On pose :

$$\vec{\Omega}(G/PS) = \Omega\vec{y}_2.$$

Le but de l'exercice est de déterminer le rapport $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ en fonction de α.

QUESTIONS

1° Déterminer la vitesse de rotation ω du porte-satellite (PS) en fonction de la vitesse de rotation ω_1 de l'arbre d'entrée (S_1).

2° Déterminer la relation scalaire qui traduit le non glissement au point de contact I_1 de (G) avec (S_1).

3° Déterminer la relation scalaire qui traduit le non glissement au point de contact I_2 de (G) avec (S_2).

4° Montrer que le rapport de variation est :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_1(l + a\sin\alpha) - n_0(l - a\sin\alpha)}{(n_0 + n_1)(l + a\sin\alpha)}.$$

10 — Le variateur de vitesse à billes PIV *(figure 33)* est constitué de deux plateaux décalés entre lesquels est enfermée une série de billes maintenue par une cage intermédiaire pouvant se déplacer suivant un axe afin de modifier le rapport de variation du mécanisme.
Pour déterminer le rapport de variation adoptons le schéma cinématique de la *figure 34*.
Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti (S_0) du variateur. L'origine O est le centre de la cage à billes (S_3), supposé fixe par rapport à (S_0) pendant le fonctionnement.

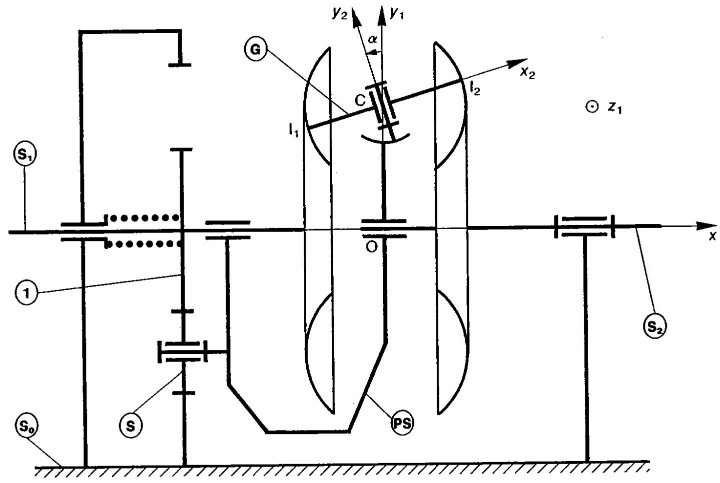


Fig. 32

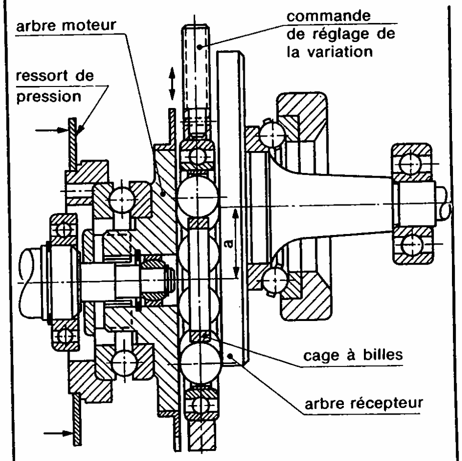

arbre moteur
commande de réglage de la variation
ressort de pression
a
cage à billes
arbre récepteur

Fig. 33

Le plateau moteur (S_1) et le plateau récepteur (S_2) ont une liaison pivot d'axe $(O_1, \vec{x})$ et $(O_2, \vec{x})$ respectivement avec (S_0), telles que :

$$\overrightarrow{O_1O_2} = a\vec{y} \quad (a > 0)$$
$$\overrightarrow{O_1O} = \lambda\vec{y} \quad (0 \leq \lambda < a)$$

λ est constant pendant le fonctionnement.

On pose : $\vec{\Omega}(S_1/R) = \omega_1\vec{x}$

$\vec{\Omega}(S_2/R) = \omega_2\vec{x}.$

Une bille (S) de la cage, de rayon b, de centre C, roule sans glisser en I_1 sur (S_1) et en I_2 sur (S_2).
Soit $R_1(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{z})$ un repère lié à cage (S_3) tel que $\overrightarrow{OC} = r\vec{i}$ (r constante positive).

On pose $\alpha = (\vec{y}, \vec{i})$, $\vec{\Omega}(S_3/R) = \omega\vec{x}$.

QUESTIONS

1° Quelle relation vectorielle obtient-on en exprimant que (S) roule sans glisser sur (S_1)?

2° Quelle relation vectorielle obtient-on en exprimant qu (S) roule sans glisser sur (S_2)?

3° Montrer que le rapport de variation est :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\lambda}{a - \lambda}.$$

4° Déterminer $\vec{\Omega}(S_3/R)$.

5° Montrer, par un raisonnement simple, que toutes le billes de la cage roulent sans glisser sur (S_1) et (S malgré que la vitesse de leur centre soit imposée par l cage.

6° Tracer la courbe représentative du rapport d variation pour : $0 \leq \lambda < a$.

En pratique : $0 \leq \frac{\omega_2}{\omega_1} \leq 1{,}2$. Quelle est alors la valeu maximale de λ?

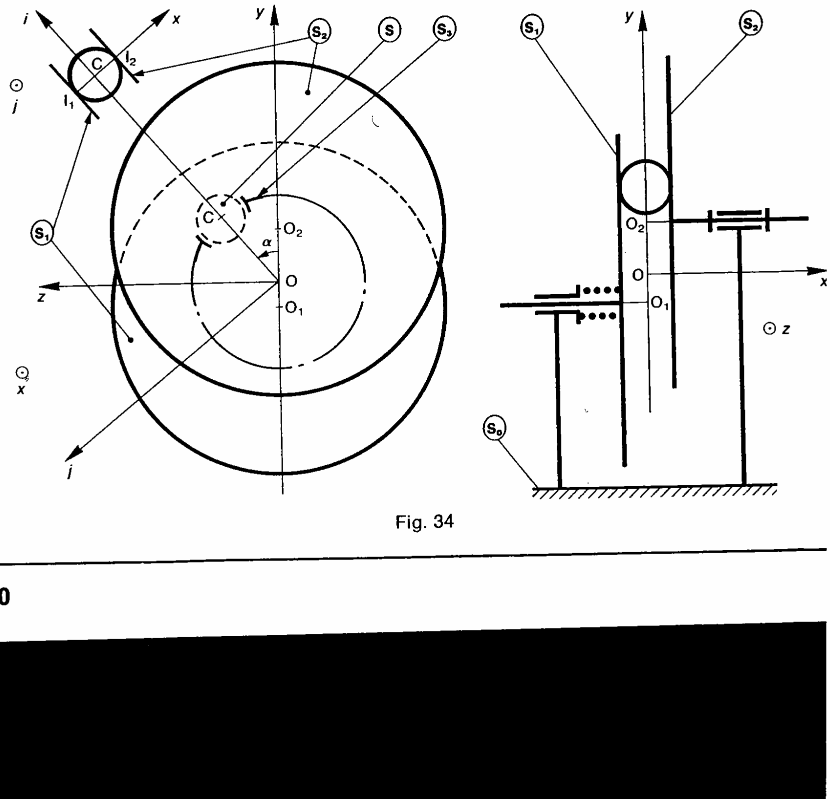

i
x
y
S2
S
S3
C
I2
I1
j
S1
C
α
O2
O
O1
z
x
j
S1
y
S2
O2
O
O1
x
z
S0

Fig. 34

5

mouvement plan sur plan

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un cas particulier : le mouvement plan sur plan, fréquemment rencontré (engrenages, bielle-manivelle, etc.). Des propriétés originales seront mises en évidence afin de déterminer simplement la cinématique de ces mouvements.

1. CENTRE INSTANTANÉ DE ROTATION, BASE ET ROULANTE

Soient deux repères

$$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \quad \text{et } R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$$

liés respectivement à deux solides (S) et (S_0). Supposons qu'au cours du mouvement de (S) par rapport à (S_0) les deux plans $P(O, \vec{x}, \vec{y})$ et $P_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ restent confondus. Alors le mouvement de (S) par rapport à (S_0) est dit mouvement plan sur plan.

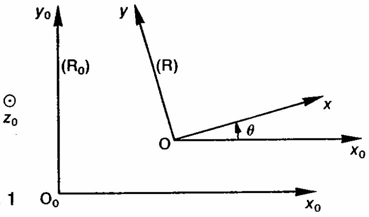


Fig. 1

L'orientation de la base de R par rapport à la base de R_0 est définie par le seul paramètre $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x})$. Considérons le torseur cinématique du mouvement de R par rapport à R_0 :

$$\{\mathcal{V}(R/R_0)\} = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(R/R_0) \\ \vec{V}(O/R_0) \end{Bmatrix}.$$

Remarquons que

$$\vec{\Omega}(R/R_0) = \theta'\vec{z}$$

et

$$\vec{V}(O/R_0)\cdot\vec{z} = 0.$$

Par conséquent, ce torseur cinématique est à résultante. Son axe central Δ a pour direction $\vec{z}$. Soit I l'intersection de Δ avec les plans P et P_0. Le moment central de ce torseur étant nul :

$$\boxed{\vec{V}(I \in R/R_0) = \vec{0}.}$$

REMARQUES

- Δ *existe si* $\vec{\Omega}(R/R_0) \neq \vec{0}$.
- *Le point* I *est unique.*

Définition

Le point I est appelé *centre instantané de rotation*, à la date *t*, du mouvement plan sur plan de P par rapport à P_0.

REMARQUE

Au cours du mouvement le point I *change de position dans* P *et* P_0.

Définitions

1° La trajectoire du point I dans le plan P_0 est appelée *base* du mouvement plan sur plan de P par rapport à P_0.

2° La trajectoire du point I dans le plan P est appelée *roulante* du mouvement plan sur plan de P par rapport à P_0.

2. RECHERCHE GÉOMÉTRIQUE DU CENTRE INSTANTANÉ DE ROTATION

Soit (C_0) la trajectoire dans P_0 d'un point M lié au plan P.
Alors $\vec{V}(M \in R/R_0)$ est un vecteur parallèle à la tangente en M à (C_0).
De plus entre les vecteurs vitesse des points I et M du repère R nous connaissons la relation *(chapitre 3 paragraphe 1) :*

$$\vec{V}(M \in R/R_0) = \vec{V}(I \in R/R_0) + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{IM}$$
$$= \theta'\vec{z} \wedge \overrightarrow{IM}.$$

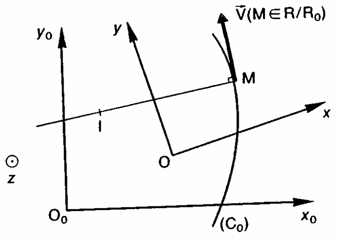


Fig. 2

Ce qui montre que $\overrightarrow{IM}$ est perpendiculaire à $\vec{V}(M\in R/R_0)$.
Par suite, le point I se trouve sur la normale en M à la trajectoire (C_0).

Conséquence

Si l'on connaît les trajectoires dans P_0 de deux points de P, on détermine I par l'intersection des normales aux trajectoires de ces points.

Application

Considérons les mécanismes plan de commande d'une tige (T) par un excentrique (S).
Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti (Σ).
L'excentrique (S) est assimilé à un disque de centre C, de rayon a. (S) a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$ avec (Σ). Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à (S) tel que :

$$\overrightarrow{OC} = e\vec{x}_1 \quad (e > 0).$$

La tige (T) a une liaison glissière de direction $(O, \vec{y})$ avec (Σ).
(S) et (T) sont en contact ponctuel en un point P d'un plan lié à (T) perpendiculaire à $(O, \vec{y})$.

QUESTION

Déterminer le centre instantané de rotation I, la base et la roulante du mouvement plan sur plan de (S) par rapport à (T).

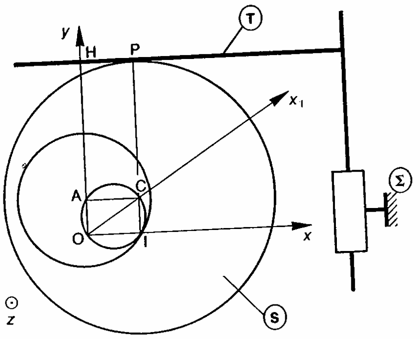


Fig. 3

RÉPONSE

Pour traiter ce problème géométriquement remarquo
que :
— le vecteur vitesse de glissement $\vec{V}(P\in S/T)$ a po
direction $(P, \vec{x})$, donc I se trouve sur la normale P
— Pour un observateur lié à (T) le point O décrit l'a
$(O, \vec{y})$, par conséquent le vecteur vitesse $\vec{V}(O\in S/$
a pour direction $\vec{y}$, donc le point I se trouve sur
normale $(O, \vec{x})$.
Par suite, le centre instantané de rotation I est l'intersection de l'axe $(O, \vec{x})$ et de la droite PC.

ROULANTE : Trajectoire de I dans (S).

L'angle $\widehat{OIC}$ est droit, par conséquent la roulante
le cercle de diamètre OC.

BASE : Trajectoire de I dans (T).
Considérons le point A, quatrième sommet du recta
OICA. Ce point A est fixe par rapport à (T),
AH = CP = rayon de l'excentrique.
De plus, dans le rectangle OICA les diagonales
égales, alors : AI = e. Par conséquent la base es
cercle de centre A de rayon e.

3. PROPRIÉTÉ DE LA BASE ET DE LA ROULANTE

Montrons que la base et la roulante sont
courbes qui roulent sans glisser l'une sur l'a

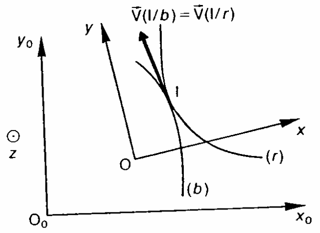


Fig. 4

Dans le mouvement de P par rapport à P_0 s

$$\begin{cases} \text{I le centre instantané de rotation} \\ (b) \text{ la base } (\in R_0) \\ (r) \text{ la roulante } (\in R). \end{cases}$$

Appliquons au point I la relation de comp
des vecteurs vitesse entre (b) et (r) :

$$\vec{V}(I/b) = \vec{V}(I/r) + \vec{V}(I\in r/b)$$

comme $\vec{V}(I\in r/b) = \vec{V}(I\in R/R_0)$

et que : $\vec{V}(I\in R/R_0) = \vec{0}$, par définition du
instantané de rotation I, nous avons :

$$\vec{V}(I/b) = \vec{V}(I/r),$$

or $\vec{V}(I/b)$ a même direction que la tangente
la base (b),
$\vec{V}(I/r)$ a même direction que la tangente
la roulante (r),

par conséquent, la base et la roulante sont deux courbes tangentes. Comme $\vec{V}(I \in r/b) = \vec{0}$ ces deux courbes roulent sans glisser l'une sur l'autre.

REMARQUE

La base et la roulante servent à définir cinématiquement le mouvement plan sur plan. Ce mouvement peut avoir par ailleurs plusieurs solutions technologiques différentes.

Application

Engrenage cylindrique

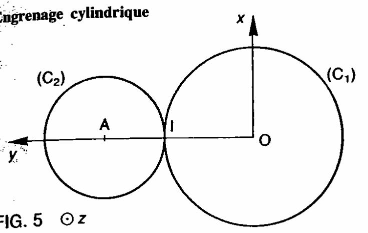


FIG. 5 $\odot z$

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à un bâti (S_0), (S_1) et (S_2) sont 2 roues, non représentées, constituant un engrenage.

(S_1) a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$ avec (S_0). On pose

$$\vec{\Omega}(S_1/R) = \omega_1 \vec{z}$$

(S_2) a une liaison pivot d'axe $(A, \vec{z})$ avec (S_0) telle que

$$\overline{OA} = a\vec{y} \quad (a > 0).$$

On pose $\vec{\Omega}(S_2/R) = \omega_2 \vec{z}$ et $K = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ (K constante).

QUESTION

Déterminer le centre instantané de rotation I, la base et la roulante du mouvement de (S_2) par rapport à (S_1).

RÉPONSE

D'après la relation (7) du *paragraphe 5* du *chapitre 4*, de composition des torseurs cinématiques, on peut écrire :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \{\mathcal{V}(S_2/R)\} - \{\mathcal{V}(S_1/R)\}$$

or $$\{\mathcal{V}(S_2/R)\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/R) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

et $$\{\mathcal{V}(S_1/R)\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1/R) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

Pour retrancher ces deux torseurs, exprimons les au même point O :

$$\{\mathcal{V}(S_2/R)\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/R) \\ \vec{V}(O \in S_2/R) \end{Bmatrix}$$

avec $$\vec{V}(O \in S_2/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S_2/R) \wedge \overline{AO}$$
$$= \vec{0} + \omega_2 \vec{z} \wedge (-a\vec{y}),$$

soit $$\vec{V}(O \in S_2/R) = a\omega_2 \vec{x}.$$

Par conséquent $$\{\mathcal{V}(S_2/R)\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \omega_2 \vec{z} \\ a\omega_2 \vec{x} \end{Bmatrix}$$

et, par suite $$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} (\omega_2 - \omega_1)\vec{z} \\ a\omega_2 \vec{x} \end{Bmatrix}.$$

Le centre instantané de rotation I est le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur Δ, axe central du torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$ *(relation 2 du paragraphe 1.2.1 du chapitre 3)* d'où

$$\overline{OI} = \frac{(\omega_2 - \omega_1)\vec{z} \wedge a\omega_2 \vec{x}}{(\omega_2 - \omega_1)^2} = \frac{a\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}\vec{y} = \frac{aK}{K-1}\vec{y}.$$

Le centre instantané de rotation est situé sur l'axe $(O, \vec{y})$ posons

$$\begin{cases} r_1 = \overline{OI} \\ r_2 = \overline{AI} \quad (r_1 - r_2 = a) \end{cases}$$

alors $r_1 = \dfrac{aK}{K-1}$, $r_2 = \dfrac{a}{K-1}$ et $K = \dfrac{\omega_2}{\omega_1} = \dfrac{r_1}{r_2}$.

Si $K < 0$: le point I est situé à l'intérieur du segment OA.
Si $K > 0$: le point I est situé à l'extérieur du segment OA.
La base est le cercle (C_1) de centre O de rayon $|r_1|$.
La roulante est le cercle (C_2) de centre A de rayon $|r_2|$.
Les cercles (C_1) et (C_2) sont appelés **cercles primitifs** de l'engrenage cylindrique.

REMARQUES

— Le mouvement de l'engrenage est donc défini par le roulement sans glissement des deux cercles primitifs l'un sur l'autre. Reste au constructeur à concevoir des dentures pour réaliser ce mouvement.
— Les cercles primitifs sont des notions liées au mouvement relatif de (S_2) par rapport à (S_1), ce ne sont pas des courbes géométriques liées aux roues. En effet, si nous modifions l'entraxe des roues, les rayons des cercles primitifs changent.

4. PROFILS CONJUGUES

Soit (C) une courbe du plan P. Dans le mouvement de roulement sans glissement de la roulante (r) sur la base (b) on montre en mathématique que la courbe (C) admet en général une enveloppe (C_0) dans le plan P_0. C'est-à-dire qu'il existe dans P_0 une courbe (C_0) qui est constamment tangente à la courbe (C) du plan P.

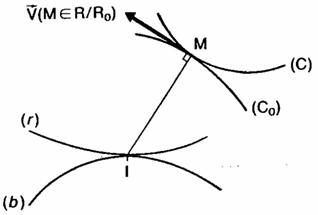


FIG. 6

Les courbes (C) et (C_0) sont appelées **profils conjugués.**
Soit M le point de contact de (C) et (C_0). Au cours du mouvement de P par rapport à P_0 le point M se déplace sur les courbes (C) et (C_0).
Exprimons le vecteur vitesse de glissement entre les profils conjugués (C) et (C_0).
Ce vecteur s'obtient en écrivant la relation entre les vecteurs vitesse des points M et I appartenant à R dans le mouvement de R par rapport à R_0 :

$$\vec{V}(M \in R/R_0) = \vec{V}(I \in R/R_0) + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{IM}.$$

Par définition de I, on a $\vec{V}(I \in R/R_0) = \vec{0}$, donc

$$\vec{V}(M \in R/R_0) = \theta' \vec{z} \wedge \overrightarrow{IM}.$$

Ce qui montre que la tangente au point M aux profils conjugués est perpendiculaire à IM. Ce résultat sera utilisé pour tracer le profil conjugué d'un profil donné.

Cas particulier

Lorsque la courbe (C) se réduit à un point, la courbe (C_0) est la trajectoire de ce point dans le plan P_0 et la normale en ce point à (C_0) passe par le point I.

Application 1

Tracé d'un profil conjugué par la méthode de Reuleaux.

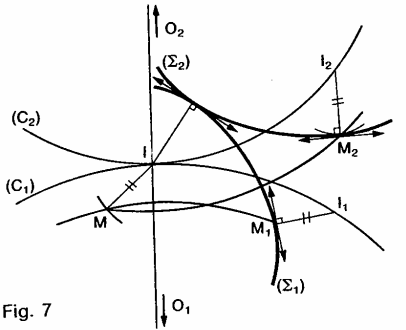


Fig. 7

Soient (C_1) et (C_2) les cercles primitifs d'un engrenage cylindrique droit constitué par 2 roues (S_1) et (S_2).
Notons leur centre respectivement O_1 et O_2 et I leur point de contact.
Soit (Σ_1) un profil lié à la roue (S_1). Cherchons (Σ_2) le profil conjugué de (Σ_1), lié à la roue (S_2).
Soit I_1 un point du cercle primitif (C_1). Lorsque I_1 vient en I, dans le mouvement de roulement sans glissement de (C_2) sur (C_1), le point de (Σ_1) qui est en contact avec (Σ_2) est le point M_1, pied de la perpendiculaire abaissée de I_1 sur (Σ_1).
La position M de M_1 lorsque I_1 vient en I est l'un des points d'intersection des cercles (O_1, O_1M_1) et (I, I_1M_1).
Pour déterminer le point M_2 de (Σ_2) qui vient se confondre avec M_1 lorsque I_1 vient en I, il faut d'abord mettre en place le point I_2 de (C_2) qui vient se confondre avec I. Ce point est tel que $\overset{\frown}{II_2} = \overset{\frown}{II_1}$.
Par suite le point M_2 est un des points d'intersection des cercles (O_2, O_2M) et (I_2, IM).

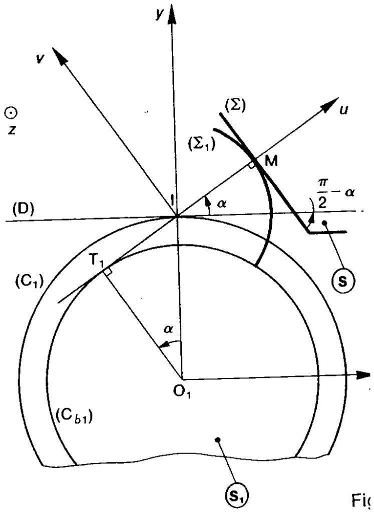
Le point M_2 du profil (Σ_2), conjugué du point M_1, es
défini avec sa tangente.
En recommençant l'opération pour plusieurs points I
situés sur le cercle (C_1) on définit le profil conjugu
(Σ_2) point par point.

REMARQUE

> *L'ensemble des positions des différents points* N
> *obtenus constitue la* ligne d'engrènement *d*
> *l'engrenage.*

Application 2

Génération des profils en développante de cercle d'u
roue dentée par un outil crémaillère.



Fi

Dans le mouvement plan sur plan de la crémaillère
par rapport à la roue (S_1) montrons que le flanc
crémaillère enveloppe dans (S_1) une développant
cercle.
Soit R(O_1, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) un repère lié au bâti (S_0). La
(S_1) a une liaison pivot d'axe (O_1, $\vec{z}$) avec (S_0)
pose : $\vec{\Omega}(S_1/R) = \omega_1 \vec{z}$.
La crémaillère (S) a une liaison glissière de dire
(O_1, $\vec{x}$) avec (S_0). Posons le vecteur vitess
translation rectiligne de (S) par rapport à (S_0) é
$-\omega_1 r_1 \vec{x}$ (r_1 constante positive).
Dans le mouvement plan sur plan de (S) par ra
à (S_1) commençons par chercher le centre insta
de rotation I, la base et la roulante.
Le torseur cinématique du mouvement de (S
rapport à (S_1) s'écrit :

$$\{\mathcal{V}(S/S_1)\} = \{\mathcal{V}(S/S_0)\} - \{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}$$

$$= {}_{O_1}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -\omega_1 r_1 \vec{x} \end{Bmatrix} - {}_{O_1}\begin{Bmatrix} \omega_1 \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_{O_1}\begin{cases} -\omega_1 \vec{z} \\ -\omega_1 r_1 \end{cases}$$

alors la position du centre instantané de rotatior
définie par *(relation 2 paragraphe 1.2.1, chapit*

$$\overrightarrow{O_1I} = \frac{-\omega_1 \vec{z} \wedge -\omega_1 r_1 \vec{x}}{\omega_1^2} = r_1 \vec{y}.$$

Par suite, la base est le cercle (C_1) de centre O_1, de rayon r_1, et la roulante est la droite (D) confondue avec l'axe $(I, \vec{x})$.
Le profil (Σ) du flanc de la crémaillère est une droite inclinée d'un angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$ par rapport à (D). Cherchons l'enveloppe de (Σ) dans (S_1). Le point de contact entre (Σ) et son enveloppe (Σ_1) est le point M pied de la perpendiculaire abaissée de I sur (Σ).
Soit $R_1(I, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ un repère tel que $(\vec{x}, \vec{u}) = \alpha$. Au cours du mouvement de (S) par rapport à (S_1) l'axe $(M, \vec{u})$ passe par I et est tangent en un point T_1 au cercle (C_{b_1}), lié à la roue (S_1), de centre O_1 et de rayon $r_1 \cos \alpha$.
Si nous montrons que l'axe $(M, \vec{u})$ roule sans glisser sur le cercle (C_{b_1}) nous aurons montré que le point M décrit une développante du cercle (C_{b_1}).
Pour cela, appliquons au point M la relation de composition des vecteurs vitesse entre (S) et R_1 :

$$\vec{V}(M/R_1) = \vec{V}(M/S) + \vec{V}(M \in S/R_1).$$

$\vec{V}(M/S)$ a pour direction $\vec{v}$

$$\vec{V}(M \in S/R_1) = -\omega_1 r_1 \vec{x}.$$

Comme $\vec{V}(M/R_1)$ a pour direction $\vec{u}$:

$$\vec{V}(M/R_1) = -\omega_1 r_1 \cos \alpha \vec{u} \tag{1}$$

ainsi que tous les points de l'axe $(M, \vec{u})$.
Effectuons un calcul analogue pour le point T_1 appartenant à S_1 :

$$\begin{aligned}\vec{V}(T_1 \in S_1/R) &= \vec{V}(O_1/R) + \vec{\Omega}(S_1/R) \wedge \overrightarrow{O_1T_1} \\ &= \omega_1 \vec{z} \wedge r_1 \cos \alpha \vec{v}\end{aligned}$$

$$\vec{V}(T_1 \in S_1/R) = -\omega_1 r_1 \cos \alpha \vec{u} \tag{2}$$

Il suffit de comparer (1) et (2) pour voir que le vecteur vitesse de glissement au point T_1 entre le cercle (C_{b_1}) lié à (S_1) et l'axe $(M, \vec{u})$ est nul. Alors le profil conjugué (Σ_1) est une développante du cercle (C_{b_1}).

Vocabulaire

α : angle de pression.
$(I, \vec{u})$: ligne d'engrènement.
(C_{b_1}) : cercle de base de la roue (S_1).

5. MOUVEMENT PLAN SUR PLAN DE TROIS PLANS

Soient trois repères $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et $R_3(O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ liés respectivement à trois solides (S_1), (S_2) et (S_3).
Supposons qu'au cours des mouvements relatifs de ces solides les trois plans $P_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$, $P_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$ et $P_3(O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3)$ restent confondus.
Posons :

$$\vec{z} = \vec{z}_1 = \vec{z}_2 = \vec{z}_3$$
$$\vec{\Omega}(R_2/R_1) = \omega_{21}\vec{z}$$
$$\vec{\Omega}(R_3/R_2) = \omega_{32}\vec{z}$$
$$\vec{\Omega}(R_1/R_3) = \omega_{13}\vec{z}.$$

Notons :

I_{21} Le centre instantané de rotation du mouvement du plan P_2 par rapport au plan P_1.

I_{32} Le centre instantané de rotation du mouvement du plan P_3 par rapport au plan P_1.

I_{13} Le centre instantané de rotation du mouvement du plan P_1 par rapport au plan P_3.

Montrons que les trois centres instantanés de rotation sont alignés.
Dans le mouvement plan sur plan de P_1 par rapport à P_2 :

$$\vec{V}(I_{21} \in R_1/R_2) = \vec{0}.$$

En passant par l'intermédiaire du plan P_3 :

$$\vec{V}(I_{21} \in R_1/R_3) + \vec{V}(I_{21} \in R_3/R_2) = \vec{0}.$$

Dans le mouvement de R_1 par rapport à R_3 appliquons la relation entre les vecteurs vitesse des centres instantanés de rotation I_{21} et I_{13} supposés liés à P_1, donc à R_1 :

$$\begin{aligned}\vec{V}(I_{21} \in R_1/R_3) &= \vec{V}(I_{13} \in R_1/R_3) + \vec{\Omega}(R_1/R_3) \wedge \overrightarrow{I_{13}I_{21}} \\ &= \omega_{13}\vec{z} \wedge \overrightarrow{I_{13}I_{21}}.\end{aligned}$$

De même entre les points I_{21} et I_{32}, supposés liés à R_3, existe la relation :

$$\begin{aligned}\vec{V}(I_{21} \in R_3/R_2) &= \vec{V}(I_{32} \in R_3/R_2) + \vec{\Omega}(R_3/R_2) \wedge \overrightarrow{I_{32}I_{21}} \\ &= \omega_{32}\vec{z} \wedge \overrightarrow{I_{32}I_{21}}.\end{aligned}$$

Par suite :

$$\vec{z} \wedge \left(\omega_{13}\overrightarrow{I_{13}I_{21}} + \omega_{32}\overrightarrow{I_{32}I_{21}}\right) = \vec{0}.$$

Les deux vecteurs $\overrightarrow{I_{13}I_{21}}$ et $\overrightarrow{I_{32}I_{21}}$ ont donc même direction. **Par suite les trois centres instantanés de rotation I_{21}, I_{32} et I_{13} sont alignés.**

Application

Considérons un mécanisme plan constitué de trois solides (S_1), (S_2), (S_3) et d'un bâti (S_0).

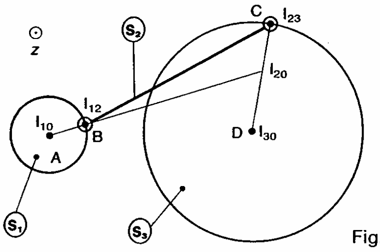


Fig. 9.

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti (S_0).
(S_1) et (S_0) ont une liaison pivot d'axe $(A, \vec{z})$.
(S_2) et (S_1) ont une liaison pivot d'axe $(B, \vec{z})$.
(S_3) et (S_2) ont une liaison pivot d'axe $(C, \vec{z})$.
(S_0) et (S_3) ont une liaison pivot d'axe $(D, \vec{z})$.
Déterminons le centre instantané de rotation I_{20} du mouvement (S_2) par rapport à (S_0).
En appliquant le résultat précédent :

$$I_{10} = A, \quad I_{12} = B$$

par conséquent, I_{20} est sur la droite AB.
D'autre part :

$$I_{23} = C, \quad I_{30} = D$$

par conséquent, I_{20} est sur la droite CD.
Finalement I_{20} est à l'intersection des droites AB et CD.

A SAVOIR

— Le centre instantané de rotation I du mouvement du plan P sur le plan P_0 est le point situé dans P et P_0, tel que :

$$\vec{V}(I \in P/P_0) = \vec{0}.$$

— La trajectoire du point I dans le plan P_0 est appelé base du mouvement de P par rapport à P_0. La trajectoire du point I dans le plan P est appelé roulante du mouvement de P par rapport à P_0.

— La base et la roulante sont deux courbes qui roulent sans glisser l'une sur l'autre.

— La tangente au point de contact M de deux profils conjugués est perpendiculaire à IM.

— Dans un mouvement plan sur plan de trois plans, les trois centres instantanés de rotation existant entre ces plans sont alignés.

PROBLÈME RÉSOLU

Le dessin partiel d'une pompe à débit réglable est donné *figure 10*.

L'arbre moteur a une liaison pivot d'axe $(A, \vec{z})$ avec le bâti ⓪.

L'excentrique ①, lié à l'arbre moteur, entraîne une bielle ② dont l'axe BD passe constamment par un point C fixe par rapport au bâti ⓪.

Cette bielle ② anime, par l'intermédiaire d'un maneton ⑤, le piston ③ d'un mouvement de translation rectiligne alternatif par rapport au bâti ⓪.

(Le réglage de l'amplitude de la course du piston ③ est obtenue par déplacement de la position du point C parallèlement à l'axe de la vis de réglage, symbolisé sur le dessin.)

QUESTION 1

Déterminer graphiquement, dans la configuration proposée, le centre instantané de rotation I_{20} du mouvement de la bielle ② par rapport au bâti ⓪.

RÉPONSE

Le centre instantané de rotation I_{20} sera obtenu géométriquement si l'on détermine les directions de deux vecteurs vitesse de deux points de la bielle ② par rapport au bâti ⓪.

Le point B, centre de rotation de la bielle ② par rapport à l'excentrique ① décrit dans ⓪ un cercle

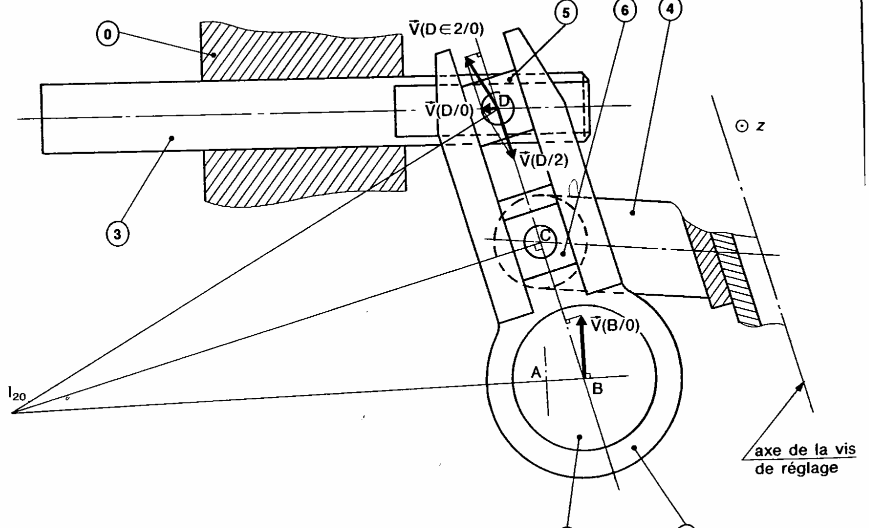


Fig. 10

de centre A et de rayon AB. Par conséquent, le vecteur vitesse $\vec{V}(B/0)$ est perpendiculaire à AB, et par suite, I_{20} se trouve sur la normale en B à $\vec{V}(B/0)$, c'est-à-dire sur le rayon AB.

Au point C, centre de l'articulation, le problème est plus délicat car le point C n'appartient pas, à tout instant, à la bielle ②.

Appliquons la relation de composition des vecteurs vitesse au point C entre les solides ② et ⓪ :

$$\vec{V}(C/0)=\vec{V}(C/2)+\vec{V}(C\in 2/0).$$

Le vecteur vitesse absolue $\vec{V}(C/0)$ est nul car le point C est fixe par rapport au bâti ⓪.

Alors $\vec{V}(C\in 2/0)=-\vec{V}(C/2)$.

La liaison entre la bielle ② et le maneton ⑥ étant glissière d'axe BD, le vecteur vitesse relative $\vec{V}(C/2)$ a pour direction BD.

Par suite, le vecteur vitesse d'entraînement $\vec{V}(C\in 2/0)$ a également pour direction BD. Donc I_{20} se trouve sur la perpendiculaire en C à BD. D'où la construction du centre instantané de rotation I_{20} :

QUESTION 2

Déterminer graphiquement la vitesse de translation du piston ③ par rapport au bâti ⓪.

RÉPONSE

Appliquons au point D la relation de composition des vecteurs vitesse entre les solides ② et ⓪.

$$\vec{V}(D/0)=\vec{V}(D/2)+\vec{V}(D\in 2/0).$$

Le vecteur vitesse absolue $\vec{V}(D/0)$ représente la vitesse de translation du piston ③ par rapport au bâti ⓪. Sa direction est celle de l'axe du piston.

La liaison entre la bielle ② et le maneton ⑤ étant glissière d'axe BD, le vecteur vitesse relative $\vec{V}(D/2)$ a pour direction BD.

Le vecteur vitesse d'entraînement $\vec{V}(D\in 2/0)$ est perpendiculaire à DI_{20}. De plus, si on applique entre le point B et le point D, supposé lié à ② à l'instant considéré, le théorème de l'équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse des points d'un solide, on peut déterminer complètement le vecteur vitesse $\vec{V}(D\in 2/0)$. Et par suite, construire le vecteur vitesse $\vec{V}(D/0)$.

CONSEILS POUR LA RÉSOLUTION

— Le centre instantané de rotation se détermine souvent géométriquement en cherchant les trajec-oires dans P_0 de deux points du plan P. Il se reuve alors à l'intersection des normales en ces oints à leur trajectoire.

— Dans la recherche de la base et de la roulante d'un mouvement plan sur plan vérifier que ces deux courbes sont bien tangentes en un point.

— Pour construire le profil conjugué d'un profil donné par la méthode de Reuleaux, prendre soin de porter des arcs égaux sur les deux cercles primitifs et non pas des cordes égales.

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 — Le schéma *figure 11* représente le variateur GUSA défini dans l'*exercice 10 du chapitre 1*. Ce variateur transforme le mouvement de rotation continu de l'arbre ① en un mouvement de rotation intermittent de l'arbre ⑦.

QUESTIONS

Connaissant la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée ① par rapport au bâti ⓪ : $N_{1/0}$, déterminer dans la configuration de la figure :

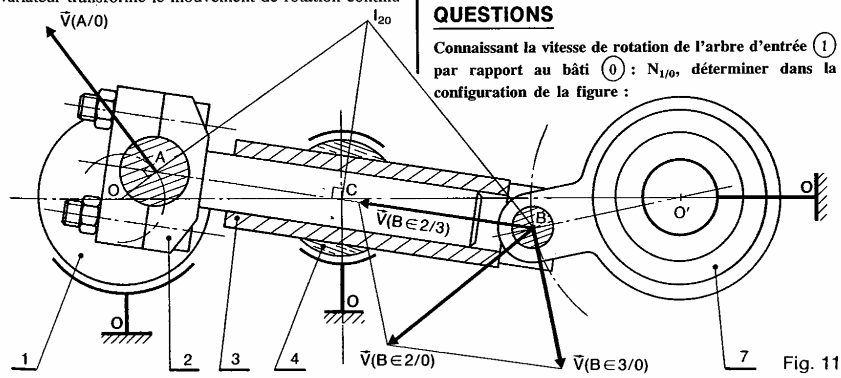


Fig. 11

1° Le centre instantané de rotation I_{20} du mouvement de la demi-bielle ② par rapport au bâti ⓪.

2° La vitesse de rotation, à l'instant considéré, de l'arbre de sortie ⑦ par rapport au bâti ⓪ : $N_{7/0}$, sachant que $N_{1/0} = 2\,000$ tr/min.

3° Le vecteur vitesse de translation de la demi-bielle ② par rapport à l'autre demi-bielle ③.

RÉPONSES

1° Pour déterminer géométriquement I_{20} il faut connaître les directions des vecteurs vitesse de 2 points de la demi-bielle ② par rapport au bâti ⓪.
Le point A décrit le cercle de centre O et de rayon OA, par conséquent $\vec{V}(A/0)$ est perpendiculaire à OA et I_{20} se trouve sur le rayon OA.
Pour déterminer la direction du vecteur vitesse du point C, supposé lié à ②, par rapport à ⓪, appliquons au point C la relation de composition des vecteurs vitesse entre ②, ④ et ⓪

$$\vec{V}(C \in 2/0) = \vec{V}(C \in 2/4) + \vec{V}(C \in 4/0).$$

La liaison entre ④ et ⓪ étant rotule de centre O, on a

$$\vec{V}(C \in 4/0) = \vec{0}.$$

La liaison entre ② et ④ étant pivot glissant d'axe AB, $\vec{V}(C \in 2/4)$ a pour direction AB.
Par suite $\vec{V}(C \in 2/0)$ a pour direction AB. I_{20} se trouve donc sur la perpendiculaire en C à AB. D'où la construction de I_{20}.

2° Le mouvement de ② par rapport à ⓪ étant, à l'instant considéré, une rotation autour de I_{20} on peut construire le vecteur vitesse $\vec{V}(B \in 2/0)$ connaissant le vecteur vitesse $\vec{V}(A/0)$.
Pour déterminer le vecteur vitesse du point B par rapport à ⓪ appliquons en ce point la relation de composition des vecteurs vitesse entre ②, ③ et ⓪.

$$\vec{V}(B \in 2/0) = \vec{V}(B \in 2/3) + \vec{V}(B \in 3/0).$$

La liaison entre ② et ③ étant pivot glissant d'axe AB, $\vec{V}(B \in 2/3)$ a pour direction AB.
Le vecteur $\vec{V}(B \in 3/0) = \vec{V}(B/0)$ est perpendiculaire à O'B.
D'où la construction qui nous détermine ces deux vecteurs.
Par suite : $N_{7/0} = 470$ tr/min.

3° Le vecteur vitesse de translation de ② par rapport à ③ est le vecteur $\vec{V}(B \in 2/3)$ déjà déterminé.

2 — Dans l'opération de rectification d'un profil en développante de cercle de la denture droite d'un pignon, étudions le mouvement plan sur plan du pignon par rapport au bâti de la rectifieuse *(figure 12).*
Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct lié au bâti (B) de la rectifieuse.

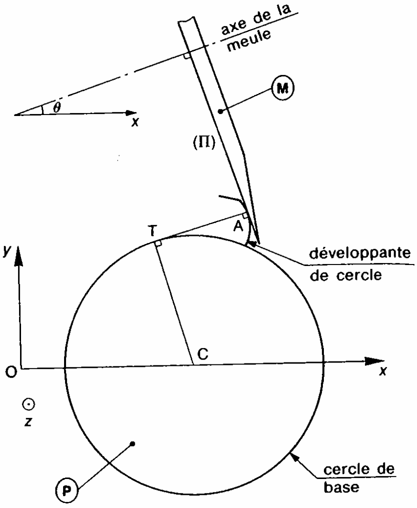


Fig. 12

Pendant le mouvement de coupe, le centre C du pignon (P) est animé d'un mouvement de translation rectiligne d'axe $(O, \vec{x})$ par rapport au bâti (B). De plus, le pignon (P) est animé d'un mouvement de rotation de direction $\vec{z}$ par rapport au bâti (B), de telle façon que le profil de la dent reste constamment en contact avec le plan (Π) de la meule (M). ?
La meule (M) a une liaison pivot avec le bâti (B), l'axe de cette liaison est situé dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ et est incliné d'un angle θ par rapport à l'axe $(O, \vec{x})$.

QUESTIONS

1° Dans le mouvement plan sur plan du pignon (P) par rapport au bâti (B), déterminer :

***a*) le centre instantané de rotation,**

***b*) la base et la roulante.**

2° Déterminer le rayon de la roulante, en fonction de l'angle θ et des caractéristiques du pignon :

- **— nombre de dents : Z**
- **— module de taille : *m***
- **— angle de pression de taille : α.**

Effectuer l'application numérique pour :

$$\theta = 15°, \quad Z = 31 \text{ dents}, \quad m = 8 \text{ mm}, \quad \alpha = 20°.$$

RÉPONSES

1° *a*) Le centre instantané de rotation I est à l'intersection de AT et de la normale en C à $(O, \vec{x})$.

b) *Base :* droite parallèle à $(O, \vec{x})$, à une distance CI.

Roulante : cercle de centre C et de rayon CI.

2° Le rayon du cercle de la roulante est :

$$CI = \frac{mZ}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \theta} \quad \text{soit} \quad CI = 120{,}63 \text{ mm}.$$

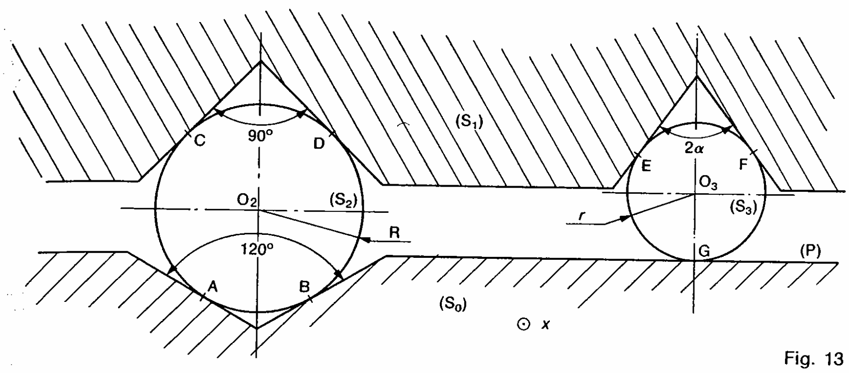


Fig. 13

3. — La *figure 13* représente le guidage par billes d'une table de machine outil (S_1) par rapport au bâti (S_0). Les billes (S_2) de rayon R roulent sans glisser sur les plans d'une rainure en vé d'angle égal à 90° usinée dans (S_1) et sur les plans d'une autre rainure d'angle égal à 120° usinée dans (S_0). Les billes (S_3) de rayon r roulent sans glisser sur les plans d'une rainure en vé d'angle égal à 2α usinée dans (S_1) et sur le plan (P) de (S_0).

QUESTIONS

Connaissant le vecteur vitesse de translation de la table par rapport au bâti : $\vec{V}(S_1/S_0) = V\vec{x}$, déterminer :

1° Les vecteurs vitesse des centres des différentes billes par rapport au bâti : $\vec{V}(O_2/S_0)$ et $\vec{V}(O_3/S_0)$.

2° Lors du mouvement, à quelle condition la figure constituée par les centres des billes est-elle géométriquement invariable?

RÉPONSES

1° $\vec{V}(O_2/S_0) = (3 - \sqrt{6})\,V\vec{x}$

$$\vec{V}(O_3/S_0) = \frac{V}{1 + \sin\alpha}\,\vec{x}.$$

2° Pour que la figure constituée par les centres des billes reste géométriquement invariable, il faut que les vitesses de chaque centre par rapport au bâti soient égales, d'où $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

4. — Un mécanisme intermittent à croix de Malte extérieure est représenté *figure 14.*

L'arbre moteur (S_1) a une liaison pivot d'axe $(O_1, \vec{z})$ avec le bâti (S) et tourne à vitesse angulaire constante $\omega = -30$ rad/s.

L'arbre récepteur (S_2) a une liaison pivot d'axe $(O_2, \vec{z})$ avec le bâti (S), telle que $O_1O_2 = 100$ mm.

(S_2) est entraîné en rotation par un galet, en liaison pivot d'axe $(A, \vec{z})$ avec (S_1) $(O_1A = 70$ mm$)$, qui se déplace dans une rainure de (S_2), d'axe O_2A.

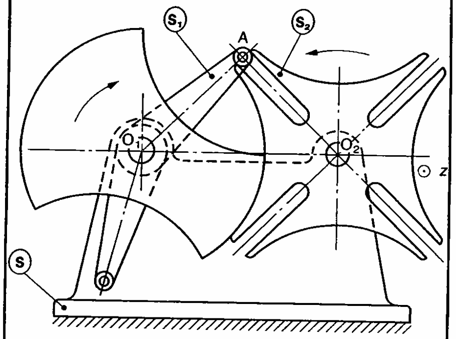


Fig. 14

QUESTIONS

Dans la configuration où l'angle $(\overrightarrow{O_1O_2}, \overrightarrow{O_1A})$ est égal à 30°, déterminer :

1° le centre instantané de rotation I_{12} du mouvement de (S_1) par rapport à (S_2),

2° le vecteur vitesse d'entraînement du point A dans le mouvement de (S_2) par rapport à (S) : $\vec{V}(A \in S_2/S)$.
En déduire la valeur de la vitesse angulaire instantanée de rotation de l'arbre récepteur (S_2) par rapport au bâti (S).

3° Le vecteur rotation $\vec{\Omega}(S_2/S_1)$.

4° Le vecteur vitesse du point O_2 par rapport à (S_1) : $\vec{V}(O_2/S_1)$.

RÉPONSES

1° I_{12} est sur la normale en A à AO_2 et sur la droite O_1O_2 (I_{12} est aligné avec $I_{10} = O_1$ et $I_{20} = O_2$) *figure 15).*

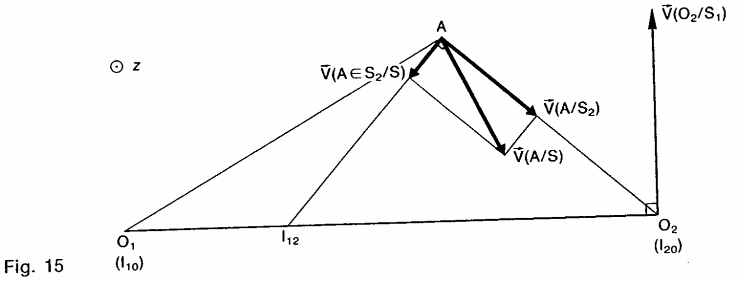

⊙ z
A
$\vec{V}(A \in S_2/S)$
$\vec{V}(A/S_2)$
$\vec{V}(A/S)$
$\vec{V}(O_2/S_1)$
O_1
(I_{10})
I_{12}
O_2
(I_{20})

Fig. 15

2° Voir *figure 15*.

$$\|\vec{V}(A \in S_2/S)\| = 663 \text{ mm/s}$$

$$\vec{\Omega}(S_2/S) = \omega_2 \vec{z}, \quad \text{avec} \quad \omega_2 = 12{,}6 \text{ rad/s}.$$

3° $\vec{\Omega}(S_2/S_1) = 42{,}6\ \vec{z}$ (rad/s).

4° $\vec{V}(O_2/S_1) = \vec{\Omega}(S_2/S_1) \wedge \overrightarrow{I_{12}O_2}$

$$\|\vec{V}(O_2/S_1)\| = 3\,263 \text{ mm/s}.$$

5 — Un véhicule à quatre roues roulant sur une surface plane est schématisé de la façon suivante *(figure 16)*.

Le chassis est un solide (S). A_1, A_2, A_3, A_4 sont quatre points liés à (S) formant un rectangle. Soit $R(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à (S), le point C est le milieu du segment A_3A_4.

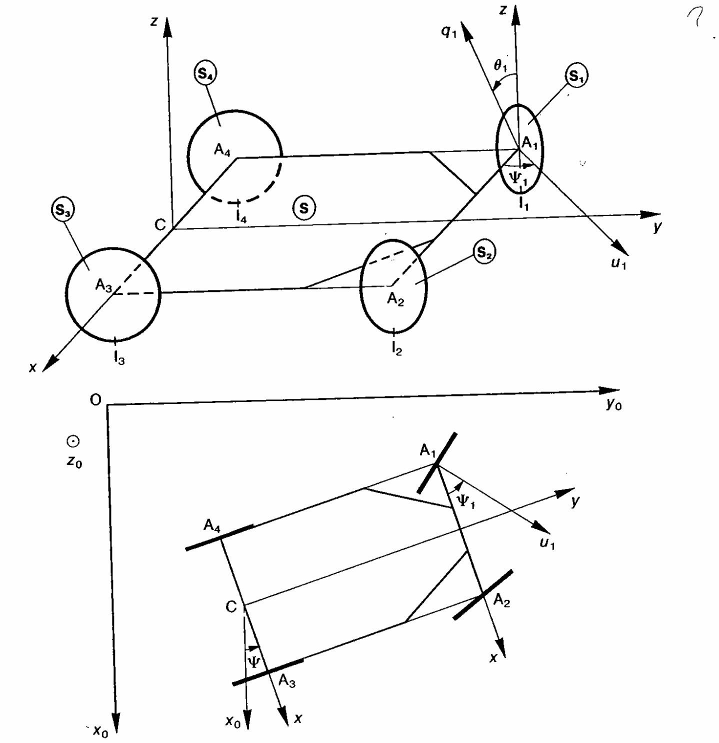

z
q_1
θ_1
z
S_1
S_4
A_4
A_1
Ψ_1
I_1
I_4
S
C
y
u_1
S_3
S_2
A_3
A_2
x
I_3
I_2
O
y_0
⊙
z_0
A_1
Ψ_1
y
u_1
A_4
C
A_2
x
Ψ
A_3
x_0
x
x_0

Fig. 16

On pose : $\overrightarrow{A_4A_3} = 2d\vec{x}$ et $\overrightarrow{A_3A_2} = l\vec{y}$.

($2d$ est la voie du véhicule et l l'empattement).
Les quatre roues sont assimilées à des disques identiques, d'épaisseur négligeable, de rayon r.
Chaque roue (S_i) a pour centre A_i et pour axe une droite D_i, située dans le plan du rectangle $A_1A_2A_3A_4$.
Soit $(A_i, \vec{q}_i)$ un axe lié à la roue (S_i) et situé dans son plan, on pose :

$$(\vec{z}, \vec{q}_i) = \theta_i$$

les roues arrière (S_3) et (S_4) ont pour axe A_3A_4.
Soit $\vec{u}_i$ ($i = 1$ ou 2) un vecteur unitaire orientant l'axe D_i de la roue avant (S_i).
On pose : $(\vec{x}, \vec{u}_i) = \Psi_i$.
Ce véhicule se déplace sur le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ du repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Chaque roue est en contact avec ce plan en un point I_i de sa circonférence.
On pose $(\vec{x}_0, \vec{x}) = \Psi$.
Les angles Ψ, Ψ_i, θ_i sont des fonctions du temps.
Soit I le centre instantané de rotation du mouvement du plan $(C, \vec{x}, \vec{y})$ de (S) par rapport à R_0. (On supposera que I existe.)

QUESTIONS

1° A quelle condition I existe-t-il?

2° Exprimer $\vec{V}(A_1/R_0)$ en fonction de $\vec{\Omega}(S/R_0)$ et de $\overrightarrow{IA_1}$.

3° Écrire l'expression du vecteur vitesse de glissement $\vec{V}(I_1 \in S_1/R_0)$. (On n'effectuera pas les produits vectoriels.)

4° Montrer que si le vecteur vitesse de glissement $\vec{V}(I_1 \in S_1/R_0)$ est nul, l'axe D_1 de la roue (S_1) passe par I.
Dans la suite de l'exercice on supposera que les 4 roues roulent sans glisser sur le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

5° On pose $\overrightarrow{IC} = \rho\vec{x}$ et $\vec{V}(C/R_0) = V\vec{y}$.
(ρ est le rayon du virage et V la vitesse du véhicule.)
Quelle relation y a-t-il entre V et ρ?

6° Déterminer les vitesses de rotation θ'_3 et θ'_4 des roues arrière (S_3) et (S_4) en fonction de ρ, r, d et V.

RÉPONSES

1° I existe si la résultante générale $\vec{\Omega}(S/R_0)$ du torseur cinématique du mouvement de (S) par rapport à R_0 n'est pas nulle.
Comme $\vec{\Omega}(S/R_0) = \Psi'\vec{z}_0$, la condition est $\Psi' \neq 0$.

2° $\vec{V}(A_1/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{IA_1}$.

3° $\vec{V}(I_1 \in S_1/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{IA_1} + \vec{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \overrightarrow{A_1I_1}$.

4° On montre que :

$$\overrightarrow{IA_1} = -\frac{r\theta'_1}{\Psi'}\,\vec{u}_1.$$

Ce qui prouve que l'axe D_1 passe par I.

5° $V = \rho\psi'$.

6° $\theta'_3 = -\dfrac{V}{r}\left(1 + \dfrac{d}{\rho}\right)$

et $\theta'_4 = -\dfrac{V}{r}\left(1 - \dfrac{d}{\rho}\right)$.

EXERCICES SANS RÉPONSES

6 — Une presse à décolleter est représentée *figure 17.* L'action du vérin pneumatique permet le déplacement du poinçon ⑤.

Le cylindre ① du vérin est en liaison pivot d'axe $(A, \vec{z})$ avec le bâti ⓪. La bielle ③ est articulée; en B avec la tige ② du vérin, en C avec la biellette ④ et en E avec le poinçon ⑤ qui peut coulisser dans le bâti ⓪ suivant l'axe $\vec{y}$. La biellette ④ est elle-même articulée en D avec le bâti ⓪. On donne, en millimètres :

$\overrightarrow{AD} = -43\vec{x} + 127\vec{y}$; $BC = 90$; $BE = 103$; $CD = 45$.

QUESTIONS

Dans la position de la figure où le poinçon ⑤ est tel que $\overrightarrow{AE} = -70\vec{x} + 190\vec{y}$ et que son vecteur vitesse de translation par rapport au bâti ⓪, dans la phase de travail, est égal à :

$$\vec{V}(E/0) = -50\vec{y} \qquad \text{(en mm/s).}$$

Déterminer

1° Le centre instantané de rotation I_{30} du mouvement de la bielle ③ par rapport au bâti ⓪.

2° Le vecteur vitesse de translation de tige ② par rapport au cylindre ①.

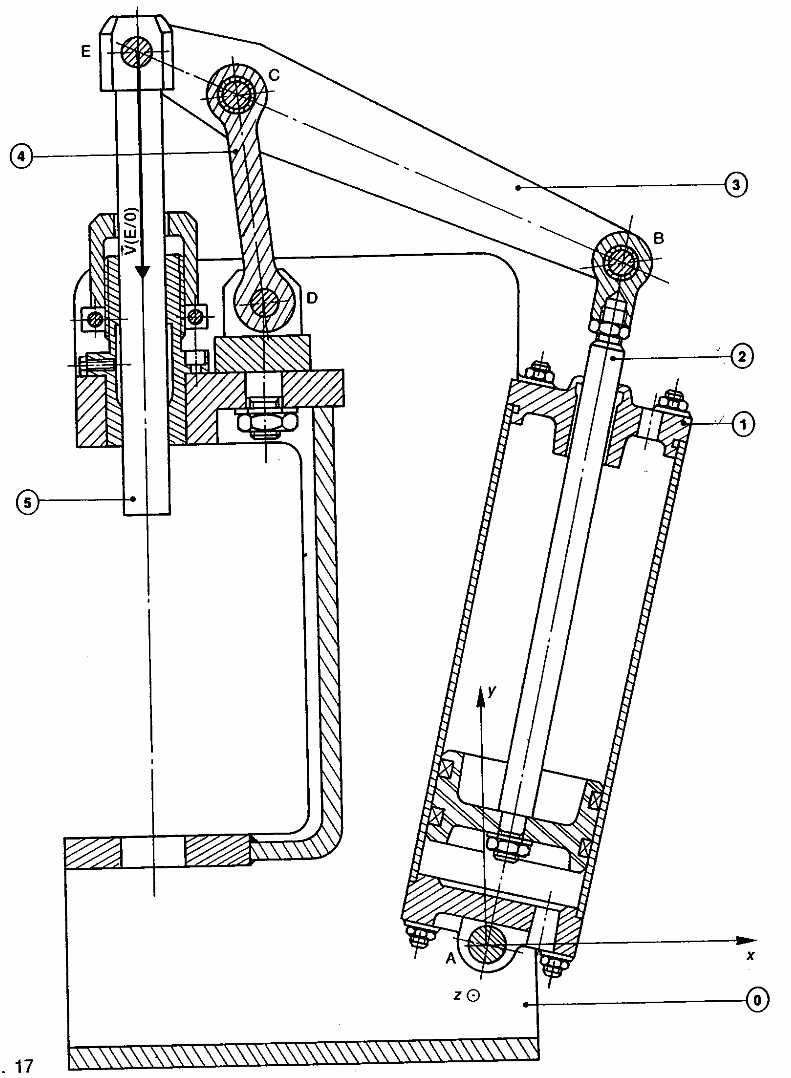


Fig. 17

7 — Soit un étau dont le mors mobile (S_1) est commandé de manière automatique par le système articulé plan représenté sur la *figure 18*.

Le mors (S_1), la biellette (S_4) et la biellette (S_5) sont liés à la partie fixe (S_0) de l'étau par des liaisons pivot respectivement d'axe$(O_1, \vec{z})$, $(O_4, \vec{z})$, $(O_5, \vec{z})$. La bielle (S_3) est articulée; en A avec la biellette (S_4) qui donne le mouvement au mécanisme, en B avec (S_5) en D avec la biellette (S_2), elle-même articulée en avec le mors (S_1).

On donne en millimètres :

$$\overrightarrow{O_1O_4} = 95\vec{x} + 50\vec{y} \text{ et } \overrightarrow{O_1O_5} = 130\vec{x} + 70\vec{y}$$

$$O_4A = 30; \quad O_5B = 60; \quad AB = 16; \quad AD = 50$$

$$DE = 30; \quad O_1E = 50; \quad EF = 55.$$

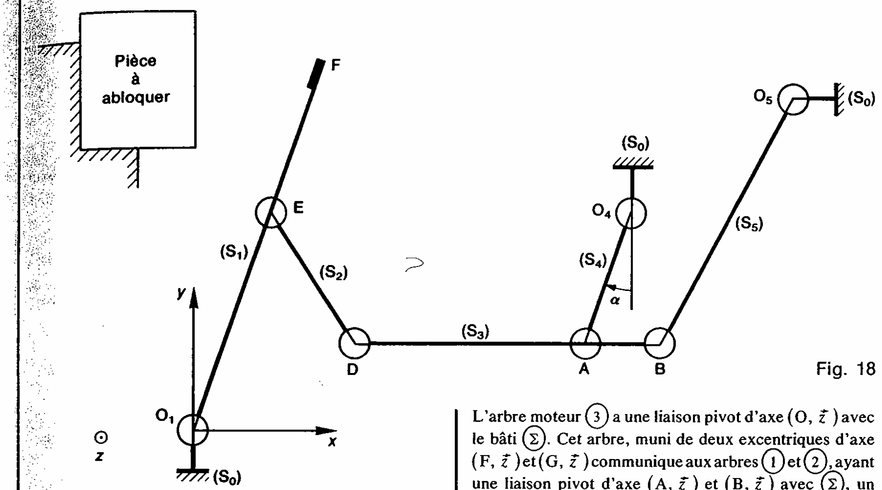

Pièce
à
abloquer
F
E
(S_1)
(S_2)
D
(S_3)
A
B
O_4
(S_4)
α
(S_0)
O_5
(S_5)
y
x
z
O_1

Fig. 18

QUESTIONS

Connaissant le vecteur rotation de la biellette (S_4) par rapport au mors fixe (S_0) : $\vec{\Omega}(S_4/S_0) = -10\vec{z}$ déterminer dans la configuration de la figure où $\alpha = -20°$:

1° Le centre instantané de rotation du mouvement de la bielle (S_3) par rapport au mors fixe (S_0).

2° Le vecteur vitesse du point F du mors mobile (S_1) par rapport au mors fixe (S_0) : $\vec{V}(F/S_0)$.

8. Étude du mouvement des griffes d'un piqueuse plate schématisée *figure 19.* (Les griffes servent à faire avancer le tissu lorsque l'aiguille est en position relevée.)

L'arbre moteur ③ a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$ avec le bâti (Σ). Cet arbre, muni de deux excentriques d'axe $(F, \vec{z})$ et $(G, \vec{z})$ communique aux arbres ① et ②, ayant une liaison pivot d'axe $(A, \vec{z})$ et $(B, \vec{z})$ avec (Σ), un mouvement de rotation alternatif par l'intermédiaire de biellettes.

L'axe $(E, \vec{z})$ de la biellette ED a une position fixe par rapport à (Σ) dans le mouvement considéré, mais sa position est réglable pour obtenir des points de longueurs différentes.

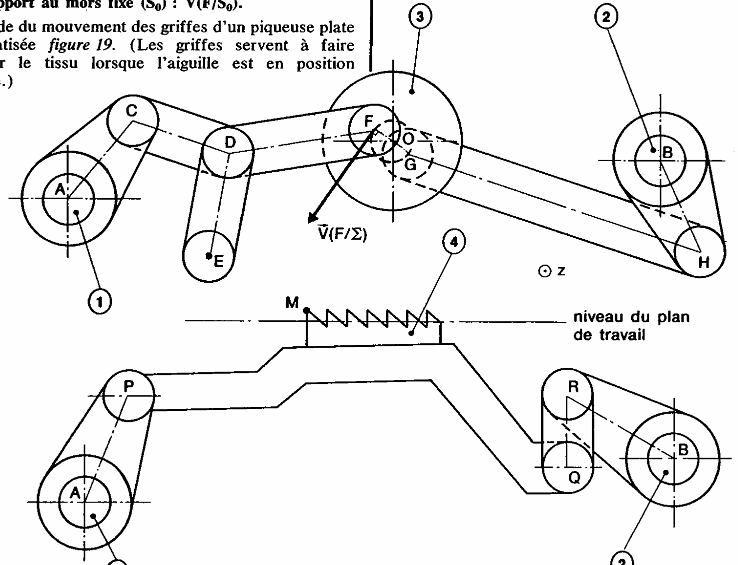

③
②
C
D
F
O
G
B
A
E
H
$\vec{V}(F/\Sigma)$
①
④
z
M
niveau du plan de travail
P
R
Q
B
A
①
②

Fig. 19

Les arbres ① et ② communiquent leur mouvement au porte griffe, auquel est liée la griffe ④, de façon que les points de la griffe aient une trajectoire cyclique de forme sensiblement rectangulaire.

QUESTIONS

Connaissant, à un instant donné, le vecteur vitesse du point F de l'arbre moteur ③ par rapport au bâti (Σ), déterminer graphiquement dans la configuration proposée :

1° Les vecteurs vitesse : $\vec{V}(C/\Sigma)$ et $\vec{V}(H/\Sigma)$.

2° Le vecteur vitesse : $\vec{V}(Q/\Sigma)$.

3° Le centre instantané de rotation du mouvement de la griffe ④ par rapport au bâti (Σ).

4° Le vecteur vitesse du point M de la griffe ④ par rapport au bâti (Σ) : $\vec{V}(M/\Sigma)$.

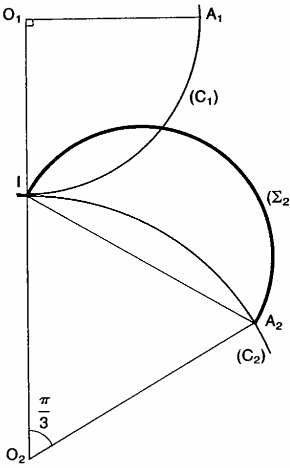


Fig. 20

9. Soient (C_1) et (C_2) les cercles primitifs, en contact en un point I, d'un engrenage cylindrique droit constitué par deux roues (S_1) et (S_2) *(figure 20).*

Notons leur centre O_1 et O_2 et leur rayon r_1 et r_2 respectivement. On donne :

$$\begin{cases} r_1 = 50 \text{ mm} \\ r_2 = 75 \text{ mm.} \end{cases}$$

Sur le secteur angulaire $\widehat{IO_2A_2}$, d'angle $\frac{\pi}{3}$, le profil (Σ_2) lié à la roue (S_2) est un demi-cercle de diamètre IA_2.

QUESTIONS

1° Déterminer le profil (Σ_1) conjugué du profil (Σ_2), lié à la roue (S_1), par la méthode de Reuleaux.

2° En déduire la ligne d'engrènement relative à ces profils conjugués.

10. La *figure 21* représente un réducteur CYCLO.

L'excentrique ① est moteur. Il est animé par rapport au bâti ⓪ d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire ω_1 autour de l'axe $(O, \vec{x})$.

Le disque ② a une liaison pivot d'axe $(A, \vec{x})$ avec l'excentrique ① (excentration : a).

La rotation de ① entraîne le disque ② dont la périphérie, cycloïdale, roule sans glisser sur 10 galets ③, fixes par rapport au bâti ⓪.

Le mouvement du disque ② est transmis à 8 doigts liés à l'arbre récepteur ④, qui entraînent cet arbre en rotation autour de l'axe $(O, \vec{x})$, à la vitesse angulaire ω_4 par rapport au bâti ⓪.

Le mouvement du disque ② par rapport au bâti ⓪ est équivalent au roulement sans glissement d'un disque de centre A de rayon r_2 sur une couronne d'axe $(O, \vec{x})$ liée au bâti ⓪, de rayon $r_2 + a$.

Le mécanisme est tel que le disque ② n'a aucun mouvement relatif de rotation par rapport à l'arbre récepteur ④.

QUESTION

Montrer que le rapport de réduction du mécanisme est $\frac{\omega_4}{\omega_1} = -\frac{a}{r_2}$.

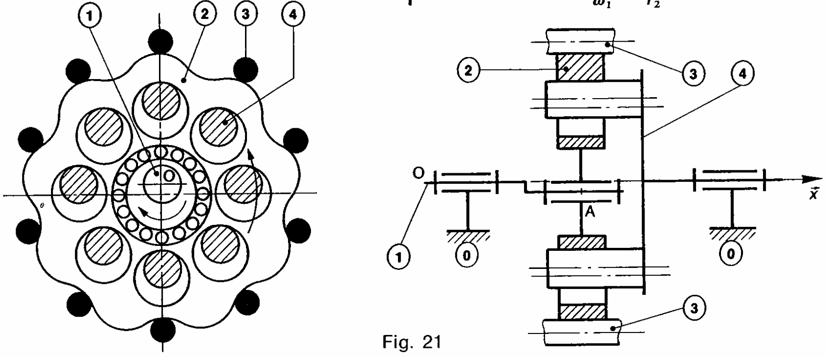


Fig. 21

2^{e} partie

STATIQUE

1 modélisation des actions mécaniques

Le but de ce chapitre est de choisir une représentation mathématique des actions mécaniques, d'étudier l'action mécanique de la pesanteur et de définir les efforts que peuvent transmettre les liaisons, afin par la suite, de procéder à leur dimensionnement.

1. REPRÉSENTATION MATHÉMATIQUE DES ACTIONS MÉCANIQUES

1.1. DÉFINITION D'UNE ACTION MÉCANIQUE

On appelle action mécanique toute cause susceptible de maintenir un corps au repos, ou de créer un mouvement, ou de déformer un corps.

1.2. CLASSIFICATIONS DES ACTIONS MÉCANIQUES

— Les actions mécaniques sont de deux sortes :
- **— actions mécaniques à distance (champ de pesanteur, champ électromagnétique, ...),**
- **— actions mécaniques de contact (liaisons surfaciques, ...).**

— On distingue les actions mécaniques extérieures et intérieures à un ensemble de corps.

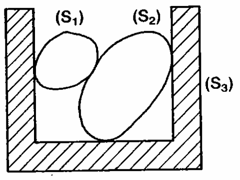


Fig. 1

Soient 3 corps (S$_1$), (S$_2$), (S$_3$) et soit (E) l'ensembl constitué par les 2 corps (S$_1$) et (S$_2$).
- **— L'action mécanique de (S$_3$) sur (S$_2$) est extérieure à (E).**
- **— L'action mécanique de (S$_1$) sur (S$_2$) est intérieure à (E).**

REMARQUE

> *Cette dernière classification est nécessaire pou appliquer le principe fondamental de la statiqu à un ensemble de corps (voir chapitre 2).*

1.3. PREMIER PRINCIPE DE LA STATIQUE

Certaines actions mécaniques peuvent être caractérisées par un vecteur lié.

EXEMPLE

Considérons un corps (S) suspendu à un câble.

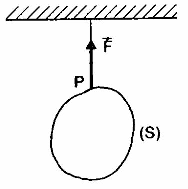


Fig. 2

Dans ce cas, l'action mécanique du câble sur (S) e caractérisée par le vecteur lié $(P, \vec{F})$.

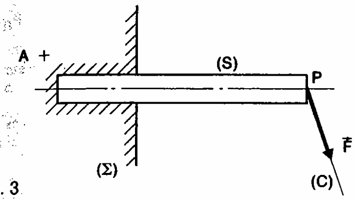
Définition

Une force est une action mécanique représentée par un vecteur lié.

Mais la notion de vecteur lié est insuffisante à elle seule pour représenter complètement d'autres actions mécaniques.

EXEMPLE

Supposons qu'à l'extrémité d'une poutre (S), encastrée dans un bâti (Σ), on exerce par l'intermédiaire d'un cable (C) la force $(P, \vec{F})$. Dans ce cas l'action mécanique de (S) sur (Σ) dépend de la position de la force par rapport à (Σ). C'est pourquoi on est amené à introduire la notion de moment de la force $(P, \vec{F})$ par rapport à un point A, quelconque, pour compléter la caractérisation de l'action mécanique de (C) sur (S).



ig. 3

Par suite, on représente l'action mécanique du cable ur la poutre par les deux vecteurs :

$$\vec{R}(C \longrightarrow S)=\vec{F}$$
$$\vec{M}_A(C \longrightarrow S)=\overrightarrow{AP}\wedge\vec{F}.$$

REMARQUE

Si le moment de la force est écrit au point P *les 2 vecteurs sont les suivants :*

$$\vec{R}(C \longrightarrow S)=\vec{F}$$
$$\vec{M}_P(C \longrightarrow S)=\vec{0}.$$

'une façon générale, si un corps (S) subit de la art d'un ensemble matériel (E) une action mécanique représentée par un système de *n* forces $(P_i, \vec{F}_i)$ n caractérise globalement cette action mécanique ar les deux vecteurs suivants :

$$\begin{cases}\vec{R}(E \longrightarrow S)=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\\[2ex]\vec{M}_A(E \longrightarrow S)=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{AP_i}\wedge\vec{F}_i.\end{cases}$$

n dit alors que l'action mécanique de (E) sur (S) st **équivalente,** au point A, aux deux vecteurs $(E \longrightarrow S)$ et $\vec{M}_A(E \longrightarrow S)$.

éfinitions

$\vec{R}(E \longrightarrow S)$ est appelé la *résultante générale* de l'action mécanique de (E) sur (S).

$\vec{M}_A(E \longrightarrow S)$ est appelé le *moment résultant au point* A de l'action mécanique de (E) sur (S).

Propriété

Le moment résultant s'écrit au point B

$$\vec{M}_B(E \longrightarrow S)=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{BP_i}\wedge\vec{F}_i.$$

Cherchons la relation qui existe entre $\vec{M}_B(E \longrightarrow S)$ et $\vec{M}_A(E \longrightarrow S)$.

$$\vec{M}_B(E \longrightarrow S)=\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP_i})\wedge\vec{F}_i$$
$$=\Big(\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{AP_i}\wedge\vec{F}_i\Big)+\Big(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\Big)\wedge\overrightarrow{AB}$$

d'où :

$$\boldsymbol{\vec{M}_B(E \longrightarrow S)=\vec{M}_A(E \longrightarrow S)+\vec{R}(E \longrightarrow S)\wedge\overrightarrow{AB}.}$$

Le moment résultant d'une action mécanique vérifie donc la relation de changement de point du moment d'un torseur. Par suite le champ des moments résultants d'une action mécanique répond à la définition d'un torseur, ce qui nous conduit à énoncer ainsi le premier principe de la statique :

Premier principe de la statique

Toute action mécanique est entièrement caractérisée, d'un point de vue mécanique, par un torseur.

Dans le cas précédent, le torseur représentant l'action mécanique de (E) sur (S) s'écrit :

$$\{\mathcal{T}(E \longrightarrow S)\}={}_{A}\begin{Bmatrix}\vec{R}(E \longrightarrow S)\\ \vec{M}_A(E \longrightarrow S)\end{Bmatrix}$$

Définitions

Le torseur $\{\mathcal{T}(E \longrightarrow S)\}$ est appelé *torseur d'action mécanique* de (E) sur (S).

De plus, on précise les définitions précédentes en appelant :

$\vec{R}(E \longrightarrow S)$ la *résultante générale du torseur* d'action mécanique de (E) sur (S).

$\vec{M}_A(E \longrightarrow S)$ le *moment résultant au point* A *du torseur* d'action mécanique de (E) sur (S).

1.4. PROPRIÉTÉS DU TORSEUR D'ACTION MÉCANIQUE

Toute action mécanique étant caractérisée par un torseur possède toutes les propriétés du torseur. Nous allons donc voir à quoi correspondent, pour les actions mécaniques, certaines propriétés mathématiques du torseur.

1.4.1. Actions mécaniques équivalentes

Application 1 :

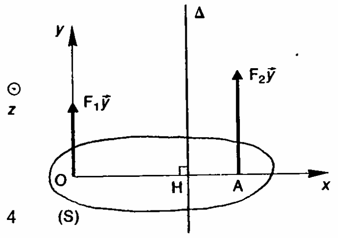


Fig. 4

Soit un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Un solide (S) subit de la part d'un ensemble matériel (E) une action mécanique représentée par les deux forces $(O, F_1\vec{y})$ et $(A, F_2\vec{y})$ telles que $\overrightarrow{OA} = d\vec{x}$ $(d \geqslant 0)$.
Déterminons l'axe central et le moment central du torseur d'action mécanique de (E) sur (S).
Ce torseur s'écrit au point O :

$$\{\mathcal{T}(E \longrightarrow S)\} = {}_O\begin{Bmatrix} (F_1+F_2)\vec{y} \\ F_2 d\vec{z} \end{Bmatrix}.$$

Son axe central Δ a pour direction $\vec{y}$. Le pied H de la perpendiculaire abaissée de O sur Δ est donné par la relation (2) du *chapitre 3 paragraphe 1.2.1.* de cinématique :

$$\overrightarrow{OH} = \frac{(F_1+F_2)\vec{y} \wedge F_2 d\vec{z}}{(F_1+F_2)^2}$$

$$\overrightarrow{OH} = \frac{F_2}{F_1+F_2}\, d\vec{x}.$$

Ce qui nous permet de mettre en place Δ *(figure 4)*. Les deux éléments de réduction du torseur sont perpendiculaires, par conséquent le torseur est à résultante et le moment central est nul. Par suite, le torseur s'écrit au point H :

$$\{\mathcal{T}(E \longrightarrow S)\} = {}_H\begin{Bmatrix} (F_1+F_2)\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

Ce qui signifie que l'action mécanique des deux forces est équivalente à la résultante générale $(F_1+F_2)\vec{y}$ de support Δ.

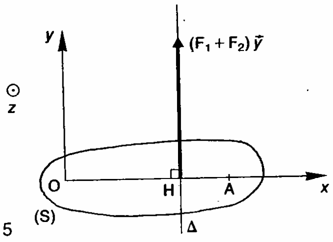


Fig. 5

Application 2 :

Soit un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Un tire-bouchon (S) subit d'une main (M) une action mécanique représentée par les trois forces $(A, F_1\vec{x})$, $(B, -F_1\vec{x})$ et $(O, -F_2\vec{z})$ telle que :

$$\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB} = a\vec{y} \qquad (a > 0).$$

Déterminons l'axe central et le moment central d torseur d'action mécanique de (M) sur (S).
Ce torseur s'écrit au point O :

$$\{\mathcal{T}(M \longrightarrow S)\} = {}_O\begin{Bmatrix} -F_2\vec{z} \\ -2aF_1\vec{z} \end{Bmatrix}.$$

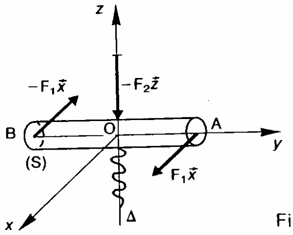
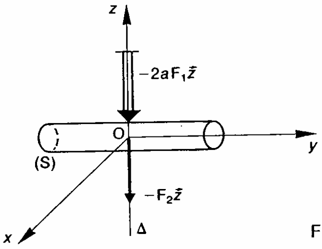


Fig.

Son axe central Δ a pour direction $\vec{z}$.
Comme en un point de l'axe central d'un torseur deux éléments de réduction ont même direction, Δ confondu avec l'axe $(O, \vec{z})$.
Dans ce cas, l'action mécanique des trois forces équivalente à la résultante générale $-F_2\vec{z}$ et au mom résultant $-2aF_1\vec{z}$ de support Δ.



Fi

REMARQUE

> *Les vecteurs moments seront tracés avec a traits parallèles.*

1.4.2. Actions mécaniques particulières

Action mécanique représentable par un couple

Le torseur d'action mécanique d'un ensen matériel (E) sur un corps (S) est un couple s'il de la forme :

$$\{\mathcal{T}(E \longrightarrow S)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}_A(E \longrightarrow S) \end{Bmatrix}$$

avec :

$$\vec{M}_A(E \longrightarrow S) \neq \vec{0}.$$

Application

Soit un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Un tire-bouchon (S) d'une main (M) une action mécanique représenté

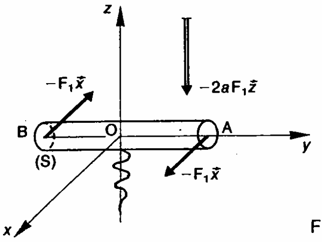


Fig. 8

les deux forces $(A, F_1\vec{x})$ et $(B, -F_1\vec{x})$ telles que :

$$\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB} = a\vec{y} \qquad (a > 0).$$

Le torseur d'action mécanique de (M) sur (S) s'écrit au point O :

$$\{\mathcal{T}(M \longrightarrow S)\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -2aF_1\vec{z} \end{Bmatrix}.$$

Ce torseur est un couple si $F_1 \neq 0$.
Le moment d'un couple étant le même en tout point on peut placer sur la figure le vecteur moment résultant $-2aF_1\vec{z}$ en n'importe quel point du repère R.

Action mécanique représentable par un torseur à résultante

Le torseur d'action mécanique d'un ensemble matériel (E) sur un corps (S) est un torseur à résultante s'il est de la forme :

$$\{\mathcal{T}(E \longrightarrow S)\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} \vec{R}(E \longrightarrow S) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

avec

$$\vec{R}(E \longrightarrow S) \neq \vec{0}.$$

Le point A est un point de l'axe central Δ de ce torseur.

Application

Soit un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Un corps (S) subit de la part d'un ensemble matériel (E) une action mécanique représentée par n forces $(P_i, \vec{F}_i)$ de même direction, définie par le vecteur unitaire $\vec{u}$.

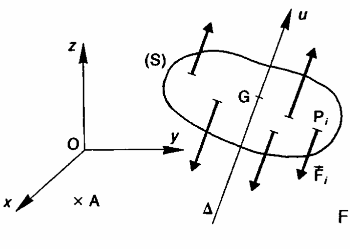


Fig. 9

On pose :

$$\vec{F}_i = F_i\vec{u}.$$

Montrons que le torseur d'action mécanique de (E) sur (S) est un torseur à résultante.

Ce torseur s'écrit en un point A quelconque :

$$\{\mathcal{T}(E \longrightarrow S)\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} \vec{R}\ (E \longrightarrow S) \\ \vec{M}_A(E \longrightarrow S) \end{Bmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \vec{R}(E \longrightarrow S) = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{u} \sum\limits_{i=1}^{n} F_i \\ \vec{M}_A(E \longrightarrow S) = \sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{AP}_i \wedge \vec{F}_i = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} F_i\overrightarrow{AP}_i\right) \wedge \vec{u}. \end{cases}$$

Les deux éléments de réduction du torseur sont perpendiculaires, par suite ce torseur est à résultante. Cherchons l'axe central Δ de ce torseur. Δ a pour direction $\vec{u}$. Le pied H de la perpendiculaire abaissée de A sur Δ est donné par la relation :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\vec{u} \sum\limits_{i=1}^{n} F_i \wedge \left[\left(\sum\limits_{i=1}^{n} F_i\overrightarrow{AP}_i\right) \wedge \vec{u}\right]}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} F_i\right)^2}$$

soit

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\vec{u} \wedge \left[\left(\sum\limits_{i=1}^{n} F_i\overrightarrow{AP}_i\right) \wedge \vec{u}\right]}{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i}.$$

En appliquant la relation du double produit vectoriel

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3)\vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)\vec{V}_3$$

aux trois vecteurs $\vec{u}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i\overrightarrow{AP}_i$ et $\vec{u}$, on obtient :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i\overrightarrow{AP}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i} - \frac{\left[\vec{u} \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} F_i\overrightarrow{AP}_i\right)\right]\vec{u}}{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i}.$$

Remarquons que le premier terme est indépendant de $\vec{u}$. Posons :

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i\overrightarrow{AP}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i}}$$

et notons λ le coefficient de $\vec{u}$ du deuxième terme.

Par suite $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GH}$, avec $\overrightarrow{GH} = \lambda\vec{u}$.

Le point H étant sur Δ, le point G l'est également.

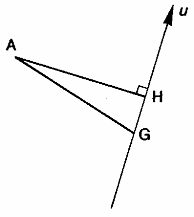


Fig. 10

Par suite, l'axe central Δ est défini par la direction $\vec{u}$ et le point G.

Définition

Le point G est appelé *centre des n forces parallèles* $(P_i, \vec{F}_i)$.

REMARQUE

Lorsque la direction $\vec{u}$ change par rapport à R, les autres paramètres restant inchangés, le point G reste fixe dans R. Par conséquent, le lieu de Δ dans R est le point G.

2. MODÉLISATION DES ACTIONS MÉCANIQUES A DISTANCE

Nous n'étudierons que l'action mécanique de la pesanteur, action mécanique toujours présente sur tous les mécanismes. Quelquefois, nous serons cependant amenés à la négliger devant d'autres actions mécaniques souvent beaucoup plus intenses.

2.1. CHAMP DE PESANTEUR

Le champ de pesanteur est un champ qui peut être considéré comme uniforme en tout point d'une région localisée de l'espace. Ce champ est orienté suivant la verticale descendante.

REMARQUE

La verticale, matérialisée par le fil à plomb, ne passe pas par le centre de la terre à cause des effets d'inertie d'entraînement dues à la rotation de la Terre.

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à la Terre, tel que l'axe $(O, \vec{z})$ soit dirigé suivant la verticale ascendante du lieu considéré *(figure 11).*

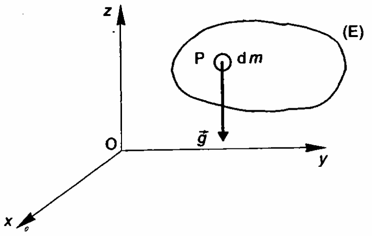


Fig. 11

Compte tenu des résultats acquis en classe de Terminale dans le cours de dynamique, nous définirons l'action mécanique du champ de pesanteur en chaque point P d'un ensemble matériel (E) par sa densité $\vec{g} = -g\vec{z}$ $(g > 0)$ relativement à la mesure de masse dm du point P considéré.

REMARQUE

g représente l'accélération du champ pesanteur. A Paris, au niveau du sol :

$$\boxed{g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}.}$$

Par suite, le torseur d'action mécanique de pesanteur sur (E) s'écrit en un point A quelconque

$$\{\mathcal{T}(g \longrightarrow E)\} = {}_{A}\left\{\begin{matrix}\vec{R}\ (g \longrightarrow E)\\ \vec{M}_A(g \longrightarrow E)\end{matrix}\right\}$$

avec :

$$\left\{\begin{aligned}&\vec{R}\ (g \longrightarrow E) = \int_{P\in E} \vec{g}\ \mathrm{d}m = m\vec{g} = -mg\vec{z}\\ &\vec{M}_A(g \longrightarrow E) = \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{g}\ \mathrm{d}m\end{aligned}\right.$$

$$= -\left(\left(\int_{P\in E} g\overrightarrow{AP}\,\mathrm{d}m\right)\right.$$

en désignant par m la *masse* de (E).

Posons : $P = \|\vec{R}(g \longrightarrow E)\|$.

P représente le *poids* de (E).

Par conséquent, entre la masse et le poids de existe la relation :

$$\boxed{P = mg.}$$

REMARQUE

Dans le système S.I., la masse s'exprime kilogramme (kg) et le poids, qui est homogèn une force, s'exprime en newtons (N).

Les deux éléments de réduction du tors $\{\mathcal{T}(g \longrightarrow E)\}$ sont perpendiculaires. Par cor quent ce torseur est à résultante, ce qui signifie l'action mécanique de la pesanteur sur (E) équivalente à la résultante $-mg\vec{z}$ de support Δ étant l'axe central du torseur.

L'axe central a pour direction $\vec{z}$. Cherchons le H de la perpendiculaire abaissée de A sur Δ. vecteur $\overrightarrow{AH}$ est donné par la relation :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{mg\vec{z} \wedge \left[\left(\int_{P\in E} g\overrightarrow{AP}\,\mathrm{d}m\right) \wedge \vec{z}\right]}{(mg)^2}$$

soit

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{m}\,\vec{z} \wedge \left[\left(\int_{P\in E} \overrightarrow{AP}\,\mathrm{d}m\right) \wedge \vec{z}\right].$$

En appliquant la relation du double pro vectoriel :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{m}\int_{P\in E} \overrightarrow{AP}\,\mathrm{d}m - \frac{1}{m}\left(\vec{z} \cdot \int_{P\in E} \overrightarrow{AP}\,\mathrm{d}m\right)\vec{z}$$

Posons :

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m}\int_{P\in E} \overrightarrow{AP}\,\mathrm{d}m}$$

notons λ le coefficient de $\vec{z}$ dans l'expression de $\overrightarrow{AH}$.

Alors $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GH}$ avec $\overrightarrow{GH} = \lambda\vec{z}$.

Le point G ainsi défini se trouve sur Δ.

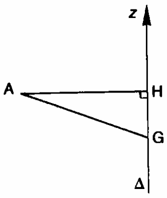


Fig. 12

Définition

Le point G est appelé *centre de gravité* ou *centre d'inertie* de l'ensemble matériel (E).

Propriétés

1. Le centre d'inertie G est le point tel que :

$$\boxed{\int_{P \in E} \overrightarrow{GP}\, dm = \vec{0}.}$$

2. Si (E) est un solide, le centre d'inertie de (E) est un point lié au solide (E).

3. Soit une partition de $E(m, G)$ en n éléments $E_i(m_i, G_i)$. Alors

$$\int_{P \in E} \overrightarrow{AP}\, dm = \sum_{i=1}^{n} \int_{P \in E_i} \overrightarrow{AP}\, dm$$

et

$$m\overrightarrow{AG} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{AG_i}$$

soit

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{AG_i}}$$

Expression analogue à celle mise en évidence pour déterminer le centre de n forces parallèles.

4. Si (E) est homogène et admet un élément de symétrie (plan, axe, centre) son centre d'inertie appartient à cet élément de symétrie.

2.2. APPLICATIONS

1. Centre d'inertie d'un cône de révolution de hauteur *h*, plein et homogène.

Le centre d'inertie G se trouve sur l'axe de symétrie $(O, \vec{z})$ du tronc de cône (S) de sommet O. Soit Z son abscisse.

(S) étant homogène on peut remplacer dans la relation donnant la position du centre d'inertie la mesure de masse dm par la mesure de volume dv.

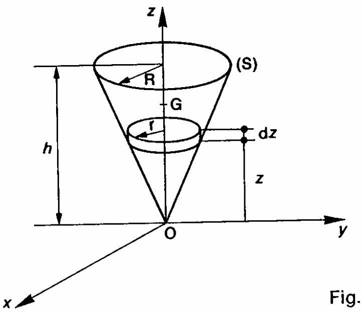


Fig. 13

Soit z l'abscisse d'un point P quelconque de (S) sur l'axe $(O, \vec{z})$.

Soit V le volume du cône.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

(R : rayon du cercle de base du cône.)

Dans ces conditions, la relation permettant de déterminer le centre d'inertie s'écrit en projection sur $\vec{z}$:

$$Z = \frac{1}{V} \int_{P \in S} z\, dv.$$

Pour calculer Z choisissons comme élément d'intégration un disque d'abscisse z, d'épaisseur dz, de rayon r.

Alors $dv = \pi r^2\, dz$, comme $r = \frac{R}{h} z$:

$$Z = \frac{3}{\pi R^2 h} \int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} z^3\, dz$$

$$Z = \frac{3}{h^3} \int_0^h z^3\, dz$$

soit $\boxed{Z = \frac{3}{4} h.}$

2. Centre d'inertie d'une demi-sphère de rayon R, creuse et homogène (sans la base).

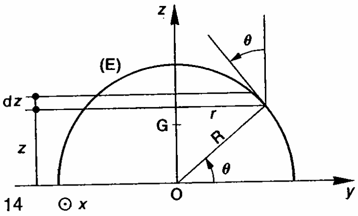


Fig. 14

Par un raisonnement analogue au précédent. On trouve que l'abscisse Z du centre d'inertie G est donné par la relation :

$$Z = \frac{1}{S} \int_{P \in E} z\, ds.$$

$S = 2\pi R^2$ (surface d'une demi-sphère).

Dans ce cas l'élément d'intégration à choisir est un tronc de cône (creux) d'abscisse z, de hauteur dz, de demi-angle au sommet θ, de rayon de cercle de base r.

Alors $ds = 2\pi r \dfrac{dz}{\cos\theta}$, comme $r = R\cos\theta$:

$$ds = 2\pi R\,dz$$

et

$$Z = \frac{1}{2\pi R^2}\int_0^R 2\pi R\,z\,dz$$

$$\boxed{Z = \frac{R}{2}.}$$

2.3. THÉORÈMES DE GULDIN

Premier théorème

L'aire de la surface engendrée par une courbe plane tournant autour d'un axe de son plan, ne la traversant pas, est égale au produit de la longueur de la courbe par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité.

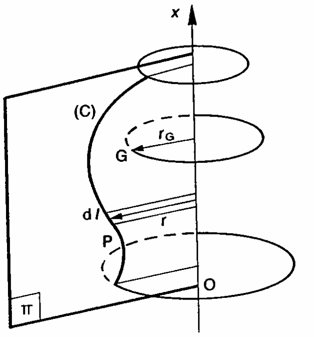


Fig. 15

Dans un plan (Π) considérons une courbe (C) de longueur L et un axe $(O, \vec{x})$ ne la traversant pas. La position du centre de gravité G de cette courbe est donnée par la relation :

$$L\,\overrightarrow{OG} = \int_{P\in C} \overrightarrow{OP}\,dl.$$

En projection sur un axe perpendiculaire à $(O, \vec{x})$ contenu dans (Π), on obtient :

$$L r_G = \int_{P\in C} r\,dl.$$

Multiplions les deux membres de l'égalité par 2π

$$L 2\pi r_G = \int_{P\in C} 2\pi r\,dl.$$

Le deuxième membre de l'égalité représente l'aire S engendrée par la courbe (C) en tournant autour de l'axe $(O, \vec{x})$, d'où la relation :

$$\boxed{S = L 2\pi r_G.}$$

APPLICATION 1

Centre de gravité d'un fil homogène, demi-circulaire de rayon R.

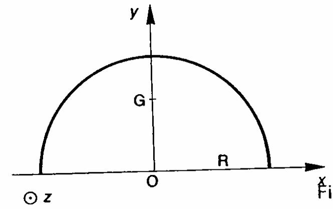


Fig. 16

La relation précédente devient :

$$4\pi R^2 = \pi R(2\pi\cdot OG)$$

et

$$\boxed{OG = \frac{2R}{\pi}.}$$

APPLICATION 2

Surface d'un tore (anneau cylindrique)

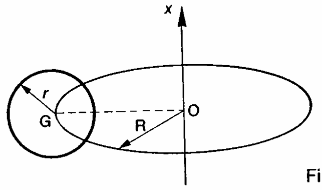


Fig. 17

$$S = 2\pi r . 2\pi R$$

$$\boxed{S = 4\pi^2 R r.}$$

Deuxième théorème

Le volume engendré par une surface plane tournant autour d'un axe de son plan, ne la traversant pas, est égal au produit de l'aire de la surface par la longueur du périmètre du cercle décrit par son centre de gravité.

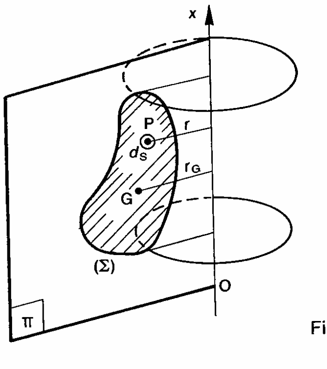


Fig. 1

ans un plan (Π) considérons une surface (Σ) aire S et un axe $(O, \vec{x})$ ne la traversant pas. a position du centre de gravité G de cette surface t donnée par la relation :

$$S\overrightarrow{OG} = \int_{P \in \Sigma} \overrightarrow{OP}\, ds.$$

n projection sur un axe perpendiculaire à $(O, \vec{x})$ ntenu dans (Π), on obtient :

$$S r_G = \int_{P \in \Sigma} r\, ds.$$

ultiplions les deux membres de l'égalité par 2π

$$S 2\pi r_G = \int_{P \in \Sigma} 2\pi r\, ds.$$

e deuxième membre de l'égalité représente le lume V engendré par la surface (Σ) en tournant tour de l'axe $(O, \vec{x})$ d'où la relation :

$$\boxed{V = S 2\pi r_G.}$$

PPLICATION 1

Centre de gravité d'un demi-disque homogène, de rayon R.

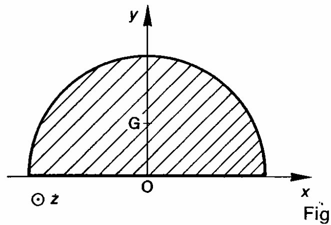


Fig. 19

La relation précédente devient :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{2}\pi R^2 \cdot (2\pi \cdot OG)$$

et

$$\boxed{OG = \frac{4R}{3\pi}.}$$

APPLICATION 2

Volume d'un tore.

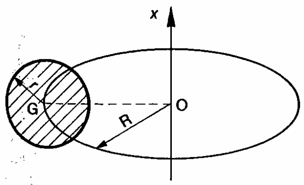


Fig. 20

$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi R$$

$$\boxed{V = 2\pi^2 R r^2.}$$

3. MODÉLISATION DES ACTIONS MÉCANIQUES DE CONTACT

3.1. TORSEUR D'ACTION MÉCANIQUE DE CONTACT

Tout contact réel entre deux corps a lieu suivant une surface, aussi petite soit-elle. Considérons donc 2 corps (S_1) et (S_2) en contact suivant une surface (S) *(figure 21).*

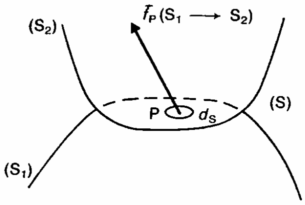


Fig. 21

L'action mécanique de contact de (S_1) sur (S_2) se caractérise, en chaque point P de la surface de contact (S), par une densité surfacique de forces $\vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$.

Définition

$\vec{f}_P$ $(S_1 \longrightarrow S_2)$ est appelé *densité surfacique,* au point P, *des forces de contact* de (S_1) sur (S_2).

REMARQUE

> *Une densité surfacique de forces est homogène à une force divisée par une surface. Elle s'exprime généralement en mégapascals* (MPa).
> *Rappelons que*
> $1\ N/mm^2 = 1\ MPa$
> $1\ da\ N/mm^2 = 10\ MPa$
> $1\ bar = 1\ da\ N/cm^2 = 0{,}1\ MPa.$

Par suite, l'action mécanique de contact de (S_1) sur (S_2) se représente globalement par le torseur suivant, exprimé en un point A quelconque :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2) \\ \vec{M}_A(S_1 \longrightarrow S_2) \end{Bmatrix}$$

avec :

$$\boxed{\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2) = \int_{P \in S} \vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)\, ds}$$

et :

$$\boxed{\vec{M}_A(S_1 \longrightarrow S_2) = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)\, ds.}$$

Définition

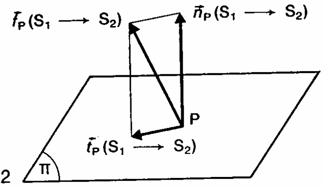
$\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\}$ est appelé *torseur d'action mécanique de contact* de (S_1) sur (S_2).

REMARQUE

> *Si l'on connaît la densité surfacique des forces de contact en tout point de la surface (S), on peut calculer le torseur d'action mécanique de contact. Par contre, la connaissance de ce torseur ne permet pas la détermination de la densité surfacique des forces de contact, à moins de faire des hypothèses sur la répartition de la densité surfacique.*

3.2. LOIS DE COULOMB

Considérons deux solides (S_1) et (S_2) en contact suivant une surface (S). Soient (Π) le plan tangent commun à (S_1) et (S_2) en un point P de (S) et $\vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$ la densité surfacique des forces de contact de (S_1) sur (S_2) au point P.



$\vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$
$\vec{n}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$
P
$\vec{t}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$
Π

Fig. 22

Posons :

$$\vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2) = \vec{n}_P(S_1 \longrightarrow S_2) + \vec{t}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$$

avec

$\vec{n}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$ perpendiculaire au plan (Π)

et

$\vec{t}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$ parallèle au plan (Π).

Définitions

> **$\vec{n}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$ est appelé *densité surfacique normale*, ou *pression*, au point P, des forces de contact de (S_1) sur (S_2),**
> **$\vec{t}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$ est appelé *densité surfacique tangentielle*, au point P, des forces de contact de (S_1) sur (S_2).**

Soit $\vec{V}(P \in S_2/S_1)$ la vitesse de glissement au point P du solide (S_2) par rapport au solide (S_1). (Ce vecteur est parallèle au plan (Π).)

Énoncé des lois de Coulomb

***Premier cas :* $\vec{V}(P \in S_2/S_1) \neq \vec{0}$**

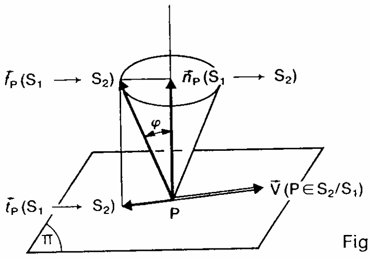
Lorsqu'il y a glissement en P entre (S_1) et (S_2), la densité surfacique tangentielle au point P des forces de contact de (S_1) sur (S_2) est opposée à la vitesse de glissement de (S_2) par rapport à (S_1), ce qui se traduit par les deux relations :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{t}_P(S_1 \longrightarrow S_2) \wedge \vec{V}(P \in S_2/S_1) = \vec{0} \\ \vec{t}_P(S_1 \longrightarrow S_2) \cdot \vec{V}(P \in S_2/S_1) < 0. \end{aligned}}$$

De plus la norme de la densité surfacique tangentielle est proportionnelle à la norme de la densité surfacique normale au point P des forces de contact de (S_1) sur (S_2), ce qui s'écrit :

$$\boxed{\|\vec{t}_P(S_1 \longrightarrow S_2)\| = f\,\|\vec{n}_P(S_1 \longrightarrow S_2)\|}$$

f est le **coefficient de frottement** en P entre (S_1) et (S_2).
En introduisant l'angle φ, tel que $f = \operatorname{tg} \varphi$, on peut interpréter géométriquement cette dernière relation en disant que $\vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$ se trouve sur le bord d'un cône de sommet P, d'axe perpendiculaire à (Π) et de demi-angle au sommet φ, appelé **cône de frottement** *(figure 23)*. L'angle φ est appelé **angle de frottement.**



$\vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$
$\vec{n}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$
φ
$\vec{V}(P \in S_2/S_1)$
$\vec{t}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$
P
Π

Fig. 2

***Deuxième cas :* $\vec{V}(P \in S_2/S_1) = \vec{0}$.**

Lorsqu'il n'y a pas de glissement en P entre (S
et (S_2) la densité surfacique au point P des force
de contact de (S_1) sur (S_2) se trouve à l'intérieu
ou à la limite sur le bord du cône de frottemen
(figure 24).

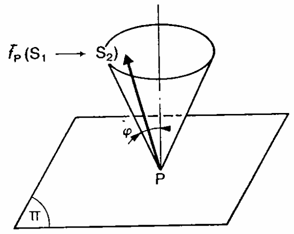


Fig. 2

Ce qui se traduit par la relation :

$$\boxed{\|\vec{t}_P(S_1 \longrightarrow S_2)\| \leqslant f\,\|\vec{n}_P(S_1 \longrightarrow S_2)\|.}$$

REMARQUE 1

> *En toute rigueur on devrait parler dans*
> *deuxième cas d'un coefficient d'adhérence,*
> *est légèrement supérieur à f, mais comme da*
> *la pratique on considère que le coeffici*
> *d'adhérence est égal au coefficient de frotteme*
> *nous ne ferons pas cette distinction.*

REMARQUE 2

Si on écarte les cas où par exemple (S_1) *et* (S_2) *sont deux solides aimantés, on peut dire qu'en général le vecteur densité surfacique normal* $\vec{n}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$ *est dirigé de* (S_1) *vers* (S_2).

Tableau de quelques valeurs moyennes du coefficient de frottement

matériaux en contact	f
Acier sur acier	0,10
Bronze sur bronze	0,20
Fonte sur bronze	0,10
Cuir sur métal	0,25
Bois sur bois	0,40
Métaux sur bois	0,30
Garniture de friction sur acier	0,30
Pneus sur chaussée	0,60

Fig. 25

Hypothèse du contact sans frottement

Cette hypothèse consiste à supposer que $f=0$ lorsque le coefficient de frottement est très faible. Alors $\vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$ est perpendiculaire à (Π).
Cette hypothèse simplificatrice, lorsqu'elle est possible, permet la résolution de certains problèmes, comme nous le verrons au prochain chapitre.

Application

Considérons deux solides (S_1) et (S_2) en contact avec frottement suivant un plan (Π) *(figure 26).*

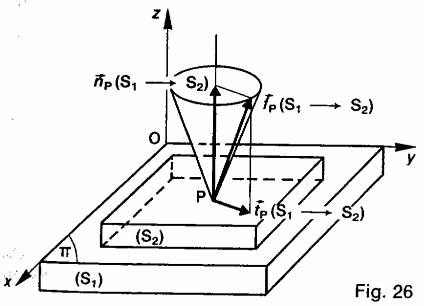

z
$\vec{n}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$
$\vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$
O
y
P
$\vec{t}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$
(S_2)
π
x
(S_1)

Fig. 26

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère tel que le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ soit confondu avec le plan (Π), et l'axe $(O, \vec{z})$ dirigé de (S_1) vers (S_2).
Soit $\vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$ la densité surfacique, en un point P quelconque de la surface de liaison, des forces de contact de (S_1) sur (S_2).
Posons :

$$\vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)=q_x\vec{x}+q_y\vec{y}+q_z\vec{z}.$$

Alors, la densité surfacique tangentielle est :

$$\vec{t}_P(S_1 \longrightarrow S_2)=q_x\vec{x}+q_y\vec{y}$$

et la densité surfacique normale :

$$\vec{n}_P(S_1 \longrightarrow S_2)=q_z\vec{z}.$$

Soit f le coefficient de frottement entre (S_1) et (S_2), supposé le même en tout point. Étudions les 2 cas suivants :

Premier cas : **(S_2) est immobile par rapport à (S_1).**
Dans ce cas nous pouvons simplement affirmer qu'en chaque point de contact la densité surfacique $\vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$ se trouve à l'intérieur ou à la limite sur le bord de son cône de frottement, c'est-à-dire que :

$$\|\vec{t}_P(S_1 \longrightarrow S_2)\| \leqslant f\|\vec{n}_P(S_1 \longrightarrow S_2)\|$$

soit : $$\|q_x\vec{x}+q_y\vec{y}\| \leqslant f\|q_z\vec{z}\|$$

ou encore, en remarquant que $q_z \geqslant 0$ et $\vec{z}$ unitaire :

$$\boxed{\|q_x\vec{x}+q_y\vec{y}\| \leqslant fq_z.} \qquad (1)$$

Nous ne pouvons rien dire, ni sur la norme, ni sur la direction de $\vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$ à l'intérieur de son cône de frottement.
Quelle conséquence peut-on en tirer en ce qui concerne la résultante générale $\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2)$ du torseur d'action mécanique de (S_1) sur (S_2)?

$$\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2)=\int_{P\in(\Pi)} \vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)\,ds.$$

Posons : $\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2)=\vec{N}(S_1 \longrightarrow S_2)+\vec{T}(S_1 \longrightarrow S_2)$
avec :

$$\vec{N}(S_1 \longrightarrow S_2)\perp(\Pi)$$
$$\vec{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\in(\Pi).$$

Définitions

$\vec{N}(S_1 \longrightarrow S_2)$ est appelé *composante normale de la résultante générale* du torseur d'action mécanique de (S_1) sur (S_2) ou *effort normal.*
$\vec{T}(S_1 \longrightarrow S_2)$ est appelé *composante tangentielle de la résultante générale* du torseur d'action mécanique de (S_1) sur (S_2) ou *effort tangentiel.*

Par suite :

$$\vec{N}(S_1 \longrightarrow S_2)=\int_{P\in(\Pi)} q_z\vec{z}\,ds$$

et $$\vec{T}(S_1 \longrightarrow S_2)=\int_{P\in(\Pi)} (q_x\vec{x}+q_y\vec{y})\,ds.$$

Calculons la norme de l'effort normal :

$$\|\vec{N}(S_1 \longrightarrow S_2)\|=\left\|\int_{P\in(\Pi)} q_z\vec{z}\,ds\right\|$$
$$=\left|\int_{P\in(\Pi)} q_z\,ds\right|\cdot\|\vec{z}\|.$$

Comme $q_z \geqslant 0$ et $\vec{z}$ unitaire :

$$\boxed{\|\vec{N}(S_1 \longrightarrow S_2)\|=\int_{P\in(\Pi)} q_z\,ds.} \qquad (2)$$

Calculons la norme de l'effort tangentiel :

$$\|\vec{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\|=\left\|\int_{P\in(\Pi)} (q_x\vec{x}+q_y\vec{y})\,ds\right\|.$$

La norme d'une somme de vecteurs étant inférieure ou égale à la somme des normes des différents vecteurs constituant la somme, on a :

$$\boxed{\|\vec{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\| \leq \int_{P \in (\Pi)} \|q_x\vec{x} + q_y\vec{y}\| \, ds.} \quad (3)$$

Intégrons sur tous les points P du plan (Π) de contact entre (S_1) et (S_2) l'inéquation (1) :

$$\int_{P \in (\Pi)} \|q_x\vec{x} + q_y\vec{y}\| \, ds \leq f \int_{P \in (\Pi)} q_z \, ds.$$

Compte tenu des relations (2) et (3) on obtient entre l'effort tangentiel et l'effort normal de l'action mécanique de (S_1) sur (S_2) l'inéquation :

$$\boxed{\|\vec{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\| \leq f \|\vec{N}(S_1 \longrightarrow S_2)\|.}$$

REMARQUE

L'effort normal est dirigé de (S_1) *vers* (S_2), *c'est-à-dire que :*

$$\vec{N}(S_1 \longrightarrow S_2) \cdot \vec{z} > 0.$$

Le moment résultant $\vec{M}_A(S_1 \longrightarrow S_2)$ du torseur d'action mécanique de (S_1) sur (S_2), en un point A quelconque, n'a aucune particularité. Si A est point central *(paragraphe 1.2.1 du chapitre 3 de cinématique)*, $\vec{M}_A(S_1 \longrightarrow S_2)$ et $\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2)$ ont même direction que l'axe central Δ du torseur d'action mécanique de (S_1) sur (S_2) *(figure 27)*.

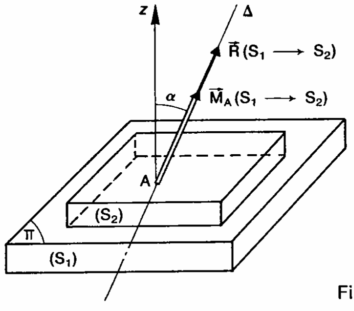


Fig. 27

L'inclinaison α de Δ par rapport à la normale $\vec{z}$ au plan (Π) est inférieure ou égale à l'angle de frottement φ ($f = \operatorname{tg} \varphi$).

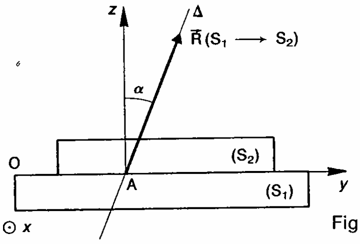


Fig. 28

Dans le cas particulier d'un problème plan, dans plan (O, $\vec{y}$, $\vec{z}$) par exemple, Δ appartient à ce pl et le moment central est nul *(figure 28)*.

REMARQUE

Un problème est plan, dans un plan (P) *p exemple, lorsque les torseurs des actions mécai ques agissant sur un ensemble matériel don sont, soit des torseurs à résultante d'axe cent, situé dans* (P), *soit des couples de mom résultant perpendiculaire à* (P).

Deuxième cas : **(S_2) est animé d'un mouvement translation rectiligne par rapport à (S_1).**

Ce mouvement est caractérisé par le vecteur vites $\vec{V}(P \in S_2/S_1) = V\vec{y}$ avec $V > 0$.

Dans ce cas l'application des lois de Coulomb do davantage de renseignements sur la densité surfaci $\vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$ *(figure 29)*.

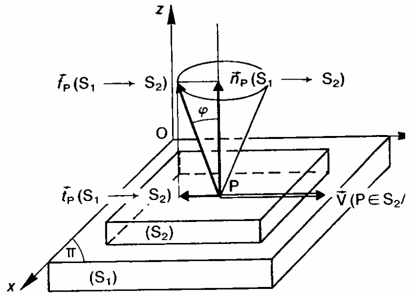


Fig. 29

La densité surfacique tangentielle $q_x\vec{x} + q_y\vec{y}$ doit a même direction que la vitesse de glissements $V\vec{y}$ qui se traduit par la relation :

$$(q_x\vec{x} + q_y\vec{y}) \wedge V\vec{y} = \vec{0}$$

d'où : $\boxed{q_x = 0.}$

Ensuite, la densité surfacique tangentielle doit opposée à la vitesse de glissement.

Soit :

$$q_y\vec{y} \cdot V\vec{y} < 0$$

d'où : $\boxed{q_y < 0.}$

Et pour finir, la norme de la densité surfac tangentielle doit être proportionnelle à la norme c densité surfacique normale

$$\|q_y\vec{y}\| = f\|q_z\vec{z}\|$$

soit : $\boxed{-q_y = fq_z.}$

Par suite, tous les vecteurs densité surfac $\vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$ sont parallèles entre eux et la résul générale du torseur d'action mécanique de (S_1) sur $\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2)$ a même direction que les vec densité surfacique.

De plus, nous avons vu au *paragraphe 1.4.2* que le torseur d'action mécanique associé à un système de forces parallèles est un torseur à résultante.
Par conséquent, l'action mécanique de (S_1) sur (S_2) est équivalente à la résultante générale $\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2)$ de support Δ, Δ étant l'axe central du torseur d'action mécanique de (S_1) sur (S_2).
Δ est incliné par rapport à la normale $\vec{z}$ au plan (Π) de l'angle de frottement φ *(figure 30).*

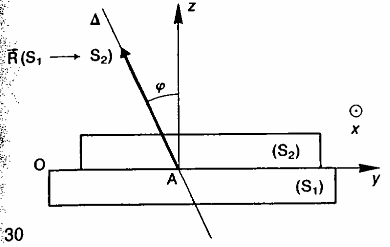


Fig. 30

3.3. SOLIDES EN CONTACT PONCTUEL

Soient 2 solides (S_1) et (S_2) en contact ponctuel en un point P. Soit (Π) le plan tangent commun en P à (S_1) et (S_2).

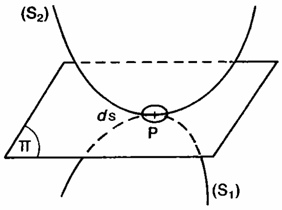


Fig. 31

En fait, le contact réel entre (S_1) et (S_2), que nous considérons, a lieu sur un petit élément de surface d*s* contenant le point P.
Le torseur d'action mécanique de contact de (S_1) sur (S_2) s'écrit au point P :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\} = {}_P\begin{Bmatrix} \vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2) \\ \vec{M}_P(S_1 \longrightarrow S_2) \end{Bmatrix}.$$

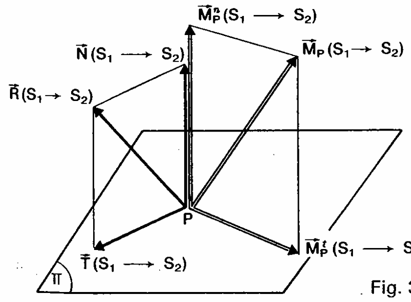


Fig. 32

Posons :

$$\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2) = \vec{N}(S_1 \longrightarrow S_2) + \vec{T}(S_1 \longrightarrow S_2)$$

avec $\begin{cases} \vec{N}(S_1 \longrightarrow S_2) \perp (\Pi) \\ \vec{T}(S_1 \longrightarrow S_2) \in (\Pi) \end{cases}$

et

$$\vec{M}_P(S_1 \longrightarrow S_2) = \vec{M}_P^n(S_1 \longrightarrow S_2) + \vec{M}_P^t(S_1 \longrightarrow S_2)$$

avec : $\begin{cases} \vec{M}_P^n(S_1 \longrightarrow S_2) \perp (\Pi) \\ \vec{M}_P^t(S_1 \longrightarrow S_2) \in (\Pi). \end{cases}$

Définitions

Pour le torseur d'action mécanique de contact de (S_1) sur (S_2), on appelle :
$\vec{N}(S_1 \longrightarrow S_2)$ la *composante normale de la résultante générale* ou *effort normal.*
$\vec{T}(S_1 \longrightarrow S_2)$ la *composante tangentielle de la résultante générale* ou *effort tangentiel.*
$\vec{M}_P^n(S_1 \longrightarrow S_2)$ la *composante normale du moment résultant au point* P ou *moment de pivotement.*
$\vec{M}_P^t(S_1 \longrightarrow S_2)$ la *composante tangentielle du moment résultant au point* P ou *moment de roulement.*

Considérons le torseur cinématique du mouvement de (S_2) par rapport à (S_1), défini au point P.

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = {}_P\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/S_1) \\ \vec{V}(P \in S_2/S_1) \end{Bmatrix}.$$

Posons : $\vec{\Omega}(S_2/S_1) = \vec{\Omega}_n(S_2/S_1) + \vec{\Omega}_t(S_2/S_1)$

avec $\begin{cases} \vec{\Omega}_n(S_2/S_1) \perp (\Pi) \\ \vec{\Omega}_t(S_2/S_1) \in (\Pi). \end{cases}$

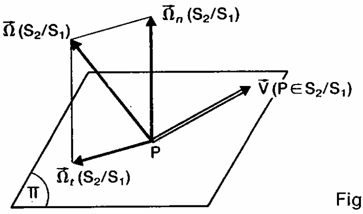


Fig. 33

$\vec{\Omega}_n(S_2/S_1)$ est le *vecteur rotation de pivotement* et $\vec{\Omega}_t(S_2/S_1)$ est le *vecteur rotation de roulement* dans le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1).
Rappelons que le *vecteur vitesse de glissement* $\vec{V}(P \in S_2/S_1)$ est parallèle au plan (Π).
Lorsque le vecteur vitesse de glissement ou le vecteur rotation de pivotement ou le vecteur rotation de roulement est nul ou pas, on a entre le torseur d'action mécanique de (S_1) sur (S_2) et le torseur cinématique du mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) des relations analogues à celles mises en évidence dans les lois de Coulomb.

Vecteur vitesse de glissement

Premier cas : $\vec{V}(P \in S_2/S_1) \neq \vec{0}$

$$\vec{V}(P \in S_2/S_1) \wedge \vec{T}(S_1 \longrightarrow S_2) = \vec{0}$$
$$\vec{V}(P \in S_2/S_1) \cdot \vec{T}(S_1 \longrightarrow S_2) < 0$$
$$\|\vec{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\| = f \|\vec{N}(S_1 \longrightarrow S_2)\|.$$

Deuxième cas : $\vec{V}(P \in S_2/S_1) = \vec{0}$

$$\|\vec{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\| \leqslant f \|\vec{N}(S_1 \longrightarrow S_2)\|$$

f est le coefficient de frottement (ou d'adhérence) entre (S_1) et (S_2).

Vecteur rotation de pivotement

Premier cas : $\vec{\Omega}_n(S_2/S_1) \neq \vec{0}$

$$\vec{\Omega}_n(S_2/S_1) \cdot \vec{M}_p^n(S_1 \longrightarrow S_2) < 0$$
$$\|\vec{M}_p^n(S_1 \longrightarrow S_2)\| = \delta \|\vec{N}(S_1 \longrightarrow S_2)\|.$$

Deuxième cas : $\vec{\Omega}_n(S_2/S_1) = \vec{0}$

$$\|\vec{M}_p^n(S_1 \longrightarrow S_2)\| \leqslant \delta \|\vec{N}(S_1 \longrightarrow S_2)\|.$$

δ est le paramètre de résistance au pivotement entre (S_1) et (S_2). δ est homogène à une longueur.

Vecteur rotation de roulement

Premier cas : $\vec{\Omega}_t(S_2/S_1) \neq \vec{0}$

$$\vec{\Omega}_t(S_2/S_1) \wedge \vec{M}_p^t(S_1 \longrightarrow S_2) = \vec{0}$$
$$\vec{\Omega}_t(S_2/S_1) . \vec{M}_p^t(S_1 \longrightarrow S_2) < 0$$
$$\|\vec{M}_p^t(S_1 \longrightarrow S_2)\| = \eta \|\vec{N}(S_1 \longrightarrow S_2)\|.$$

Deuxième cas : $\vec{\Omega}_t(S_2/S_1) = \vec{0}$

$$\|\vec{M}_p^t(S_1 \longrightarrow S_2)\| \leqslant \eta \|\vec{N}(S_1 \longrightarrow S_2)\|.$$

η est le paramètre de résistance au roulement entre (S_1) et (S_2). η est homogène à une longueur.

Tableau de quelques valeurs moyennes du paramètre de résistance au roulement

matériaux en contact	η en cm
Acier trempé sur acier trempé	0,0005 à 0,001
Fonte grise sur acier trempé	0,05
Fonte sur sol en bon état	1
Pneus sur sol en bon état	0,5 à 2

Fig. 34

Application

Le schéma cinématique de la *figure 35* représente le variateur à plateau déjà rencontré au *chapitre 4 paragraphe 4 de cinématique.*

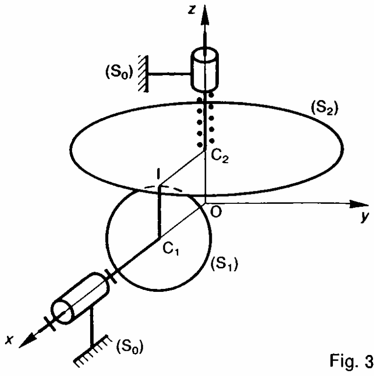


Fig. 35

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à un bâti (S_0). Un disque (S_1) de centre C_1, de rayon r_1, a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$ avec (S_0). Le centre C_1 est sur $(O, \vec{x})$ et le plan de (S_1) est perpendicualire à $(O, \vec{x})$. Un plateau circulaire (S_2) de centre C_2 a une liaison pivot glissant d'axe $(O, \vec{z})$ avec (S_0). Le centre C_2 est sur $(O, \vec{z})$ et le plan de (S_2) est perpendiculaire à $(O, \vec{z})$.

Le plateau circulaire (S_2) roule sans glisser sur le disque (S_1) en un point I tel que :

$$\overrightarrow{C_2I} = r_2\vec{x}.$$

On pose : $\vec{\Omega}(S_1/R) = \alpha'_1\vec{x}$.

On a montré en cinématique que :

— Le vecteur rotation de roulement de (S_2) par rapport à (S_1) est :

$$\vec{\Omega}_t(S_2/S_1) = -\alpha'_1\vec{x}.$$

— Le vecteur rotation de pivotement de (S_2) par rapport à (S_1) est :

$$\vec{\Omega}_n(S_2/S_1) = -\frac{r_1}{r_2}\alpha'_1\vec{z}.$$

Représentons au point I l'action mécanique de contact de (S_1) sur (S_2) par le torseur suivant :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\} = {}_I\begin{Bmatrix} \vec{R}\ (S_1 \longrightarrow S_2) \\ \vec{M}_I(S_1 \longrightarrow S_2) \end{Bmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} \vec{R}\,(S_1 \longrightarrow S_2) = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}_I(S_1 \longrightarrow S_2) = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z} \end{cases}$$

et notons entre (S_1) et (S_2) :

f : le coefficient de frottement.
δ : le paramètre de résistance au pivotement.
η : le paramètre de résistance au roulement.

QUESTION 1

Sachant que (S_2) roule sans glisser sur (S_1), quelle relation y a-t-il entre X, Y, Z?

RÉPONSE

La résultante générale $\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2)$ est à l'intérieur ou à la limite sur le bord de son cône de frottement d'axe $(I, \vec{z})$.

Sachant que l'effort tangentiel est $X\vec{x} + Y\vec{y}$ et l'effort normal $Z\vec{z}$, la relation à vérifier est la suivante :

$$\|X\vec{x} + Y\vec{y}\| \leqslant f\|Z\vec{z}\|$$

soit, en remarquant que $Z > 0$:

$$\boxed{\sqrt{X^2+Y^2} \leqslant fZ.}$$

QUESTION 2

Sachant que le vecteur rotation de pivotement $\vec{\Omega}_n(S_2/S_1)$ est non nul, quelle relation y a-t-il entre Z et N?

RÉPONSE

Le moment de pivotement est :

$$\vec{M}_I^n(S_1 \longrightarrow S_2) = N\vec{z}.$$

Ce moment de pivotement doit être opposé au vecteur rotation de pivotement $\vec{\Omega}_n(S_2/S_1) = -\frac{r_1}{r_2}\alpha'_1\vec{z}$ soit

$$-\frac{r_1}{r_2}\alpha'_1\vec{z} \cdot N\vec{z} < 0$$

d'où :

$$\boxed{N > 0.}$$

De plus la relation entre le moment de pivotement et l'effort normal doit être :

$$\|N\vec{z}\| = \delta\|Z\vec{z}\|.$$

Z et N étant positifs, on obtient :

$$\boxed{N = \delta Z.}$$

QUESTION 3

Sachant que le vecteur rotation de roulement $\vec{\Omega}_t(S_2/S_1)$ est non nul, quelle est la valeur du moment de roulement $\vec{M}_I^t(S_1 \longrightarrow S_2)$ et quelle relation y a-t-il entre L et Z?

RÉPONSE

Le moment de roulement est :

$$\vec{M}_I^t(S_1 \longrightarrow S_2) = L\vec{x} + M\vec{y}.$$

Ce moment de roulement doit avoir même direction que le vecteur rotation de roulement $\vec{\Omega}_t(S_2/S_1) = -\alpha'_1\vec{x}$

soit : $$-\alpha'_1\vec{x} \wedge (L\vec{x} + M\vec{y}) = \vec{0}$$

d'où : $$\boxed{M = 0.}$$

Ensuite, ce moment de roulement doit être opposé au vecteur rotation de roulement. Soit :

$$-\alpha'_1\vec{x} \cdot L\vec{x} < 0$$

d'où : $$\boxed{L > 0.}$$

De plus la relation entre le moment de roulement et l'effort normal doit être :

$$\|L\vec{x}\| = \eta\|Z\vec{z}\|.$$

Z et L étant positifs, on obtient :

$$\boxed{L = \eta Z.}$$

Hypothèse du contact rigoureusement ponctuel

Dans cette hypothèse on suppose que le moment résultant $\vec{M}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$ est nul.

Cette hypothèse est souvent justifiée et facilite grandement les calculs.

3.4. LIAISONS SANS FROTTEMENT

Pour toutes les liaisons théoriques de référence entre deux solides (S_1) et (S_2) étudiées en cinématique au *chapitre 1*, déterminons les caractéristiques du torseur d'action mécanique de contact $\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\}$, que la liaison peut transmettre, lorsque le contact entre (S_1) et (S_2) est supposé sans frottement, c'est-à-dire qu'en chaque point P de la surface de liaison (S), la densité surfacique $\vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$ est perpendiculaire au plan tangent (Π) à (S_1) et (S_2) en ce point *(figure 36)*.

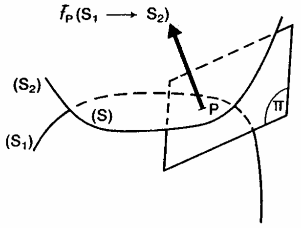


Fig. 36

Le torseur d'action mécanique de contact s'écrit à l'origine du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ placé sur chaque liaison :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\} = {}_O\left\{\begin{matrix}\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2)\\ \vec{M}_O(S_1 \longrightarrow S_2)\end{matrix}\right\}.$$

Nous noterons, quand elles ne sont pas nulles, les composantes des éléments de réduction dans la base de R par :

$$\begin{cases}\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2) = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}\\ \vec{M}_O(S_1 \longrightarrow S_2) = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z}\end{cases}$$

et nous écrirons le torseur d'action mécanique avec ces composantes de la façon suivante :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\} = {}_O\left\{\begin{matrix}X & L\\ Y & M\\ Z & N\end{matrix}\right\}.$$

Pour chaque liaison nous préciserons, au préalable, la nature des surfaces de liaison compatible avec le mouvement relatif qu'autorise la liaison, lorsque le *contact* est *direct*, c'est-à-dire sans introduction de pièces intermédiaires entre (S_1) et (S_2).

Lorsqu'une liaison réelle entre deux solides (S_1) et (S_2) a un comportement analogue à un modèle théorique de référence et que cette liaison n'est pas réalisée par contact direct, mais par association en série ou en parallèle de plusieurs liaisons, comme nous le verrons au *chapitre 3*, il est difficile de parler dans ce cas d'action mécanique de contact si (S_1) et (S_2) ne se touchent pas (exemple : liaison obtenue entre deux bagues d'un roulement par l'intermédiaire des billes). C'est pourquoi l'expression torseur d'action mécanique de contact sera remplacée, dans cette étude, par l'expression *torseur statique,* par analogie avec l'expression torseur cinématique.

3.4.1. Liaison ponctuelle de normale $(O, \vec{z})$

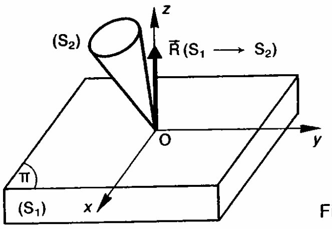


Fig. 37

SURFACE DE LIAISON

Les surfaces de liaison sont par exemple : une surface sphérique en contact en un point avec une surface plane, deux surfaces cylindriques de révolution (d'axes non parallèles) en contact en un point d'une de leur génératrice, etc.

TORSEUR STATIQUE

L'hypothèse d'un contact rigoureusement ponctuel étant tout à fait justifiée pour un contact théorique, nous supposerons le moment résultant $\vec{M}_0(S_1 \longrightarrow S_2)$ nul *(paragraphe 3.3).*
De plus le contact étant sans frottement, la résultante générale $\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2)$ a pour direction $\vec{z}$.
Par conséquent, le torseur statique transmissible par la liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}.$$

3.4.2. Liaison linéique rectiligne d'axe $(O, \vec{x})$, de normale $(O, \vec{z})$

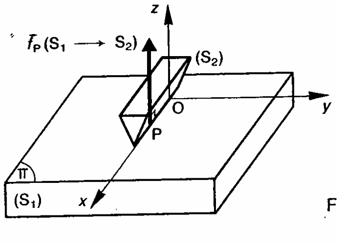


Fig. 38

SURFACES DE LIAISON

Les surfaces de liaison sont par exemple : un surface cylindrique de révolution en contact suivan une génératrice avec une surface plane, etc.

TORSEUR STATIQUE

La densité linéique $\vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$, en chaque poin P de l'axe $(O, \vec{x})$ de contact entre (S_1) et (S_2), es parallèle à $\vec{z}$. Par suite :

$$\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2) = \int_{P \in (O, \vec{x})} \vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)\,dx$$

a également pour direction $\vec{z}$.
Le moment au point O de $\vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$ e parallèle à $\vec{y}$. Par suite :

$$\vec{M}_0(S_1 \longrightarrow S_2) = \int_{P \in (O, \vec{x})} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)\,dx$$

a pour direction $\vec{y}$.
Par conséquent, le torseur statique transmissible p la liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}.$$

3.4.3. Liaison linéique annulaire d'axe $(O, \vec{x})$

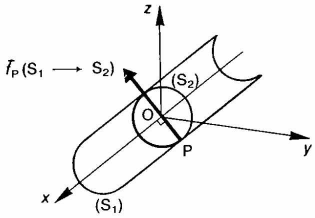


Fig.

SURFACES DE LIAISON

Les surfaces de liaison sont : une surface sphéri de centre O, en contact suivant un grand cer avec une surface cylindrique de révolution d' $(O, \vec{x})$, de même rayon.

TORSEUR STATIQUE

Le contact a lieu suivant un grand cercle de surface sphérique liée à (S_2), situé dans le $(O, \vec{y}, \vec{z})$, si bien que $\vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$ passe par est perpendiculaire à l'axe $(O, \vec{x})$.
Par suite $\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2)$ est perpendiculaire à $\vec{x}$ $\vec{M}_0(S_1 \longrightarrow S_2)$ est nul.
Par conséquent, le torseur statique transmissible la liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}.$$

3.4.4. Liaison rotule de centre O

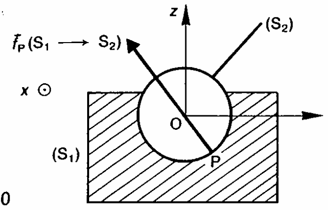


Fig. 40

SURFACES DE LIAISON

Les surfaces de liaison sont deux surfaces sphériques de même rayon, de centre O.

TORSEUR STATIQUE

La densité surfacique $\vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$ a la particularité de passer par le point O, par suite son moment par rapport au point O est nul et $\vec{M}_0(S_1 \longrightarrow S_2)$ également.
Par conséquent, le torseur statique transmissible par la liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\} = {}_O\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}.$$

3.4.5. Liaison appui plan de normale $(O, \vec{z})$

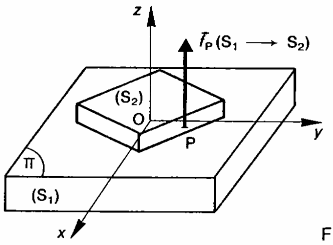


Fig. 41

SURFACES DE LIAISON

Les surfaces de liaison sont deux surfaces planes du plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$.

TORSEUR STATIQUE

La densité surfacique $\vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$ est parallèle à $\vec{z}$, alors son moment au point O est perpendiculaire à $\vec{z}$.
Par suite $\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2)$ est parallèle à $\vec{z}$ et $\vec{M}_0(S_1 \longrightarrow S_2)$ est perpendiculaire à $\vec{z}$.
Par conséquent, le torseur statique transmissible par la liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\} = {}_O\begin{Bmatrix} 0 & L \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}.$$

3.4.6. Liaison pivot glissant d'axe $(O, \vec{x})$

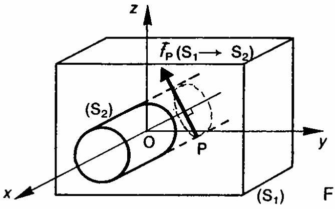


Fig. 42

SURFACES DE LIAISON

Les surfaces de liaison sont des surfaces cylindriques de révolution d'axe $(O, \vec{x})$.

TORSEUR STATIQUE

La densité surfacique $\vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$ a la particularité d'être perpendiculaire à l'axe $(O, \vec{x})$, alors $\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2)$ l'est également.
$\vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$ a aussi la particularité de rencontrer l'axe $(O, \vec{x})$, ce qui signifie que son moment par rapport à cet axe est nul.
Par suite $\vec{M}_0(S_1 \longrightarrow S_2)$ n'a pas de composante sur l'axe $(O, \vec{x})$.
Par conséquent, le torseur statique transmissible par la liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\} = {}_O\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}.$$

3.4.7. Liaison glissière hélicoïdale d'axe $(O, \vec{x})$

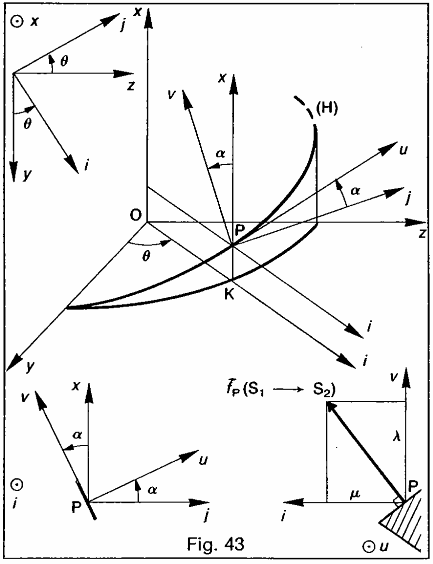


Fig. 43

SURFACES DE LIAISON

Les surfaces de liaison sont des surfaces hélicoïdales d'axe $(O, \vec{x})$, de section droite quelconque.

TORSEUR STATIQUE

Supposons le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié à (S_1). Au cours du mouvement relatif de (S_2) par rapport à (S_1), un point P de contact des surfaces hélicoïdales de liaison, lié à (S_2), décrit dans le repère R une hélice circulaire (H) d'axe $(O, \vec{x})$, de rayon r, d'inclinaision α et de pas réduit p (entre p et α existe la relation : $p = r \operatorname{tg} \alpha$ *(figure 44)*).

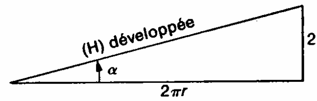


Fig. 44

Soit K la projection orthogonale du point P sur le plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$. Notons $\vec{i}$ le vecteur unitaire de même direction et de même sens que le vecteur $\overline{OK}$ et $\vec{j}$, le troisième vecteur unitaire de la base orthonormée directe $(\vec{x}, \vec{i}, \vec{j})$.

La position du point P dans R est définie par l'angle $\theta = (\vec{x}, \vec{i})$.

Alors : $\overline{KP} = p\theta$ ou $r\theta \operatorname{tg} \alpha$.

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire tangent en P à l'hélice (H) et $\vec{v}$ le troisième vecteur unitaire de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{u}, \vec{v})$.

Alors : $(\vec{j}, \vec{u}) = (\vec{x}, \vec{v}) = \alpha.$

Le profil de la section droite qui engendre la surface hélicoïdale de liaison se trouve dans le plan $(P, \vec{v}, \vec{i})$.

Le vecteur vitesse de glissement entre les deux surfaces hélicoïdales, au point P, a pour direction $\vec{u}$, par conséquent d'après les lois de Coulomb énoncées au *paragraphe 3.2,* la densité surfacique $\vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$ est perpendiculaire à $\vec{u}$. Posons donc :

$$\vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2) = \lambda\vec{v} + \mu\vec{i}$$

(λ et μ sont des fonctions du point P considéré).

Comme la rotation autour de $(O, \vec{x})$ et la translation suivant $(O, \vec{x})$ de (S_2) par rapport à (S_1) sont liées, il doit certainement en être de même pour la composante de $\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2)$ sur $\vec{x}$ et la composante de $\vec{M}_0(S_1 \longrightarrow S_2)$ sur $\vec{x}$.

Pour mettre en évidence cette relation calculons

$$\vec{x} \cdot \vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2) \text{ et } \vec{x} \cdot (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)).$$

Le premier terme est égal à :

$$\vec{x} \cdot \vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2) = \vec{x} \cdot (\lambda\vec{v} + \mu\vec{i})$$

en remarquant que $\vec{x}$ est perpendiculaire à $\vec{i}$ et que $\vec{x} \cdot \vec{v} = \cos \alpha$:

$$\vec{x} \cdot \vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2) = \lambda \cos \alpha \tag{4}$$

en notant que : $\overrightarrow{OP} = r\vec{i} + p\theta\vec{x}$, le deuxième terme s'écrit :

$$\vec{x} \cdot (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)) = \vec{x} \cdot [(r\vec{i} + p\theta\vec{x}) \wedge (\lambda\vec{v} + \mu\vec{i})]$$

en remarquant que :

$$\begin{cases} \vec{i} \wedge \vec{v} = -\vec{u} \\ \vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0} \\ \vec{x} \wedge \vec{v} = \sin \alpha\vec{i} \\ \vec{x} \wedge \vec{i} = \vec{j} \end{cases}$$

on obtient :

$$\vec{x} \cdot (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)) = \vec{x} \cdot (-r\lambda\vec{u} + \lambda p\theta \sin \alpha\vec{i} + \mu p\theta\vec{j})$$

soit avec :

$$\begin{cases} \vec{x} \cdot \vec{u} = \sin \alpha \\ \vec{x} \cdot \vec{i} = 0 \\ \vec{x} \cdot \vec{j} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{x} \cdot (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)) = -r\lambda \sin \alpha.$$

Comme $p = r \operatorname{tg} \alpha$

ou $p \cos \alpha = r \sin \alpha$

$$\vec{x} \cdot (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)) = -p\lambda \cos \alpha. \tag{5}$$

Par suite avec les résultats obtenus dans les relations (4) et (5) on a l'égalité suivante :

$$\vec{x} \cdot (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)) = -p\vec{x} \cdot \vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2).$$

En intégrant les deux membres de cette égalité sur la surface de contact entre (S_1) et (S_2), on obtient entre $\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2)$ et $\vec{M}_0(S_1 \longrightarrow S_2)$ la relation :

$$\vec{x} \cdot \vec{M}_0(S_1 \longrightarrow S_2) = -p\vec{x} \cdot \vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2).$$

Par conséquent le torseur statique transmissible par la liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\} = {}_O\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$$

avec $L = -pX.$

3.4.8. Liaison glissière d'axe $(O, \vec{x})$

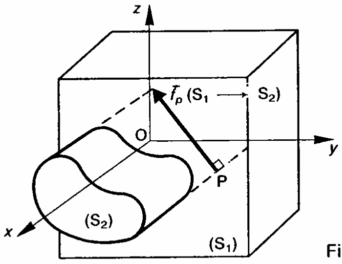


Fig. 45

SURFACES DE LIAISON

Les surfaces de liaison sont des surfaces cylindriques, non de révolution, de génératrices parallèles à $\vec{x}$.

TORSEUR STATIQUE

La densité surfacique $\vec{f}_p(S_1 \longrightarrow S_2)$ est perpendiculaire à la direction $\vec{x}$ du déplacement alors $\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2)$ est aussi perpendiculaire à $\vec{x}$. Pa conséquent, le torseur statique transmissible par la liaison est de la forme:

$$\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\} = {}_O\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}.$$

3.4.9. Liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$

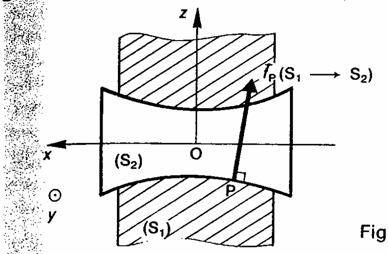


Fig. 46

URFACES DE LIAISON

es surfaces de liaison sont des surfaces de évolution, non cylindriques, autour de l'axe $(O, \vec{x})$.

REMARQUE

> *En pratique une telle liaison est généralement réalisée par association d'une liaison pivot glissant et d'une liaison appui plan.*

ORSEUR STATIQUE

a densité surfacique $\vec{f}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$ rencontre l'axe le rotation $(O, \vec{x})$. Par suite, son moment par apport à cet axe est nul et $\vec{M}_O(S_1 \longrightarrow S_2)$ n'a pas le composante sur l'axe $(O, \vec{x})$.

ar conséquent, le torseur statique transmissible par a liaison est de la forme :

$$\left\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\right\} = {}_O\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}.$$

3.4.10. Liaison encastrement

Dans ce cas les surfaces de liaison doivent empêcher tout mouvement relatif entre (S_1) et (S_2).

Par suite, le torseur statique transmissible par la liaison n'a aucune composante nulle :

$$\left\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\right\} = {}_O\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}.$$

3.4.11. Tableau récapitulatif

Dans le tableau présenté *figure 47* sont indiqués les torseurs statiques des liaisons **sans frottement** étudiées précédemment, ainsi que les points où les torseurs conservent leurs composantes nulles (colonne « forme particulière conservée » du tableau).

Si on compare le torseur statique d'une liaison sans frottement avec son torseur cinématique *(figure 7 du chapitre 3 de cinématique)* on constate que la somme :

$$\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2)\cdot\vec{V}(O \in S_2/S_1) + \vec{M}_O(S_1 \longrightarrow S_2)\cdot\vec{\Omega}(S_2/S_1)$$

est toujours nulle.

Cette propriété sera expliquée au *chapitre 3* de dynamique. Elle traduit le fait que la puissance des actions mutuelles de contact est nulle dans une liaison sans frottement.

TORSEURS STATIQUES DES LIAISONS					
Liaison	$\left\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\right\}$	Forme particulière conservée	Liaison	$\left\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\right\}$	Forme particulière conservée
ponctuelle de normale $(O, \vec{z})$	${}_O\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$	points de $(O, \vec{z})$	pivot glissant d'axe $(O, \vec{x})$	${}_O\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$	points de $(O, \vec{x})$
linéique rectiligne d'axe $(O, \vec{x})$ de normale $(O, \vec{z})$	${}_O\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$	points du plan $(O, \vec{z}, \vec{x})$	glissière hélicoïdale d'axe $(O, \vec{x})$	${}_O\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$ avec $L = -pX$	points de $(O, \vec{x})$
linéique annulaire d'axe $(O, \vec{x})$	${}_O\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$	au point O	glissière d'axe $(O, \vec{x})$	${}_O\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$	en tout point
rotule de centre O	${}_O\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$	au point O	pivot d'axe $(O, \vec{x})$	${}_O\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$	points de $(O, \vec{x})$
appui plan de normale $(O, \vec{z})$	${}_O\begin{Bmatrix} 0 & L \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$	en tout point	encastrement	${}_O\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$	en tout point

g. 47

A SAVOIR

1. Le premier principe de la statique :
toute action mécanique est entièrement caractérisée, d'un point de vue mécanique, par un torseur.

2. La relation vectorielle donnant la position du centre d'inertie G d'un ensemble matériel (E) :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{m}\int_{P\in E}\overrightarrow{AP}\,dm \quad (\forall A).$$

Si on considère une partition de E en n éléments $E_i(m_i, G_i)$:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{AG_i} \quad (\forall A).$$

3. Les lois de Coulomb :
si dans l'action mécanique de contact de (S_1) sur (S_2), on appelle au point P :

$\vec{n}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$ la densité surfacique normale,

$\vec{t}_P(S_1 \longrightarrow S_2)$ la densité surfacique tangentielle

et si dans le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1), on appelle au point P :

$\vec{V}(P\in S_2/S_1)$ le vecteur vitesse de glissement, les lois de Coulomb se résument ainsi :

Premier cas : $\vec{V}(P\in S_2/S_1)\neq\vec{0}$

alors : $\vec{t}_P(S_1 \longrightarrow S_2)\wedge\vec{V}(P\in S_2/S_1)=\vec{0}$

$\vec{t}_P(S_1 \longrightarrow S_2)\cdot\vec{V}(P\in S_2/S_1)<0$

$\|\vec{t}_P(S_1 \longrightarrow S_2)\|=f\|\vec{n}_P(S_1 \longrightarrow S_2)\|$

Deuxième cas : $\vec{V}(P\in S_2/S_1)=\vec{0}$

alors : $\|\vec{t}_P(S_1 \longrightarrow S_2)\|\leq f\|\vec{n}_P(S_1 \longrightarrow S_2)\|$

PROBLÈME RÉSOLU

Sur un broyeur de paille, attelé à un tracteur agricole, le moment du couple transmissible par le moteur est limité par un limiteur de couple à roues coniques dont le schéma cinématique est donné *figure 48.*

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au carter ⓪ du limiteur de couple. La roue conique motrice ③ a une liaison glissière d'axe $(O, \vec{y})$ avec l'arbre moteur ① qui a, ainsi que la roue conique réceptrice ②, une liaison pivot d'axe $(O, \vec{y})$ avec le carter ⓪.

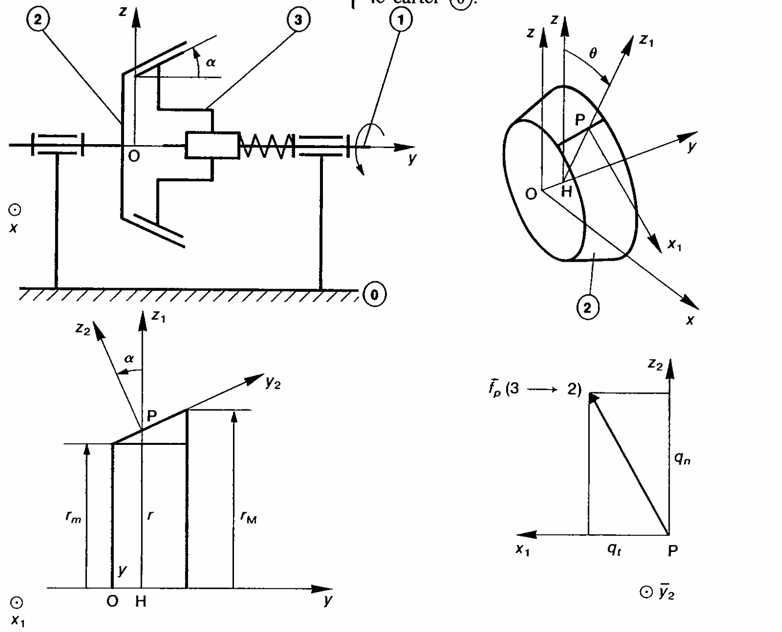


Fig. 48

Soient α le demi-angle au sommet des troncs de cône, et r_m et r_M les rayons minimum et maximum des cercles de section droite de la surface conique de contact entre ② et ③.

Soient q_n la pression de contact, supposée uniforme, de l'action mécanique de ③ sur ②, et f le coefficient de frottement des surfaces en contact.

Notons : $\{\mathcal{T}(3 \longrightarrow 2)\} = {}_{\mathrm{O}}\begin{Bmatrix} \vec{\mathrm{R}}(3 \longrightarrow 2) \\ \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}}(3 \longrightarrow 2) \end{Bmatrix}$

le torseur d'action mécanique de contact de la roue ③ sur la roue ②.

On pose : $\begin{cases} \mathrm{F} = -\vec{y} \cdot \vec{\mathrm{R}}(3 \longrightarrow 2) \\ \mathrm{C} = \vec{y} \cdot \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}}(3 \longrightarrow 2) \end{cases}$

F représente l'*effort presseur* exercé axialement par la roue ③ sur la roue ②.

C représente le *moment du couple* transmis par le limiteur de couple.

Le but de l'étude est la détermination du moment maximum $\mathrm{C_M}$ que peut transmettre ce mécanisme. Pour cela nous considérerons les roues ② et ③ à la limite du glissement.

Dans cette hypothèse nous pourrons définir complètement, en chaque point P de la surface de contact, le vecteur densité surfacique $\vec{f}_{\mathrm{P}}(3 \longrightarrow 2)$.

Supposons qu'à la limite du glissement, le vecteur rotation de ② par rapport à ③ soit de la forme : $\quad \vec{\Omega}(2/3) = \omega\vec{y}$ avec $\omega < 0$.

QUESTION 1

Paramétrer la position d'un point P quelconque de la surface de contact de la roue ② par rapport au repère R. Préciser la direction de la normale en ce point.

RÉPONSE

Soit H la projection orthogonale du point P considéré sur l'axe $(\mathrm{O}, \vec{y})$.

Soit $\mathrm{R_1}(\mathrm{H}, \vec{x}_1, \vec{y}, \vec{z}_1)$ le repère tel que le vecteur unitaire $\vec{z}_1$ ait même direction et même sens que le vecteur $\overline{\mathrm{HP}}$.

On pose :
$$\theta = (\vec{z}, \vec{z}_1)$$
$$y = \overline{\mathrm{OH}}$$
$$r = \overline{\mathrm{HP}}.$$

Soit $\mathrm{R_2}(\mathrm{P}, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ le repère tel que l'angle $(\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \alpha$.

Le vecteur unitaire $\vec{z}_2$ est normal en P à la surface conique.

QUESTION 2

Déterminer les composantes du vecteur densité surfacique $\vec{f}_{\mathrm{P}}(3 \longrightarrow 2)$ dans la base du repère local $\mathrm{R_2}(\mathrm{P}, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, en fonction du coefficient de frottement f et de la pression de contact q_n entre ② et ③.

RÉPONSE

Lorsqu'il y a rotation relative de ② par rapport à ③, calculons le vecteur vitesse de glissement du point P dans le mouvement de ② par rapport à ③ : $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P} \in 2/3)$.

Appliquons la relation entre les vecteurs vitesse des points P et H de ②, par rapport à ③

$$\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P} \in 2/3) = \vec{\mathrm{V}}(\mathrm{H} \in 2/3) + \vec{\Omega}(2/3) \wedge \overrightarrow{\mathrm{HP}}.$$

Le point H étant sur l'axe de rotation $(\mathrm{O}, \vec{y})$ commun à ② et ③ : $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{H} \in 2/3) = \vec{0}$ par suite :

$$\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P} \in 2/3) = \omega\vec{y} \wedge r\vec{z}_1$$
$$\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P} \in 2/3) = \omega r\vec{x}_1,$$

comme $\omega < 0$, le vecteur $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P} \in 2/3)$ a une composante négative sur $\vec{x}_1$, alors la densité surfacique tangentielle de l'action mécanique de contact de ③ sur ② a même direction et même sens que $\vec{x}_1$.

Par suite, on peut poser :

$$\vec{f}_{\mathrm{P}}(3 \longrightarrow 2) = q_n\vec{z}_2 + q_t\vec{x}_1$$

avec : $\quad q_n$ et $q_t > 0$

et : $\quad q_t = fq_n$

alors : $\boxed{\vec{f}_{\mathrm{P}}(3 \longrightarrow 2) = q_n\vec{z}_2 + fq_n\vec{x}_1.} \quad (6)$

QUESTION 3

Déterminer la pression de contact q_n en fonction de l'effort presseur F.

RÉPONSE

$$\mathrm{F} = -\vec{y} \cdot \vec{\mathrm{R}}(3 \longrightarrow 2).$$

Comme : $\quad \vec{\mathrm{R}}(3 \longrightarrow 2) = \int_{\mathrm{P} \in \mathrm{S}} \vec{f}_{\mathrm{P}}(3 \longrightarrow 2)\,\mathrm{d}s$

(S : surface de contact entre ② et ③) l'expression de F s'écrit en tenant compte de (6) :

$$\mathrm{F} = \int_{\mathrm{P} \in \mathrm{S}} -\vec{y} \cdot (q_n\vec{z}_2 + fq_n\vec{x}_1)\,\mathrm{d}s.$$

Sachant que q_n est constant, et que

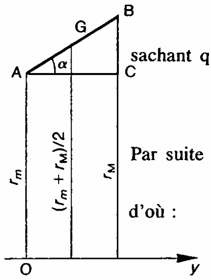
$$\begin{cases} \vec{y} \cdot \vec{z}_2 = -\sin\alpha \\ \vec{y} \cdot \vec{x}_1 = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{F} = q_n \sin\alpha \int_{\mathrm{P} \in \mathrm{S}} \mathrm{d}s$$

soit : $\quad \mathrm{F} = q_n \sin\alpha \cdot \mathrm{S}.$

S représentant l'aire de la surface de contact entre ② et ③, notée également S.

La surface latérale du tronc de cône s'obtient facilement par application du premier théorème de Guldin *(figure 49)*.



$$S = AB2\pi\left(\frac{r_M + r_m}{2}\right)$$

sachant que : $$AB = \frac{r_M - r_m}{\sin\alpha}$$

$$S = \frac{\pi}{\sin\alpha}(r_M^2 - r_m^2).$$

Par suite : $$F = \pi q_n(r_M^2 - r_m^2)$$

d'où : $$\boxed{q_n = \frac{F}{\pi(r_M^2 - r_m^2)}.} \qquad (7)$$

Fig. 49

QUESTION 4

Déterminer le moment maximum C_M du couple transmissible par le limiteur de couple, en fonction de l'effort presseur F.

RÉPONSE

$$C = \vec{y} \cdot \vec{M}_0(3 \longrightarrow 2).$$

Comme :

$$\vec{M}_0(3 \longrightarrow 2) = \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{f}_P(3 \longrightarrow 2)\,ds$$

l'expression de C_M s'écrit en tenant compte de (6) :

$$C_M = \int_{P \in S} \vec{y} \cdot [\overrightarrow{OP} \wedge (q_n\vec{z}_2 + fq_n\vec{x}_1)]\,ds$$

remplaçons $\overrightarrow{OP}$ par $y\vec{y} + r\vec{z}_1$ et inversons les produits scalaire et vectoriel du produit mixte écrit sous le signe somme.

$$C_M = \int_{P \in S} [\vec{y} \wedge (y\vec{y} + r\vec{z}_1)] \cdot (q_n\vec{z}_2 + fq_n\vec{x}_1)\,ds$$

avec :

$$\begin{cases} \vec{y} \wedge \vec{y} = \vec{0} \\ \vec{y} \wedge \vec{z}_1 = \vec{x}_1. \end{cases}$$

$$C_M = \int_{P \in S} r\vec{x}_1 \cdot (q_n\vec{z}_2 + fq_n\vec{x}_1)\,ds$$

en remarquant que : $$\begin{cases} \vec{x}_1 \cdot \vec{z}_2 = 0 \\ \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1 = 1 \end{cases}$$

$$C_M = fq_n \int_{P \in S} r\,ds.$$

Si on choisit comme élément d'intégration troncs de cône d'épaisseur dy, de rayon r, pour expression :

$$ds = 2\pi r \frac{dy}{\cos\alpha}$$

or $$r = r_m + y \operatorname{tg}\alpha$$

différentions cette égalité pour obtenir dy.

$$dr = \operatorname{tg}\alpha\, dy$$

alors $$dy = \frac{dr}{\operatorname{tg}\alpha} \quad (\text{si } \alpha \neq 0)$$

et $$ds = \frac{2\pi}{\sin\alpha} r\,dr.$$

Par suite $$C_M = \frac{2\pi f q_n}{\sin\alpha} \int_{r_m}^{r_M} r^2\,dr$$

soit $$C_M = \frac{2\pi f q_n}{3\sin\alpha}(r_M^3 - r_M^2)$$

avec l'expression de q_n obtenue en (7) :

$$\boxed{C_M = \frac{2fF}{3\sin\alpha} \cdot \frac{r_M^3 - r_m^3}{r_M^2 - r_m^2}.}$$

REMARQUE

Dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (surfaces de cont planes) :

$$\boxed{C_M = \frac{2}{3} fF \frac{r_M^3 - r_m^3}{r_M^2 - r_m^2}}$$

et si de plus r_M et r_m sont peu différents, peut assimiler le terme :

$$\frac{2}{3}\frac{r_M^3 - r_m^2}{r_M^2 - r_m^2} \text{ à } r = \frac{r_M + r_m}{2}$$

alors : $$\boxed{C_M = rfF.}$$

CONSEILS POUR LA RESOLUTION

1. Le moment résultant en un point d'un système de *n* forces n'est pas le moment en ce point de la résultante de ces forces, sauf si le torseur associé à ces *n* forces est à résultante, car dans ce cas le moment central est nul.

2. Pour appliquer les lois de Coulomb dans le cas où le vecteur vitesse de glissement n'est pas nul, il faut considérer l'action mécanique de (S_1) sur (S_2) et le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1).

3. L'hypothèse qui consiste à se placer à la li du glissement pour résoudre certains proble doit être compatible avec les équations dedu du principe fondamental de la statique, co nous le verrons au *chapitre 2*, et sa validité être vérifiée une fois les calculs faits.

4. Les torseurs statiques des liaisons mis évidence dans le cours ne sont valables que des liaisons sans frottement.

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 — Déterminer le centre d'inertie :

a) d'un cône de révolution de hauteur h, de rayon de cercle de base r, homogène, creux et d'épaisseur négligeable, sans la base *(figure 50)*,

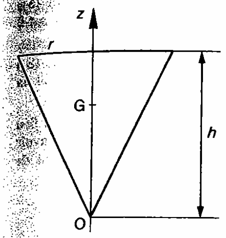


Fig. 50

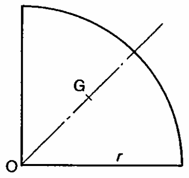


Fig. 51

b) d'une plaque homogène, d'épaisseur négligeable, ayant la forme d'un quart de cercle de rayon r *(figure 51)*.

RÉPONSES

a) $OG = \frac{2}{3}h$.

b) $OG = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}r$.

2 — Un barrage poids en béton (masse volumique ρ_b), cylindrique, de section droite trapézoïdale (largeurs a et b, hauteur h) repose sur un massif poreux *(figure 52)*.

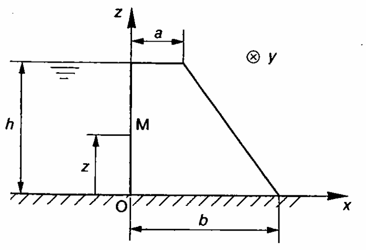


Fig. 52

L'eau exerce sur la paroi verticale du barrage une action mécanique définie par la densité surfacique : $\vec{f}_M = \rho_e g(h - z)\vec{x}$ avec :

ρ_e : masse volumique de l'eau
g : accélération de la pesanteur
z : abscisse du point M.

On donne :

$\rho_b = 2{,}5$ kg/dm³, $\rho_e = 1$ kg/dm³, $a = 5$ m
$b = 20$ m, $h = 30$ m, $g = 9{,}81$ m/s².

QUESTIONS

En ne considérant que l'unité de longueur du barrage :

1° Déterminer au point O le torseur d'action mécanique de l'eau sur le barrage.
Montrer que ce torseur est à résultante.
Donner la valeur numérique de sa résultante générale $\vec{F}$.
Déterminer la position de son axe central Δ.

2° Calculer le poids $\vec{P}$ du barrage ainsi que la position de son centre de gravité G suivant l'axe $(O, \vec{x})$.

3° Anticipons sur le prochain chapitre (principe fondamental de la statique) :
Soit $\vec{R}$ la résultante générale du torseur d'action mécanique du sol sur le barrage.
Sachant que le barrage est en équilibre par rapport au sol, déterminer :

a) Le point d'intersection I de l'axe central du torseur d'action mécanique du sol sur le barrage avec l'axe $(O, \vec{x})$.

b) La valeur minimum du coefficient de frottement f entre le sol et le barrage pour que le barrage ne glisse pas sur le sol.

RÉPONSES

1° $\{\mathcal{T}(\text{eau} \longrightarrow \text{barrage})\} = \underset{O}{\begin{Bmatrix} \rho_e g \frac{h^2}{2}\vec{x} \\ \rho_e g \frac{h^3}{6}\vec{y} \end{Bmatrix}}$.

— Les deux éléments de réduction du torseur sont perpendiculaires, par conséquent le torseur est à résultante.

— $\|\vec{F}\| = 4{,}41 \cdot 10^6$ N.

— Le pied H de la perpendiculaire abaissée de O sur Δ est défini par le vecteur $\overrightarrow{OH} = \frac{h}{3}\vec{z}$ *(figure 53)*.

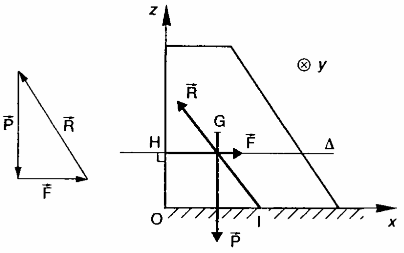


Fig. 53

2° $\|\vec{P}\| = 9{,}2 \cdot 10^6$ N, $x_G = \dfrac{a^2 + b^2 + ab}{3(a+b)}$.

3° *a*) $x_I = \dfrac{1}{3(a+b)}\left(a^2 + b^2 + ab + \dfrac{\rho_e}{\rho_b}h^2\right)$

$x_I = 11{,}8$ m,

b) $f > \dfrac{\rho_e}{\rho_b}\dfrac{h}{a+b}$ d'où $f > 0{,}48$.

3 — Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié à un bâti (S_0). Deux roues coniques (S_1) et (S_2) en rotation par rapport au bâti (S_0) autour des axes parallèles $(O, \vec{z}_0)$ et $(A, \vec{z}_0)$ ont pour demi-angle au sommet α et pour rayon moyen r_1 et r_2 respectivement *(figure 54).*

On pose :

$$\begin{cases} \vec{\Omega}(S_1/R_0) = \omega_1 \vec{z}_0 & \text{avec} \quad \omega_1 > 0. \\ \vec{\Omega}(S_2/R_0) = -\omega_2 \vec{z}_0 \end{cases}$$

(S_1) et (S_2) sont en contact suivant une faible longueur de génératrice, si bien que le contact peut être assimilé à un contact ponctuel au point I.

On pose :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OI} = r_1 \vec{y}_0 \\ \overrightarrow{IA} = r_2 \vec{y}_0. \end{cases}$$

Les roues (S_1) et (S_2) roulent sans glisser l'une sur l'autre au point I.

Soit $R(I, \vec{x}_0, \vec{y}, \vec{z})$ le repère tel que l'axe $(I, \vec{y})$ ait même direction que la génératrice de contact des surfaces coniques. Soit :

$$\{\mathcal{T}(S_2 \longrightarrow S_1)\} = {}_I\begin{Bmatrix} X\vec{x}_0 + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ L\vec{x}_0 + M\vec{y} + N\vec{z} \end{Bmatrix}.$$

Le torseur d'action mécanique de (S_2) sur (S_1), au point I.

Notons entre les surfaces (S_1) et (S_2) :

$$\begin{cases} f : \text{le coefficient de frottement} \\ \delta : \text{le paramètre de résistance au pivotement} \\ \eta : \text{le paramètre de résistance au roulement.} \end{cases}$$

QUESTIONS

1° Dans le mouvement de (S_1) par rapport à (
déterminer le vecteur rotation de pivotement et le vecte
rotation de roulement en fonction de r_1, r_2, ω_1 et

2° Sachant que (S_1) roule sans glisser sur (S_2) au point
quelle relation y a-t-il entre X, Y et Z?

3° Sachant que le vecteur rotation de pivotement de (
par rapport à (S_2) n'est pas nul, quelle relation y a-
entre N et Z?

4° Sachant que le vecteur rotation de roulement de (
par rapport à (S_2) n'est pas nul, déterminer L et
relation entre M et Z.

5° Si on considère que le contact entre (S_1) et (S_2) a li
suivant une génératrice, montrer qu'il ne peut y av
qu'un seul point où le vecteur vitesse de glissement
(S_1) par rapport à (S_2) soit nul.

RÉPONSES

1° $\vec{\Omega}_n(S_1/S_2) = \left(1 + \dfrac{r_1}{r_2}\right)\omega_1 \sin\alpha\,\vec{z}$

$\vec{\Omega}_t(S_1/S_2) = \left(1 + \dfrac{r_1}{r_2}\right)\omega_1 \cos\alpha\,\vec{y}$.

2° $\|X\vec{x} + Y\vec{y}\| \leqslant fZ$.

3° $-N = \delta Z$.

4° $L = 0$.

$-M = \eta Z$.

5° Les points de l'axe central Δ du torseur cinématiq
du mouvement de (S_1) par rapport à (S_2) ont un vecte
vitesse nul.

Or Δ a même direction que la résultante généra
$\vec{\Omega}(S_1/S_2) = (\omega_1 + \omega_2)\vec{z}_0$ de ce torseur.

Δ ne peut donc couper la génératrice de contact ent
(S_1) et (S_2) qu'en un seul point.

Par conséquent, il n'y a qu'un seul point où il n'y
pas de glissement. Ce point n'est pas nécessaireme
le point I.

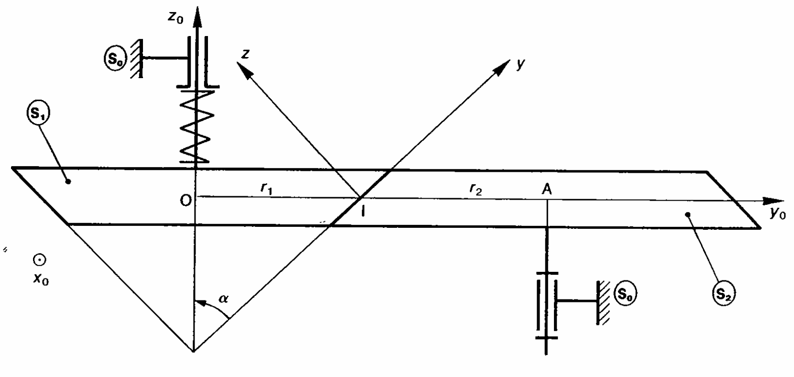


Fig. 54

1 — La butée Michell employée dans la construction d'un groupe turbo-alternateur hydraulique, se compose d'un arbre vertical reposant, par l'intermédiaire d'un film d'huile, sur une couronne de 8 patins articulés (*figure 55*).

L'arbre tourne à la vitesse angulaire de 100 tr/min. La charge verticale que doit supporter la butée est $Q = 6 \cdot 10^6$ N.

L'aire active d'un patin est assimilable à un carré de côté $l = 50$ cm, dont la section médiane est tangente au cercle de rayon $r = 75$ cm.

On montre, en première approximation, que la loi de répartition des pressions entre le patin et la base de l'arbre est uniquement une fonction de l'abscisse x du point considéré, dont l'expression est

$$p(x) = \frac{6\mu V x(l - x)}{\alpha^2(2a - l)(a - x)^2}$$

avec

μ : viscosité dynamique de l'huile (en poiseuille)

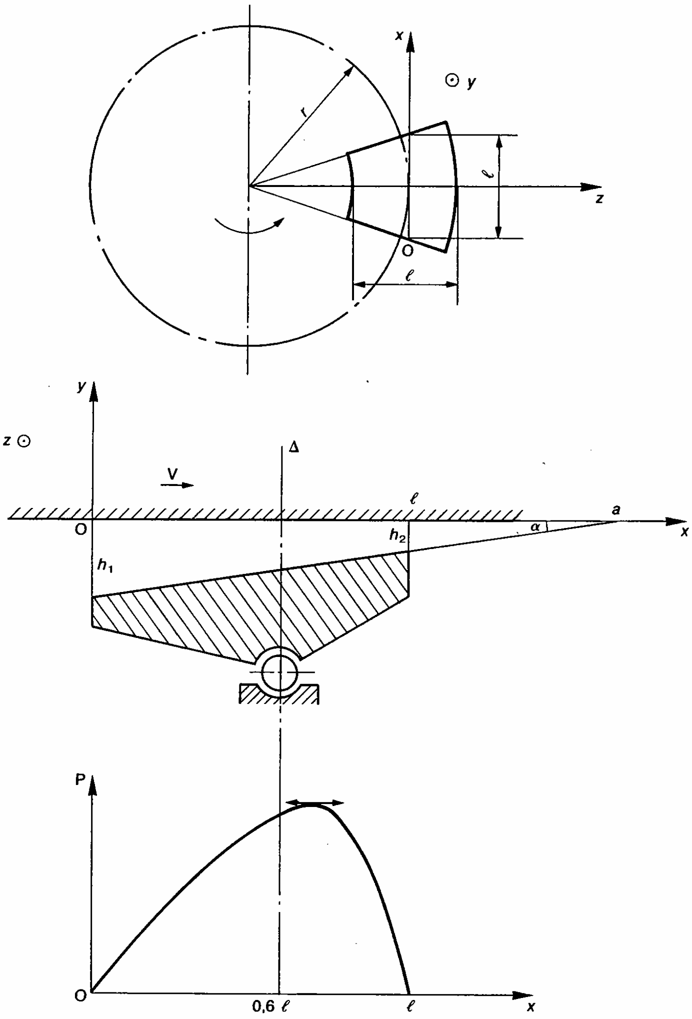


Fig. 55

V : vitesse d'un point de l'arbre sur le cercle d'un rayon r (en m/s)
α : angle d'inclinaison du patin (en radians)
l : longueur du patin (en m)
a : longueur telle que $h_2=(a-l)\operatorname{tg}\alpha$
h_2 est la hauteur du film d'huile à la sortie du patin (en m).

On donne :

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{100} \text{ de degré} \\ h_2 = 0{,}05 \text{ mm.} \end{cases}$$

QUESTIONS

1° Déterminer la résultante générale $\vec{R}$ des forces de pression s'exerçant sur la base inférieure de l'arbre, par unité de largeur du patin.

2° Quelle doit être la viscosité dynamique de l'huile pour obtenir les conditions de fonctionnement indiquées?

3° Déterminer le support Δ de la résultante générale des forces de pression s'exerçant sur la surface du patin.

RÉPONSES

1° Sachant que

$$\frac{x(l-x)}{(a-x)^2} = -1 + \frac{2a-l}{a-x} - \frac{a(a-l)}{(a-x)^2}.$$

On trouve :

$$\vec{R} = \frac{6\mu V}{\alpha^2}\left[\ln\frac{a}{a-l} - \frac{2l}{2a-l}\right]\vec{y}.$$

2° La viscosité dynamique est :

$$\mu = 0{,}0122 \text{ Pl (poiseuille).}$$

En réalité la viscosité dynamique adoptée est $\frac{9}{4}$ fois plus grande que celle calculée, à cause des fuites latérales. Soit :

$$\mu = 0{,}0275 \text{ Pl (poiseuille)}$$

ou $\mu = 27{,}5$ cPo (centipoise).

(Pour fixer les idées, la viscosité de l'eau à 20 °C est 1 cPo.)

3° Sachant que :

$$\frac{x^2(l-x)}{(a-x)^2} = -(x+2a-l) + \frac{a(3a-2l)}{a-x} - \frac{a^2(a-l)}{(a-x)^2}.$$

On trouve que le moment résultant $\vec{M}_0$ des forces de pression s'exerçant sur la surface du patin, par unité de largeur, est :

$$\vec{M}_0 = \frac{3\mu V}{\alpha^2(2a-l)}\left[l(6a-l) - 2a(3a-2l)\ln\frac{a}{a-l}\right]\vec{z}.$$

Par suite Δ se trouve à une distance de 0,6 l de l'a
$(O, \vec{y})$.
Cette distance détermine la position de l'axe de rotati
du patin.

5 — Une vanne schématisée par un secteur circul
de centre C, de rayon r, ferme une retenue d'eau p
laquelle la hauteur de la surface libre est h *(figure*

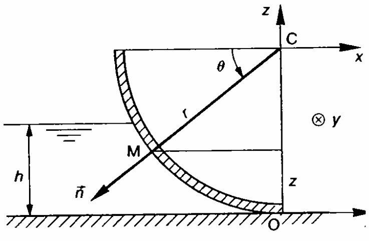


Fig. 56

L'eau exerce sur la surface du secteur une ac
mécanique définie par la densité surfacique :

$$\vec{f}_M = -\rho_e g(h-z)\vec{n}$$

avec :

ρ_e : masse volumique de l'eau
g : accélération de la pesanteur
z : abscisse du point M
$\vec{n}$: vecteur unitaire normal à la surface de cont
dirigé vers l'extérieur du secteur.

On donne :

$$\begin{cases} \rho_e = 1 \text{ kg/dm}^3 \\ g = 9{,}81 \text{ m/s}^2 \\ r = 1{,}2 \text{ m} \\ h = 0{,}6 \text{ m.} \end{cases}$$

QUESTIONS

En ne considérant que l'unité de longueur de la va

**1° Déterminer la résultante générale $\vec{R}$ du to
d'action mécanique de l'eau sur la vanne.**

**2° En déduire l'orientation de l'axe central Δ d
torseur d'action mécanique.**

RÉPONSES

1° $\|\vec{R}\| = 469$ daN et $(\vec{x}, \vec{R}) = 67{,}85$ degrés
2° Δ a même direction que $\vec{R}$.

EXERCICES SANS RÉPONSES

6 — Déterminer le centre d'inertie :

a) d'une demie sphère de rayon r, pleine et homogène *(figure 57)*.

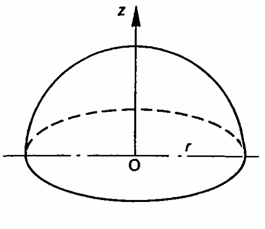


Fig. 57

b) d'une plaque homogène, d'épaisseur négligeable, ayant la forme indiquée sur la *figure 58* OA = AB = r.

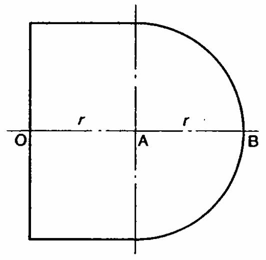


Fig. 58

7 — Une poutre droite de section carrée est encastrée dans un mur. A son extrémité A s'exerce une action mécanique représentée par la force $(A, -F\vec{z})$ *(figure 59)*.

Afin d'évaluer les pressions de contact qu'exerce la poutre sur le mur, on adopte des lois de répartition de pression linéaires en fonction de y, et constantes en fonction de x, sur les faces supérieure et inférieure de la poutre, comme indiqué sur la figure.

QUESTIONS

Sachant que ces pressions de contact ont une action mécanique équivalente à la force $(A, -F\vec{z})$, déterminer :

1° La loi de répartition des pressions de contact en tout point de la face supérieure et de la face inférieure de la poutre.

2° En déduire la valeur maximum de la pression de contact qu'exerce la poutre sur le mur.

REMARQUE

> *Deux actions mécaniques sont équivalentes quand on peut les représenter par un même torseur.*

8 — Deux rotors verticaux de 2 mètres de diamètre et de 8 mètres de hauteur, en rotation autour de leur axe à la vitesse angulaire de 200 tr/min, sont utilisés pour la propulsion d'un navire *(figure 60)*.

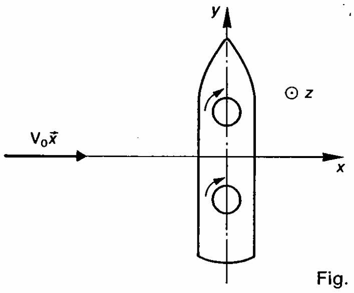


Fig. 60

Le vecteur vitesse relative $V_0\vec{x}$ du vent par rapport au navire est de 40 km/h et il est perpendiculaire au navire.

La force propulsive qui entraîne le navire est due à l'*effet Magnus :* lorsqu'on place dans un courant d'air un cylindre animé d'un mouvement de rotation autour de son axe, le cylindre met en mouvement par viscosité

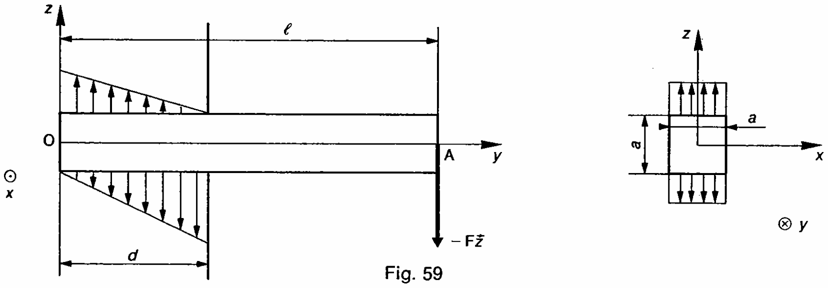


Fig. 59

les filets fluides qui le contournent, et qui engendrent alors une action mécanique sur le cylindre, représentée par une force perpendiculaire à la direction du courant d'air dont le sens dépend du sens de rotation du cylindre. (Cet effet Magnus explique aussi la courbure que présente la trajectoire d'une balle de tennis coupée.)

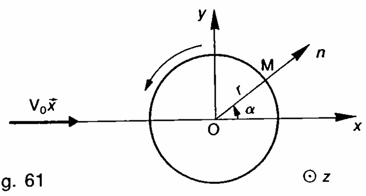


Fig. 61

On montre en aérodynamique que dans un tel écoulement la répartition des pressions sur le cylindre est :

$$\vec{p}\,(\mathrm{M}) = -\frac{1}{2}\rho V_0^2\left[1-\left(\frac{\omega r}{V_0}-2\sin\alpha\right)^2\right]\vec{n}$$

avec :

ρ : masse volumique de l'air.
V_0 : vitesse du vent suivant $(O, \vec{x})$.
ω : vitesse de rotation du cylindre autour de l'axe $(O, \vec{z})$.
r : rayon du cylindre.
$\vec{n}$: vecteur unitaire normal à la surface latérale du cylindre, orienté vers l'extérieur du cylindre.
$\alpha = (\vec{x}, \vec{n})$.

V_0 *et* ω sont algébriques.

On donne : $\rho = 1{,}225\ \mathrm{kg/m^3}$.

QUESTIONS

1° Montrer que la résultante générale des pressions aérodynamiques est par unité de longueur du cylindre :

$$\vec{F} = -2\pi\rho V_0\omega r^2\vec{y}.$$

2° En déduire la forme propulsive théorique qui entraîne le navire.

9 — Un flotteur de carburateur correspondant à la coupe partielle de la *figure 62a* peut être assimilé à un tronc de cône de révolution dont les caractéristiques sont données dans la *figure 62b*.

En chaque point M de la surface immergée du flotteur, l'essence exerce une action mécanique définie par la densité surfacique :

$$\vec{f}_M = -\rho g(h-z)\,\vec{n}$$

avec :

ρ : masse volumique de l'essence.
g : accélération de la pesanteur.
$\vec{n}$: vecteur unitaire normal au point M à la surfac du flotteur, dirigé vers l'extérieur du flotteur
z : abscisse du point M sur l'axe $(O, \vec{z})$.

Pour lester le flotteur il est nécessaire de connaîtr l'action mécanique de l'essence sur le flotteur.

QUESTIONS

1° Montrer que le torseur d'action mécanique des force de pression exercées par l'essence sur le flotteur s'écri au point O :

$$\{\mathcal{T}(\text{essence} \longrightarrow \text{flotteur})\} = {}_{O}\left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}.$$

avec : $$\vec{R} = \pi\rho g h\left[r^2 + h\ \mathrm{tg}\ \alpha\left(r+\frac{h}{3}\,\mathrm{tg}\ \alpha\right)\right].$$

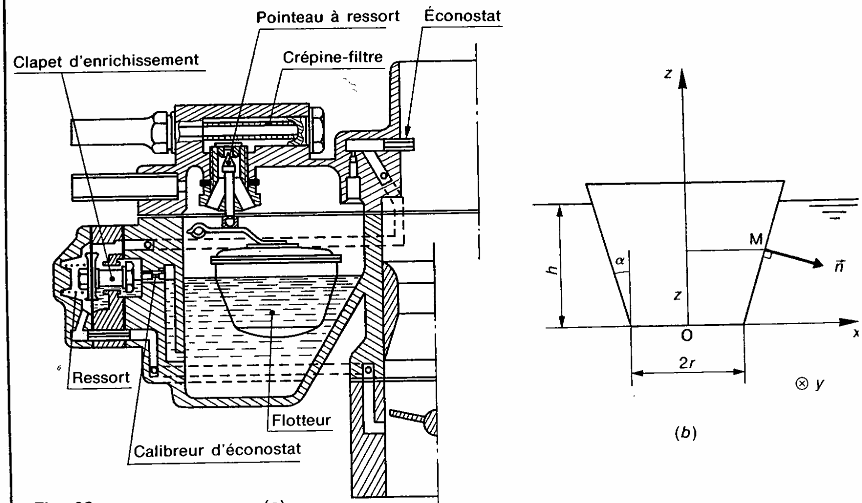


Fig. 62 (*a*) (*b*)

2° Vérifier ce résultat en appliquant le principe d'Archimède.

10 — Calcul de l'étendue de la surface de contact et de la pression maximum de contact entre deux corps par les relations de Hertz dans les deux cas particuliers suivants :

a) contact linéique cylindre sur cylindre,

b) contact ponctuel sphère sur sphère.

Lorsque l'un des rayons est infini, le contact est celui d'un cylindre ou d'une sphère sur un plan.
Les relations de Hertz que nous allons donner sont valables dans le domaine élastique pour un coefficient de Poisson de $\frac{3}{10}$.

Pour ce calcul, il faut définir :

1° La courbure relative entre les surfaces en contact :

$$\boxed{\frac{1}{r_r}=\frac{1}{r_1}\pm\frac{1}{r_2}}$$

avec :

$\left\{\begin{array}{l} r_r \text{ : rayon de courbure relative.} \\ r_1 \text{ : rayon du cylindre ou de la sphère ①,} \\ r_2 \text{ : rayon du cylindre ou de la sphère ②,} \\ \text{signe + pour tangence extérieure,} \\ \text{signe − pour tangence intérieure.} \end{array}\right.$

2° Le module d'élasticité de calcul E :

$$\boxed{\frac{1}{E}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)}$$

$\left\{\begin{array}{l} E_1 \text{ module d'élasticité du matériau de ①.} \\ E_2 \text{ module d'élasticité du matériau de ②.} \end{array}\right.$

Premier cas : Contact cylindre sur cylindre *(figure 63)*

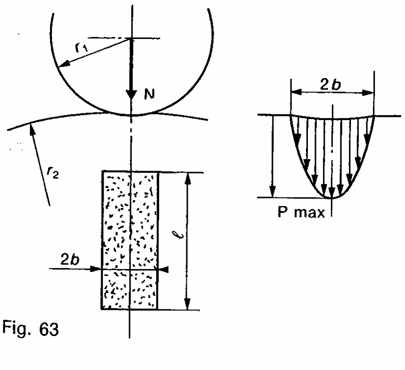


Fig. 63

demi-largeur de contact :

$$\boxed{b=1{,}52\sqrt{\frac{N\cdot r_r}{E\cdot l}}}$$

pression spécifique maximale :

$$\boxed{P_{max}=0{,}418\sqrt{\frac{N\cdot E}{r_r\cdot l}}.}$$

Deuxième cas : Contact sphère sur sphère *(figure 64)*

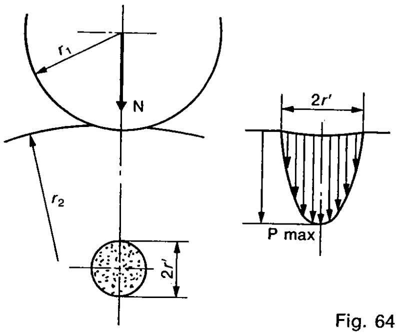


Fig. 64

rayon du cercle de contact :

$$\boxed{r'=1{,}11\sqrt[3]{\frac{N\cdot r_r}{E}}}$$

pression spécifique maximale :

$$\boxed{P_{max}=0{,}388\sqrt[3]{N\left(\frac{E}{r_r}\right)^2}.}$$

QUESTIONS

1° Deux roues de friction cylindriques d'axes parallèles, de rayon $r_1=3$ cm et $r_2=8$ cm, sont en contact sur une largeur $l=1{,}5$ cm. Sachant que :

$$\left\{\begin{array}{l} p_{max}=3 \text{ MPa} \\ E_1=200\,000 \text{ MPa} \\ E_2=210\,000 \text{ MPa.} \end{array}\right.$$

Déterminer :

***a)* L'effort presseur maximum N que l'on peut exercer entre ces roues.**

***b)* La largeur 2*b* de la bande de contact.**

2° Une sphère de rayon $r=3$ cm, de poids $P=7$ N repose sur un plan horizontal.
Sachant que le plan et la sphère ont même module d'Young : $E=200\,000$ MPa, déterminer le rayon r' du cercle de contact entre la sphère et le plan, ainsi que la pression spécifique maximum.

2 □ principe fondamental de la statique

Le but de ce chapitre est en particulier la détermination des torseurs d'action mécanique s'exerçant sur un ensemble matériel (E), lorsque (E) est en équilibre par rapport à un repère galiléen. Pour cela, il est nécessaire de formuler le principe fondamental de la statique après avoir défini au préalable la notion d'équilibre d'un ensemble matériel par rapport à un repère.

1. EQUILIBRE D'UN ENSEMBLE MATERIEL PAR RAPPORT A UN REPERE

Soit un ensemble matériel (E) quelconque. (E) peut être un solide, un ensemble de solides liés ou non, une certaine masse de liquide ou de gaz, etc.

Définition

On dira que l'ensemble matériel (E) est en équilibre par rapport à un repère R si, au cours du temps, chaque point de (E) conserve une position fixe par rapport au repère R.

Cas particulier du solide

Un solide (S) est en équilibre par rapport à un repère R si les paramètres qui définissent sa position dans R sont constants au cours du temps.

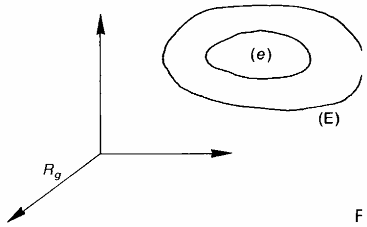
2. PRINCIPE FONDAMENTAL

2.1. ÉNONCÉ

Il existe au moins un repère, appelé repère galiléen, tel que pour tout sous-ensemble matériel (*e*) de l'ensemble matériel (E) en équilibre par rapport à ce repère, le torseur associé aux actions mécaniques extérieures à (*e*) soit nul.

Notons R_g le repère galiléen et $\bar{e}$ l'extérieur de *e*. Le principe fondamental de la statique formule l'existence d'au moins un repère R_g tel que puisse écrire :

$$\boxed{\{\mathcal{T}(\bar{e} \longrightarrow e)\}=\{\vec{0}\}} \qquad \forall(e)\subset(E)$$



F

2.2. REPÈRE GALILÉEN

Pour la plupart des mécanismes étudiés laboratoire, un repère lié à la terre constitue très bonne approximation d'un repère galiléen Un repère galiléen est donc un repère dans l on peut vérifier le principe fondamental d statique avec une bonne précision.

2.3. THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE LA STATIQUE

En écrivant qu'en tout point de l'espace résultante générale et le moment résultant du to associé aux actions mécaniques extérieure sous-ensemble matériel (*e*) sont nuls, on o deux théorèmes appelés théorèmes généraux statique.

sons : $\{\mathcal{T}(\bar{e} \longrightarrow e)\} = {}_{\mathrm{A}}\left\{\begin{matrix}\vec{\mathrm{R}}(\bar{e} \longrightarrow e) \\ \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{A}}(\bar{e} \longrightarrow e)\end{matrix}\right\}$

en un point A quelconque.

Théorème de la résultante statique

Pour tout sous-ensemble matériel (e) de l'ensemble matériel (E) en équilibre par rapport au repère galiléen R_g la résultante générale du torseur associé aux actions mécaniques extérieures à (e) est nulle.

Soit $\boxed{\vec{\mathrm{R}}(\bar{e} \longrightarrow e) = \vec{0}.}$

Théorème du moment statique

Pour tout sous-ensemble matériel (e) de l'ensemble matériel (E) en équilibre par rapport au repère galiléen R_g, le moment résultant du torseur associé aux actions mécaniques extérieures à (e) est nul en tout point.

Soit $\boxed{\vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{A}}(\bar{e} \longrightarrow e) = \vec{0} \quad \forall \mathrm{A}}$

2.4. REMARQUE IMPORTANTE

Si le torseur $\{\mathcal{T}(\bar{e} \longrightarrow e)\}$ est nul, (e) n'est pas nécessairement en équilibre par rapport au repère galiléen, même si (e) est un solide. En effet, considérons les deux exemples suivants :

EXEMPLE 1

Une paire de ciseaux (e) est soumise à l'action mécanique de deux doigts (d_1) et (d_2) représentée par les deux vecteurs liés opposés $(\mathrm{A}, \vec{\mathrm{F}})$ et $(\mathrm{B}, -\vec{\mathrm{F}})$ *(figure 2a)*. L'action de la pesanteur est négligée.

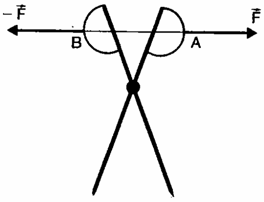


Fig. 2*a*

Appliquons le principe fondamental de la statique à la paire de ciseaux (e), sans se soucier de savoir si elle est en équilibre par rapport à un repère galiléen. ($\bar{e}$), l'extérieur de (e), est uniquement constitué par les deux doigts (d_1) et (d_2) si on néglige l'action mécanique de la pesanteur :

$$(\bar{e}) = \{d_1, d_2\}.$$

Le torseur d'action mécanique de (d_1) sur (e) s'écrit au point A :

$$\{\mathcal{T}(d_1 \longrightarrow e)\} = {}_{\mathrm{A}}\left\{\begin{matrix}\vec{\mathrm{F}} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}.$$

Le torseur d'action mécanique de (d_2) sur (e) s'écrit au point B :

$$\{\mathcal{T}(d_2 \longrightarrow e)\} = {}_{\mathrm{B}}\left\{\begin{matrix}-\vec{\mathrm{F}} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$$

Le torseur associé à ces deux actions mécaniques, c'est-à-dire le torseur $\{\mathcal{T}(\bar{e} \longrightarrow e)\}$ est égal à :

$$\{\mathcal{T}(\bar{e} \longrightarrow e)\} = {}_{\mathrm{A}}\left\{\begin{matrix}\vec{\mathrm{F}} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\} + {}_{\mathrm{B}}\left\{\begin{matrix}-\vec{\mathrm{F}} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$$

Pour ajouter ces deux torseurs, exprimons-les au même point A. Le moment résultant en A du deuxième torseur est nul, car $\vec{\mathrm{F}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ont même direction.
Alors :

$$\{\mathcal{T}(\bar{e} \longrightarrow e)\} = {}_{\mathrm{A}}\left\{\begin{matrix}\vec{\mathrm{F}} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\} + {}_{\mathrm{A}}\left\{\begin{matrix}-\vec{\mathrm{F}} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$$

d'où $\{\mathcal{T}(\bar{e} \longrightarrow e)\} = \{\vec{0}\}.$

Ce torseur est bien nul, mais la paire de ciseaux s'ouvre...
La condition $\{\mathcal{T}(\bar{e} \longrightarrow e)\} = \{\vec{0}\}$ n'est donc pas une condition suffisante d'équilibre pas rapport au repère galiléen.

EXEMPLE 2

Soit $\mathrm{R}_g(\mathrm{O}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié à un bâti (S_0) et un arbre (S) ayant avec (S_0) une liaison pivot d'axe $(\mathrm{O}, \vec{x})$.

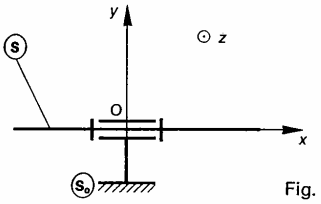


Fig. 2*b*

Supposons cet arbre (S) en mouvement de rotation uniforme par rapport au bâti (S_0) et dynamiquement équilibré par rapport à l'axe de rotation $(\mathrm{O}, \vec{x})$. (Nous verrons en dynamique, au *chapitre 2*, qu'un arbre est dynamiquement équilibré lorsque son centre d'inertie est sur l'axe de rotation et que cet axe de rotation est axe principal d'inertie pour l'arbre.)
Pour ce mouvement, on montre, en dynamique, que le torseur associé aux actions mécaniques extérieures à l'arbre est nul. Et pourtant, il tourne...

3. THÉORÈME DES ACTIONS MUTUELLES

Soit (E) un ensemble matériel en équilibre par rapport à un repère galiléen R_g. Soit une partition de (E) en deux sous-ensembles matériels (e_1) et (e_2) *(figure 3)*.

Appliquons le principe fondamental de la statique à (e_1) :

$$\{\mathcal{T}(\bar{e}_1 \longrightarrow e_1)\} = \{\vec{0}\}.$$

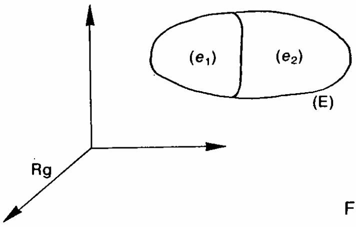


Fig. 3

$(\bar{e}_1)$, l'extérieur de (e_1), est constitué par l'extérieur de (E) et (e_2).

$$(\bar{e}_1)=\{\mathrm{E}, e_2\}.$$

Alors :

$$\{\mathcal{T}(\overline{\mathrm{E}} \longrightarrow e_1)\}+\{\mathcal{T}(e_2 \longrightarrow e_1)\}=\{\vec{0}\}. \quad (1)$$

Appliquons le principe fondamental de la statique à (e_2) :

$$\{\mathcal{T}(\bar{e}_2 \longrightarrow e_2)\}=\{\vec{0}\}.$$

$(\bar{e}_2)$, l'extérieur de (e_2), est constitué par l'extérieur de (E) et (e_1).

$$(\bar{e}_2)=\{\overline{\mathrm{E}}, e_1\}.$$

Alors :

$$\{\mathcal{T}(\overline{\mathrm{E}} \longrightarrow e_2\}+\{\mathcal{T}(e_1 \longrightarrow e_2)\}=\{\vec{0}\}. \quad (2)$$

Ajoutons membre à membre les relations (1) et (2) :

$$\{\mathcal{T}(\overline{\mathrm{E}} \longrightarrow e_1)\}+\{\mathcal{T}(\overline{\mathrm{E}} \longrightarrow e_2)\} +\{\mathcal{T}(e_2 \longrightarrow e_1)\}+\{\mathcal{T}(e_1 \longrightarrow e_2)\}=\{\vec{0}\}. \quad (3)$$

Les deux premiers torseurs représentent l'action mécanique de l'extérieur de (E) sur (e_1) et (e_2), c'est-à-dire sur (E).

Par conséquent :

$$\{\mathcal{T}(\overline{\mathrm{E}} \longrightarrow e_1)\}+\{\mathcal{T}(\overline{\mathrm{E}} \longrightarrow e_2)\} =\{\mathcal{T}(\overline{\mathrm{E}} \longrightarrow \mathrm{E})\}$$

(3) s'écrit alors :

$$\{\mathcal{T}(\overline{\mathrm{E}} \longrightarrow \mathrm{E})\}+\{\mathcal{T}(e_2 \longrightarrow e_1)\} +\{\mathcal{T}(e_1 \longrightarrow e_2)\}=\{\vec{0}\}. \quad (4)$$

Or, l'application du principe fondamentale de la statique à (E) permet d'écrire que :

$$\{\mathcal{T}(\overline{\mathrm{E}} \longrightarrow \mathrm{E})\}=\{\vec{0}\}.$$

Par suite la relation (4) devient :

$$\boxed{\{\mathcal{T}(e_2 \longrightarrow e_1)\}=-\{\mathcal{T}(e_1 \longrightarrow e_2)\}}$$

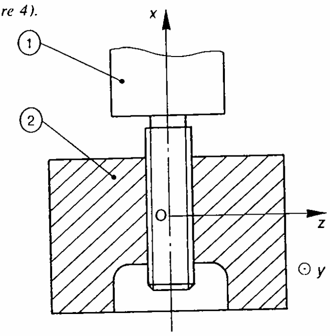
d'où le théorème ci-dessous :

Théorème

L'action mécanique du sous-ensemble matériel (e_2) sur le sous-ensemble matériel (e_1) est opposée à l'action mécanique de (e_1) sur (e_2).

4. APPLICATION : SYSTÈME VIS-ÉCROU

Considérons un système vis-écrou d'axe (O, . *(figure 4).*



Fig

Le repère galiléen $\mathrm{R}(\mathrm{O}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié à la vis (1). l'écrou (2) s'exerce l'action mécanique d'un corps représentée par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(\mathrm{E} \longrightarrow 2)\}= {}_{\mathrm{O}}\begin{Bmatrix}\vec{\mathrm{F}}\\ \vec{\mathrm{C}}\end{Bmatrix}$$

avec $\vec{\mathrm{F}}=-\mathrm{F}\vec{x} \quad (\mathrm{F}>0)$

$\vec{\mathrm{C}}=\mathrm{C}\vec{x}.$

Les surfaces de liaison entre la vis (1) et l'écrou sont des surfaces hélicoïdales d'axe $(\mathrm{O}, \vec{x})$, de sec droite triangulaire de demi-angle au sommet β.

Au cours du mouvement de l'écrou (2) par rappc la vis (1), un point de contact M, lié à l'écrou, d dans R une hélice circulaire à droite (H), d'axe (O, de rayon r, d'inclinaison α *(figure 5).*

Soit K la projection orthogonale du point M sur le $(\mathrm{O}, \vec{y}, \vec{z})$. Notons $\vec{i}$ le vecteur unitaire de m direction et de même sens que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ et troisième vecteur unitaire de la base orthonoı directe $(\vec{x}, \vec{i}, \vec{j})$.

Posons : $\theta=(\vec{y}, \vec{i})$.

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire tangent en M à l'hélice et $\vec{v}$ le troisième vecteur unitaire de la base orthc mée directe $(\vec{i}, \vec{u}, \vec{v})$.

Alors $(\vec{j}, \vec{u})=(\vec{x}, \vec{v})=\alpha.$

Le profil de la section droite du filet triangulaiı trouve dans le plan $(\mathrm{M}, \vec{v}, \vec{i})$.

Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal au point M au de la vis, dirigé vers l'extérieur de la matière vecteur est perpendiculaire à $\vec{u}$, et :

$$(\vec{v}, \vec{n})=\beta.$$

Notons $\vec{\lambda}$ le troisième vecteur unitaire de la orthonormée directe $(\vec{u}, \vec{n}, \vec{\lambda})$.

Soient f le coefficient de frottement entre les sur en contact (supposé le même en tout point) et φ l' de frottement ($f=\mathrm{tg}\,\varphi$). Soit $\vec{f}_{\mathrm{M}}(1 \longrightarrow 2)$, la d surfacique au point M de l'action de contact de ((2). Posons :

$$\vec{f}_{\mathrm{M}}(1 \longrightarrow 2)=p\vec{n}+t\vec{u}+t'\vec{\lambda}.$$

Dans l'étude, on supposera que l'écrou est à la du glissement par rapport à la vis, où que l'é dynamiquement équilibré par rapport à l'axe (*(paragraphe 2.4)*, est animé d'un mouvement uni

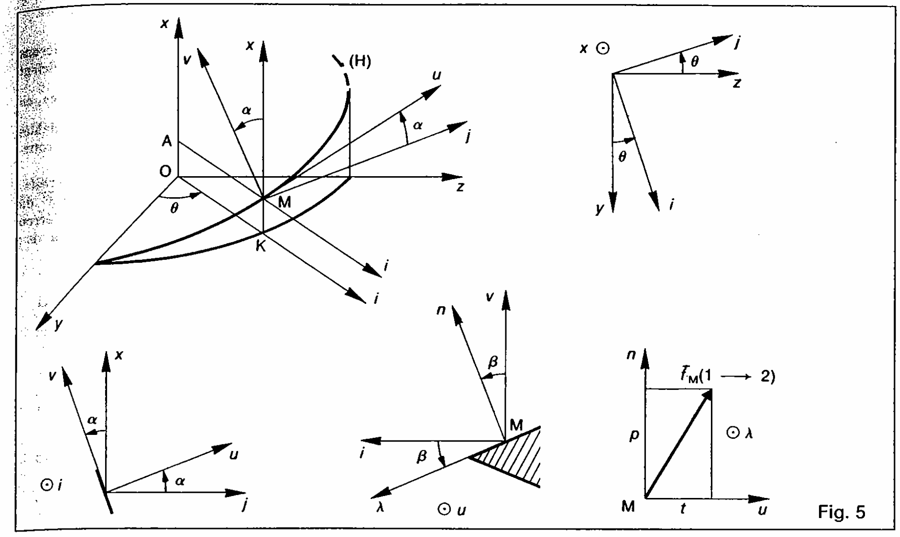


Fig. 5

par rapport à la vis. Dans cette hypothèse le vecteur vitesse de glissement au point M de (2) par rapport à (1) a pour direction $\vec{u}$, et les lois de Coulomb nous indiquent que $t'=0$.

Alors $\quad \vec{f}_M(1 \longrightarrow 2)=p\vec{n}+t\vec{u}.$

Le but de l'étude est de déterminer pour ce mécanisme :

— La condition d'irréversibilité, c'est-à-dire l'impossibilité, lorsque C est nul, d'obtenir un mouvement relatif de l'écrou par rapport à la vis, quelle que soit la valeur de F.

— La pression de contact entre les surfaces de liaison.

— La valeur du moment résultant $\vec{C}$ pour faire tourner l'écrou dans un sens ou dans l'autre.

— Son efficacité en fonction du sens de rotation.

QUESTION 1

On suppose que C = 0 et F ≠ 0. Quelle relation doit-il y avoir entre *f*, *α* et *β* pour que l'écrou reste en équilibre par rapport à la vis?

RÉPONSE

Appliquons à l'écrou (2)) le principe fondamental de la statique

$$\{\mathcal{T}(\bar{2} \longrightarrow 2)\}=\{\vec{0}\}$$

$(\bar{2})$, l'extérieur de (2), est constitué par la vis (1) et (E). Par conséquent le principe fondamental s'écrit :

$$\{\mathcal{T}(1 \longrightarrow 2)\}+\{\mathcal{T}(E \longrightarrow 2)\}=\{\vec{0}\}$$

soit
$$_O\begin{Bmatrix}\vec{R}(1 \longrightarrow 2)\\ \vec{M}_O(1 \longrightarrow 2)\end{Bmatrix}+{}_O\begin{Bmatrix}\vec{F}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}=\{\vec{0}\}$$

avec
$$\vec{R}(1 \longrightarrow 2)=\int_{M\in S}\vec{f}_M(1 \longrightarrow 2)\,ds \qquad (5)$$

$$\vec{M}_O(1 \longrightarrow 2)=\int_{M\in S}\overrightarrow{OM}\wedge\vec{f}_M(1 \longrightarrow 2)\,ds \qquad (6)$$

(S) étant la surface de liaison entre (1) et (2).

Le théorème de la résultante statique appliqué à (2) s'écrit :

$$\vec{R}(1 \longrightarrow 2)+\vec{F}=\vec{0} \qquad (7)$$

le théorème du moment statique, au point O, appliqué à (2) s'écrit :

$$\vec{M}_O(1 \longrightarrow 2)=\vec{0}.$$

Pour obtenir la relation cherchée projetons sur $\vec{x}$ cette dernière équation vectorielle

$$\vec{x}\cdot\vec{M}_O(1 \longrightarrow 2)=0$$

soit avec (6) :

$$\vec{x}\cdot\int_{M\in S}\overrightarrow{OM}\wedge\vec{f}_M(1 \longrightarrow 2)\,ds=0$$

ou en introduisant $\vec{x}$ sous le signe somme et en permutant les produits scalaire et vectoriel :

$$\int_{M\in S}(\vec{x}\wedge\overrightarrow{OM})\cdot\vec{f}_M(1 \longrightarrow 2)\,ds=0$$

or
$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KM}$$
$$\overrightarrow{OM}=r\vec{i}+p\theta\vec{x}$$

(p : pas réduit de l'hélice (H))

et
$$\vec{x}\wedge\overrightarrow{OM}=\vec{x}\wedge(r\vec{i}+p\theta\vec{x})$$
$$\vec{x}\wedge\overrightarrow{OM}=r\vec{j}$$

par suite la relation s'écrit :

$$\int_{M\in S}r\vec{j}\cdot\vec{f}_M(1 \longrightarrow 2)\,ds=0.$$

Cette intégrale est nulle si en tout point M :

$$\vec{j}\cdot\vec{f}_M(1 \longrightarrow 2)=0.$$

En considérant que l'écrou est à la limite du glissement par rapport à la vis :

$$\vec{f}_M(1 \longrightarrow 2)=p\vec{n}+t\vec{u}$$

et
$$|t|=f|p|.$$

Compte tenu du sens de $\vec{F}$, p et t sont positifs, car la rotation de l'écrou par rapport à la vis se fera dans le sens négatif autour de $(O, \vec{x})$; alors

$$t = fp.$$

Par suite la relation à vérifier est :

$$\vec{j} \cdot (p\vec{n} + fp\vec{u}) = 0$$

soit

$$\vec{j} \cdot (\sin\beta\vec{i} + \cos\beta\vec{v}) + f\vec{j} \cdot \vec{u} = 0$$

$$-\sin\alpha\cos\beta + f\cos\alpha = 0$$

ou $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f}{\cos\beta}.$$

Par suite, on admet que la condition d'irréversibilité du système vis-écrou est :

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \leqslant \frac{f}{\cos\beta}} \qquad (8)$$

lorsque la vis est à filet carré ($\beta = 0$) la condition devient :

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant f.$$

Condition plus restrictive sur l'angle α que dans le cas général. C'est pourquoi, inversement, on utilise les vis à filet carré pour les transmissions de mouvement.

QUESTION 2

Déterminer la pression de contact p, supposée uniforme, entre les surfaces de liaison, en fonction de F.

RÉPONSE

La pression de contact p sera obtenue en projetant l'équation vectorielle (7) sur $\vec{x}$.

$$\vec{x} \cdot \vec{R}(1 \longrightarrow 2) + \vec{x} \cdot \vec{F} = 0$$

soit $$\vec{x} \cdot \int_{M \in S} \vec{f}_M(1 \longrightarrow 2)\,ds = F$$

En considérant toujours que l'écrou est à la limite du glissement par rapport à la vis :

$$\vec{f}_M(1 \longrightarrow 2) = p(\vec{n} + f\vec{u})$$

et la relation précédente s'écrit :

$$\vec{x} \cdot \int_{M \in S} p(\vec{n} + f\vec{u})\,ds = F$$

en remarquant que :

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{x} \cdot (\sin\beta\vec{i} + \cos\beta\vec{v})$$

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \cos\beta \cdot \cos\alpha$$

$$\vec{x} \cdot \vec{u} = \sin\alpha.$$

et que p, α, β sont indépendants du point M, on obtient :

$$p(\cos\beta\cos\alpha + f\sin\alpha)\int_{M \in S} ds = F$$

posons : $$S = \int_{M \in S} ds$$

(aire de la surface de liaison).

Par conséquent, la relation donnant la pression de contact est :

$$\boxed{p = \frac{F}{S(\cos\beta \cdot \cos\alpha + f\sin\alpha)}.}$$

QUESTION 3

Pour simplifier la suite de l'étude, nous considér maintenant que la vis est à filet carré avec un coeffici de frottement fictif $f' = \dfrac{f}{\cos\beta}$ entre les surfaces contact, pour que les résultats trouvés soient valab pour un filet triangulaire avec un coefficient de fro ment f (on posera également $f' = \operatorname{tg}\varphi'$).

Lorsque la relation d'irréversibilité (8) est vérifi déterminer la composante du moment résultant $\vec{C}$ torseur d'action mécanique de (E) qui entraîne l'éc (2) dans un mouvement uniforme par rapport à la v

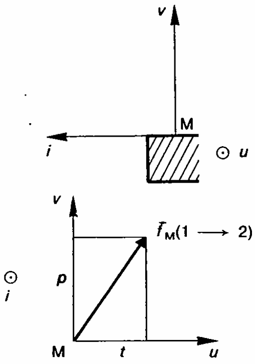
***a*) dans le sens positif autour de $(O, \vec{x})$;**

***b*) dans le sens négatif autour de $(O, \vec{x})$.**

RÉPONSE

a) Dans le cas d'un filet carré *(figure 6)*

$$\vec{f}_M(1 \longrightarrow 2) = p\vec{v} + t\vec{u}.$$



Fig

Appliquons à l'écrou (2) le théorème du mom statique au point O en projection sur $\vec{x}$:

$$\vec{x} \cdot \vec{M}_O(1 \longrightarrow 2) + \vec{x} \cdot \vec{C} = 0.$$

Notons C_1 ($C_1 > 0$) la composante sur $\vec{x}$ du mom résultant $\vec{C}$, alors

$$C_1 = -\vec{x} \cdot \vec{M}_O(1 \longrightarrow 2)$$

avec (6) :

$$C_1 = -\vec{x} \cdot \int_{M \in S} \overline{OM} \wedge \vec{f}_M(1 \longrightarrow 2)\,ds$$

ou en introduisant $\vec{x}$ sous le signe somme et permutant les produits scalaire et vectoriel :

$$C_1 = -\int_{M \in S} (\vec{x} \wedge \overline{OM}) \cdot \vec{f}_M(1 \longrightarrow 2)\,ds$$

nous avons démontré que : $\vec{x} \wedge \overline{OM} = r\vec{j}$, alors :

$$C_1 = -\int_{M \in S} r\vec{j} \cdot \vec{f}_M(1 \longrightarrow 2)\,ds.$$

De plus, $\vec{f}_M(1 \longrightarrow 2) = p\vec{v} + t\vec{u}$, avec

$$\begin{cases} p > 0 & (\text{car } F > 0) \\ t < 0 & (\text{car } C_1 > 0) \end{cases}$$

par conséquent, l'égalité $|t| = f'|p|$ s'écrit :

$$-t = f'p$$

d'où $$\vec{f}_M(1 \longrightarrow 2) = p(\vec{v} - f'\vec{u})$$

et $$C_1 = -\int_{M \in S} rp\vec{j}(\vec{v} - f'\vec{u})\,ds$$

en remarquant que :

$$\begin{cases} \vec{j}\cdot\vec{v} = -\sin\alpha \\ \vec{j}\cdot\vec{u} = \cos\alpha \end{cases}$$

et que f' et α sont indépendants du point M, l'expression de C_1 s'écrit :

$$C_1 = (\sin\alpha + f'\cos\alpha)\int_{M\in S} rp\ \mathrm{d}s.$$

Considérons que tous les points M sont à une même distance r_{moy} de l'axe $(O, \vec{x})$, alors :

$$\int_{M\in S} rp\ \mathrm{d}s = r_{moy}\int_{M\in S} p\ \mathrm{d}s.$$

La valeur de l'intégrale $\int_{M\in S} p\ \mathrm{d}s$ est donnée en appliquant à l'écrou (2) le théorème de la résultante statique en projection sur $\vec{x}$:

$$\vec{x}\cdot\vec{R}(1 \longrightarrow 2) + \vec{x}\cdot\vec{F} = 0$$

soit $$\vec{x}\cdot\int_{M\in S} \vec{f}_M(1 \longrightarrow 2)\mathrm{d}s = F$$

ou $$\vec{x}\cdot\int_{M\in S} p\,(\vec{v} - f'\vec{u})\mathrm{d}s = F$$

comme $$\vec{x}\cdot\vec{v} = \cos\alpha$$
$$\vec{x}\cdot\vec{u} = \sin\alpha$$

on obtient :

$$(\cos\alpha - f'\sin\alpha)\int_{M\in S} p\ \mathrm{d}s = F.$$

Par suite C_1 a pour expression :

$$C_1 = Fr_{moy}\frac{\sin\alpha + f'\cos\alpha}{\cos\alpha - f'\sin\alpha}$$

ou encore

$$C_1 = Fr_{moy}\frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\varphi'}{1 - \mathrm{tg}\,\varphi'\,\mathrm{tg}\,\alpha}$$

soit $$\boxed{C_1 = Fr_{moy}\,\mathrm{tg}(\alpha + \varphi').}$$

REMARQUE

Pour ce calcul il n'a pas été nécessaire de supposer la pression de contact p uniforme.

b) Dans ce cas, notons C_2 $(C_2 < 0)$ la composante sur $\vec{x}$ du moment résultant $\vec{C}$.

Par un raisonnement analogue au précédent on montre que :

$$\boxed{C_2 = -Fr_{moy}\,\mathrm{tg}(\varphi' - \alpha)}$$

si la relation (8) est vérifiée $\varphi' \geq \alpha$, par conséquent C_2 est bien négatif.

QUESTION 4

Lorsque (E) fait tourner l'écrou (2) d'un tour, le travail du moment résultant $\vec{C}$ est (voir cours de Mécanique 1re F) :

$$W(\vec{C}) = C\cdot 2\pi.$$

$C = C_1$ lorsque (E) fait tourner l'écrou dans le sens positif, et $C = C_2$ dans le cas contraire.
Le travail de la résultante générale $\vec{F}$ est :

$$W(\vec{F}) = -F\times 2\pi p,$$

avec :

$$p = r_{moy}\,\mathrm{tg}\,\alpha \quad \textbf{(pas réduit de la vis).}$$

On définit l'efficacité d'un tel mécanisme par le rapport :

$$\eta = \frac{|W(\vec{F})|}{|W(\vec{C})|}.$$

Déterminer dans les deux cas de la question précédente l'efficacité du système vis-écrou.

RÉPONSE

a) $C = C_1$

Dans ce cas et pour un tour :

$$W(\vec{C}_1) = 2\pi F r_{moy}\,\mathrm{tg}(\alpha + \varphi')$$
$$W(\vec{F}) = -F2\pi r_{moy}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Par conséquent :

$$\boxed{\eta = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}(\alpha + \varphi')}.}$$

Dans le cas d'un système vis-écrou irréversible $(\varphi' \geq \alpha)$ l'efficacité est inférieure à 0,5.

b) $C = C_2$

Dans ce cas et pour un tour :

$$W(\vec{C}_2) = -2\pi F r_{moy}\,\mathrm{tg}(\varphi' - \alpha)$$
$$W(\vec{F}) = -F2\pi r_{moy}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Par suite :

$$\boxed{\eta = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}(\varphi' - \alpha)}}$$

si $\varphi' < 2\alpha$, alors $\eta > 1$.

A SAVOIR

1. Le principe fondamental de la statique :
Il existe au moins un repère, appelé repère galiléen, tel que pour tout sous-ensemble matériel (e) de l'ensemble matériel (E) en équilibre par rapport à ce repère, le torseur associé aux actions mécaniques extérieures à (e) soit nul.
Soit
$\exists R_g$ tel que $\forall(e) \subset (E)$ en équilibre par rapport à R_g

$$\{\mathcal{T}(\bar{e} \longrightarrow e)\} = \{0\}$$

2. Le théorème des actions mutuelles :

$$\{\mathcal{T}(e_1 \longrightarrow e_2)\} = -\{\mathcal{T}(e_2 \longrightarrow e_1)\}$$

3. Les conditions d'équilibre d'un ensemble matériel par rapport à un repère galiléen sous l'action mécanique de deux forces ou de trois forces (cours de Première).

PROBLÈME RÉSOLU

Pour déplacer suivant un axe $(O, \vec{x})$ un meuble en bois (3) de masse M, de centre de gravité G, sur un sol en béton (0) on intercale entre le meuble et le sol deux barres cylindriques de révolution (1) et (2) identiques, en acier, homogènes, de rayon r, de masse m, d'axe parallèle à $(O, \vec{z})$ *(figure 7).*

Le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié au sol. Soit $\vec{g} = -g\vec{y}$ l'accélération de la pesanteur.

On suppose que les coefficients de frottement aux différents points de contact sont identiques, ainsi que les paramètres de résistance au roulement. Notons alors :

f : les coefficients de frottement
η : les paramètres de résistance au roulement.

Le but de l'étude est la détermination :
— de la force horizontale nécessaire au déplacement du meuble,
— de la position que doit avoir le meuble par rapport aux barres cylindriques, pour qu'il soit en contact et roule sans glisser sur celles-ci.

Définissons aux différents points de contact les torseurs d'action mécanique du sol et du meuble sur les barres :

$$\{\mathcal{T}(0 \longrightarrow 1)\} = {}_{A_1}\left\{\begin{matrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1 \end{matrix}\right\}$$

avec $\left\{\begin{matrix} \vec{R}_1 = X_1\vec{x} + Y_1\vec{y} \\ \vec{M}_1 = M_1\vec{z} \end{matrix}\right.$

$$\{\mathcal{T}(0 \longrightarrow 2)\} = {}_{A_2}\left\{\begin{matrix} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2 \end{matrix}\right\}$$

avec $\left\{\begin{matrix} \vec{R}_2 = X_2\vec{x} + Y_2\vec{y} \\ \vec{M}_2 = M_2\vec{z} \end{matrix}\right.$

$$\{\mathcal{T}(3 \longrightarrow 1)\} = {}_{A_3}\left\{\begin{matrix} \vec{R}_3 \\ \vec{M}_3 \end{matrix}\right\}$$

avec $\left\{\begin{matrix} \vec{R}_3 = X_3\vec{x} + Y_3\vec{y} \\ \vec{M}_3 = M_3\vec{z} \end{matrix}\right.$

$$\{\mathcal{T}(3 \longrightarrow 2)\} = {}_{A_4}\left\{\begin{matrix} \vec{R}_4 \\ \vec{M}_4 \end{matrix}\right\}$$

avec $\left\{\begin{matrix} \vec{R}_4 = X_4\vec{x} + Y_4\vec{y} \\ \vec{M}_4 = M_4\vec{z}. \end{matrix}\right.$

On déplace le meuble à une vitesse de translation constante $V\vec{x}$ $(V > 0)$ en exerçant sur ce meuble une action mécanique représentée par la force $(P, \vec{F})$ telle que :

$\vec{F} = F\vec{x}$ avec $F > 0$
$\vec{OP} \cdot \vec{y} = 2r + h$ (h : constante positive).

Au cours de ce mouvement on suppose que les barres roulent sans glisser sur le sol et sur le meuble.

Dans un tel mouvement uniforme, on montre en dynamique *(chapitre 2)* que le principe fondamental de la statique est applicable à tout sous-ensemble matériel de l'ensemble matériel constitué par (1), (2) et (3).

Soit l la distance entre les axes des barres (1 et (2). Cette distance reste constante au cours du mouvement.

Soit x l'abscisse sur l'axe $(O, \vec{x})$ du centre de gravité G par rapport au centre C_1 de la barre (1). On suppose que $0 < x < l$.

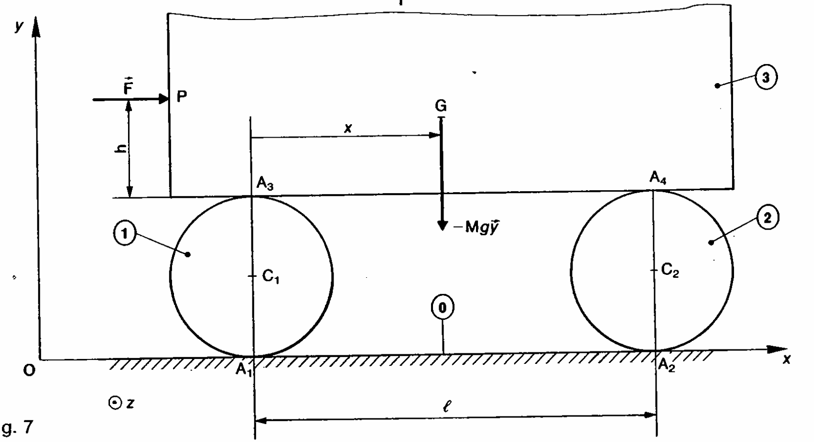


Fig. 7

REMARQUE

Les inconnues du problème sont les 12 composantes d'action de contact et F l'application du principe fondamental de la statique à (1) donnera trois équations scalaires, ainsi qu'à (2) et à (3).

Par conséquent on disposera au maximum de neuf équations scalaires indépendantes, qui ne suffiront pas à elles seules à déterminer les treize inconnues du problème.

Les équations supplémentaires seront obtenues en exprimant qu'en chaque point A_1, A_2, A_3, A_4, il y a une relation entre le moment de roulement et l'effort normal de l'action mécanique de contact (voir chapitre 1 paragraphe 3.3).

QUESTION 1

Écrire les trois équations scalaires déduites du principe fondamental de la statique appliqué à la barre (1).

RÉPONSE

Le principe fondamental de la statique appliqué à (1) s'écrit :

$$\{\mathscr{T}(\bar{1} \longrightarrow 1)\} = \{\vec{0}\}.$$

($\bar{1}$), l'extérieur de (1), est constitué par le sol (0), le meuble (3) et la pesanteur notée g.

Le principe fondamental s'écrit alors :

$$\{\mathscr{T}(0 \longrightarrow 1)\} + \{\mathscr{T}(3 \longrightarrow 1)\} + \{\mathscr{T}(g \longrightarrow 1)\} = \{\vec{0}\}$$

soit :

$${}_{A_1}\begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1 \end{Bmatrix} + {}_{A_3}\begin{Bmatrix} \vec{R}_3 \\ \vec{M}_3 \end{Bmatrix} + {}_{C_1}\begin{Bmatrix} -mg\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \{\vec{0}\}.$$

Pour ajouter ces torseurs exprimons-les au même point A_1 :

$${}_{A_1}\begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1 \end{Bmatrix} + {}_{A_1}\begin{Bmatrix} \vec{R}_3 \\ \vec{M}_3 + \vec{R}_3 \wedge \overrightarrow{A_3A_1} \end{Bmatrix} + {}_{A_1}\begin{Bmatrix} -mg\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \{\vec{0}\}$$

en ajoutant ces torseurs on met en évidence le torseur $\{\mathscr{T}(\bar{1} \longrightarrow 1)\}$:

$${}_{A_1}\begin{Bmatrix} \vec{R}_1 + \vec{R}_3 - mg\vec{y} \\ \vec{M}_1 + \vec{M}_3 + \vec{R}_3 \wedge \overrightarrow{A_3A_1} \end{Bmatrix} = \{\vec{0}\}.$$

Le théorème de la résultante statique appliqué à (1) s'exprime par :

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_3 - mg\vec{y} = \vec{0}. \qquad (9)$$

Le théorème du moment statique, au point A_1, appliqué à (1) s'exprime par :

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_3 + \vec{R}_3 \wedge \overrightarrow{A_3A_1} = \vec{0} \qquad (10)$$

l'équation (9) donne en projection sur $\vec{x}$ et $\vec{y}$ les deux équations scalaires suivantes :

$$\boxed{X_1 + X_3 = 0} \qquad (11)$$

$$\boxed{Y_1 + Y_3 - mg = 0} \qquad (12)$$

l'équation (10) donne en projection sur $\vec{z}$ l'équation scalaire :

$$\boxed{M_2 + M_3 - 2rX_3 = 0.} \qquad (13)$$

QUESTION 2

Écrire les trois équations scalaires déduites du principe fondamental de la statique appliqué à la barre (2).

RÉPONSE

Le principe fondamental s'écrit :

$$\{\mathscr{T}(\bar{2} \longrightarrow 2)\} = \{\vec{0}\}$$

soit

$$\{\mathscr{T}(0 \longrightarrow 2)\} + \{\mathscr{T}(3 \longrightarrow 2)\} + \{\mathscr{T}(g \longrightarrow 2)\} = \{\vec{0}\}$$

$${}_{A_2}\begin{Bmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2 \end{Bmatrix} + {}_{A_4}\begin{Bmatrix} \vec{R}_4 \\ \vec{M}_4 \end{Bmatrix} + {}_{C_2}\begin{Bmatrix} -mg\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \{\vec{0}\}.$$

En exprimant les torseurs au même point A_2, on en déduit les deux équations vectorielles suivantes :

$$\begin{cases} \vec{R}_2 + \vec{R}_4 - mg\vec{y} = \vec{0} \\ \vec{M}_2 + \vec{M}_4 + \vec{R}_4 \wedge \overrightarrow{A_4A_2} = \vec{0} \end{cases}$$

soit en projection sur $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\boxed{X_2 + X_4 = 0} \qquad (14)$$

$$\boxed{Y_2 + Y_4 - mg = 0} \qquad (15)$$

$$\boxed{M_2 + M_4 - 2rX_4 = 0.} \qquad (16)$$

QUESTIONS 3

Écrire les trois équations scalaires déduites du principe fondamental de la statique appliqué au meuble (3).

RÉPONSE

Le principe fondamental s'écrit :

$$\{\mathscr{T}(\bar{3} \longrightarrow 3)\} = \{\vec{0}\}$$

soit

$$\{\mathscr{T}(\vec{F} \longrightarrow 3)\} + \{\mathscr{T}(1 \longrightarrow 3)\} + \{\mathscr{T}(2 \longrightarrow 3)\} + \{\mathscr{T}(g \longrightarrow 3)\} = \{\vec{0}\}.$$

En tenant compte, du théorème des actions mutuelles, ces torseurs s'écrivent :

$${}_{P}\begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + {}_{A_3}\begin{Bmatrix} -\vec{R}_3 \\ -\vec{M}_3 \end{Bmatrix} + {}_{A_4}\begin{Bmatrix} -\vec{R}_4 \\ -\vec{M}_4 \end{Bmatrix} + {}_{G}\begin{Bmatrix} -Mg\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \{\vec{0}\}.$$

En exprimant les torseurs au même point A_4 on en déduit les deux équations vectorielles suivantes :

$$\begin{cases} \vec{F} - \vec{R}_3 - \vec{R}_4 - Mg\vec{y} = \vec{0} \; . \\ \vec{F} \wedge \overrightarrow{PA_4} - \vec{M}_3 - \vec{R}_3 \wedge \overrightarrow{A_3A_4} - \vec{M}_4 - Mg\vec{y} \wedge \overrightarrow{GA_4} = \vec{0} \end{cases}$$

soit en projection sur $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\boxed{F - X_3 - X_4 = 0} \qquad (17)$$

$$\boxed{-Y_3 - Y_4 - Mg = 0} \qquad (18)$$

$$\boxed{-Fh - M_3 + Y_3 l - M_4 + Mg(l - x) = 0.} \qquad (19)$$

REMARQUE

Les équations numérotées de (11) à (19) expriment 9 relations entre les 13 inconnues $F, X_1, Y_1, M_1, X_2, \ldots, M_4$.
En répondant aux deux questions suivantes nous obtiendrons quatre équations supplémentaires pour déterminer toutes les inconnues du problème.

QUESTION 4

Déterminer les vecteurs rotation $\vec{\Omega}(1/0)$ et $\vec{\Omega}(1/3)$ en fonction de V et *r*.

RÉPONSE

Entre les vecteurs vitesse des points A_1 et A_3, supposés liés à la barre (1), existe la relation :

$$\vec{V}(A_3 \in 1/0) = \vec{V}(A_1 \in 1/0) + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \overline{A_1A_3}$$

la barre (1) roule sans glisser sur le sol (0), par suite :

$$\vec{V}(A_1 \in 1/0) = \vec{0},$$

la barre (1) roule également sans glisser sur le meuble (3), alors :

$$\vec{V}(A_3 \in 1/0) = \vec{V}(A_3 \in 3/0)$$

$\vec{V}(A_3 \in 3/0)$ est le vecteur vitesse de translation de (3) par rapport à (0), soit $V\vec{x}$.
De plus, en remarquant que $\overline{A_1A_3} = 2r\vec{y}$, et que dans ce mouvement plan $\vec{\Omega}(1/0)$ est de la forme $\omega_{10}\vec{z}$ ($\omega_{10} < 0$ lorsque $V > 0$), la relation liant les vecteurs vitesse des points A_1 et A_3 s'écrit :

$$V\vec{x} = \omega_{10}\vec{z} \wedge 2r\vec{y}$$

soit

$$V\vec{x} = -2r\omega_{10}\vec{x}$$

d'où

$$\omega_{10} = -\frac{V}{2r}$$

et

$$\boxed{\vec{\Omega}(1/0) = -\frac{V}{2r}\,\vec{z}.}$$

Appliquons entre (1), (3) et (0) la relation de composition des vecteurs rotation :

$$\vec{\Omega}(1/3) = \vec{\Omega}(1/0) - \vec{\Omega}(3/0)$$

comme (3) a un mouvement de translation par rapport à (0) : $\vec{\Omega}(3/0) = \vec{0}$, alors

$$\boxed{\vec{\Omega}(1/3) = -\frac{V}{2r}\,\vec{z}.}$$

QUESTION 5

Sachant qu'aux quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 il y a roulement sans glissement entre les solides en contact, transposer les résultats du cours formulés sur le contact ponctuel au *chapitre 1, paragraphe 3.3*, pour déterminer les relations que vérifient :

***a*) X_1, Y_1 et M_1;**

***b*) X_2, Y_2 et M_2;**

***c*) X_3, Y_3 et M_3;**

***d*) X_4, Y_4 et M_4.**

RÉPONSE

a) La barre (1) roule sans glisser sur le sol (0), alors :

$$|X_1| \leqslant f|Y_1|.$$

En remarquant que $Y_1 > 0$, cette inéquation s'écrit :

$$\boxed{|X_1| \leqslant fY_1.}$$

Le moment de roulement $M_1\vec{z}$ est opposé au vecteur rotation de roulement $\vec{\Omega}(1/0) = -\dfrac{V}{2r}\,\vec{z}$.

Comme $-\dfrac{V}{2r} < 0$, $M_1 > 0$.

De plus, ce moment de roulement se calcule à partir de l'effort normal $Y_1\vec{y}$ par la relation :

$$\|M_1\vec{z}\| = \eta\,\|Y_1\vec{y}\|$$

avec $Y_1 > 0$ et $M_1 > 0$ on obtient

$$\boxed{M_1 = \eta Y_1.} \qquad (20)$$

b) La barre (2) roule sans glisser sur le sol (0). En remarquant que $Y_2 > 0$ et $M_2 > 0$, on obtient :

$$\boxed{|X_2| \leqslant fY_2}$$

et

$$\boxed{M_2 = \eta Y_2.} \qquad (21)$$

c) Le meuble (3) roule sans glisser sur la barre (1). En remarquant que $Y_3 < 0$ et $M_3 > 0$ on obtient :

$$\boxed{|X_3| \leqslant -fY_3}$$

et

$$\boxed{M_3 = -\eta Y_3.} \qquad (22$$

d) Le meuble (3) roule sans glisser sur la barre (2). En remarquant que $Y_4 < 0$ et $M_4 > 0$, on obtient :

$$\boxed{|X_4| \leqslant -fY_4}$$

et

$$\boxed{M_4 = -\eta Y_4.} \qquad (23$$

QUESTION 6

Déterminer la force $(\mathrm{P}, \vec{\mathrm{F}})$ qui engendre le mouvement du meuble. Faire l'application numérique pour :

$$\begin{cases} \mathrm{M}=200\ \mathrm{kg}, \\ m=12\ \mathrm{kg}, \\ r=3\ \mathrm{cm}, \\ \eta=0{,}4\ \mathrm{cm}, \\ g=9{,}81\ \mathrm{m/s^2}. \end{cases}$$

RÉPONSE

L'équation (17) peut s'écrire :

$$\mathrm{F}=\mathrm{X}_3+\mathrm{X}_4$$

d'après (13) :

$$\mathrm{X}_3=\frac{1}{2r}(\mathrm{M}_1+\mathrm{M}_3)$$

et d'après (16) :

$$\mathrm{X}_4=\frac{1}{2r}(\mathrm{M}_2+\mathrm{M}_4)$$

donc

$$\mathrm{F}=\frac{1}{2r}(\mathrm{M}_1+\mathrm{M}_2+\mathrm{M}_3+\mathrm{M}_4)$$

compte tenu des relations (20), (21), (22), (23), obtenues à la question 5 :

$$\mathrm{F}=\frac{\eta}{2r}[\mathrm{Y}_1+\mathrm{Y}_2-(\mathrm{Y}_3+\mathrm{Y}_4)].$$

Ajoutons membre à membre les relations (12) et (15), on obtient alors :

$$\mathrm{Y}_1+\mathrm{Y}_2=2\,mg-(\mathrm{Y}_3+\mathrm{Y}_4)$$

d'où

$$\mathrm{F}=\frac{\eta}{r}[mg-(\mathrm{Y}_3+\mathrm{Y}_4)]$$

l'équation (18) permet d'écrire que

$$-(\mathrm{Y}_3+\mathrm{Y}_4)=\mathrm{M}g.$$

Alors : $\boxed{\mathrm{F}=\frac{\eta}{r}(\mathrm{M}+m)g.}$

Application numérique :

$$\boxed{\mathrm{F}=27{,}7\ \mathrm{daN}.}$$

QUESTION 7

Déterminer les composantes des résultantes générales des torseurs d'action mécanique de contact : X_1, Y_1, X_2, ..., Y_4.

RÉPONSE

En remplaçant M_3 par $-\eta \mathrm{Y}_3$ et M_4 par $-\eta \mathrm{Y}_4$ dans l'équation (19), cette équation donne avec l'équation (18) les valeurs de Y_3 et Y_4.

$$\begin{cases} \mathrm{Y}_3+\mathrm{Y}_4=-\mathrm{M}g \\ (\eta+l)\mathrm{Y}_3+\eta \mathrm{Y}_4=\mathrm{F}h-\mathrm{M}g(l-x) \end{cases}$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{Y}_3=\mathrm{F}\frac{h}{l}+\mathrm{M}g\left(\frac{x}{l}+\frac{\eta}{l}-1\right)} \qquad (24)$$

et

$$\boxed{\mathrm{Y}_4=-\mathrm{F}\frac{h}{l}-\mathrm{M}g\left(\frac{x}{l}+\frac{\eta}{l}\right)} \qquad (25)$$

(12) donne alors Y_1 :

$$\boxed{\mathrm{Y}_1=-\mathrm{F}\frac{h}{l}-\left[\mathrm{M}\left(\frac{x}{l}+\frac{\eta}{l}-1\right)-m\right]g}$$

et (15) donne Y_2 :

$$\boxed{\mathrm{Y}_2=\mathrm{F}\frac{h}{l}+\left[\mathrm{M}\left(\frac{x}{l}+\frac{\eta}{l}\right)+m\right]g}$$

X_3 s'exprime à partir de l'équation (13) :

$$\mathrm{X}_3=\frac{1}{2r}(\mathrm{M}_1+\mathrm{M}_3)$$

soit

$$\mathrm{X}_3=\frac{\eta}{2r}(\mathrm{Y}_1-\mathrm{Y}_3)$$

comme $\mathrm{X}_1=-\mathrm{X}_3$, on obtient :

$$\boxed{\mathrm{X}_1=-\mathrm{X}_3=\frac{\eta}{r}\left[\mathrm{F}\frac{h}{l}+\mathrm{M}g\left(\frac{x}{l}+\frac{\eta}{l}-1\right)-\frac{mg}{2}\right]} \qquad (26)$$

X_4 s'exprime à partir de l'équation (16) :

$$\mathrm{X}_4=\frac{1}{2r}(\mathrm{M}_2+\mathrm{M}_4)$$

soit

$$\mathrm{X}_4=\frac{\eta}{2r}(\mathrm{Y}_2-\mathrm{Y}_4).$$

Comme $\mathrm{X}_2=-\mathrm{X}_4$, on obtient :

$$\boxed{\mathrm{X}_2=-\mathrm{X}_4=-\frac{\eta}{r}\left[\mathrm{F}\frac{h}{l}+\mathrm{M}g\left(\frac{x}{l}+\frac{\eta}{l}\right)+\frac{mg}{2}\right].} \qquad (27)$$

REMARQUE

On constate que pour $0<x<l$:

$$\mathrm{X}_2<0,\ \mathrm{X}_4>0,\ \mathrm{Y}_2>0 \text{ et } \mathrm{Y}_4<0.$$

Si $\mathrm{Y}_2>0$ et $\mathrm{Y}_4<0$ la barre (2) est toujours en contact avec le sol et le meuble pour $0<x<l$.

QUESTION 8

Quelle est la valeur maximale que peut prendre x pour que le meuble soit toujours en contact avec la barre (1), sachant que $h=1$ m et $l=1{,}5$ m?

RÉPONSE

Le meuble est en contact avec la barre (1) si : $Y_3 < 0$ soit :

$$F\frac{h}{l} + Mg\left(\frac{x}{l} + \frac{\eta}{l} - 1\right) < 0$$

d'où :

$$\boxed{x < l - \eta - \frac{F}{Mg}h.} \qquad (28)$$

Application numérique :

$$\boxed{x < 135{,}5 \text{ cm.}}$$

QUESTION 9

Lorsque le meuble est en contact avec les deux barres et que le coefficient de frottement est $f = 0{,}5$, déterminer entre quelles valeurs peut varier x pour que l'hypothèse de roulement sans glissement des barres sur le sol et sur le meuble soit vérifiée.

RÉPONSE

Si la condition (28) est satisfaite, alors :

$$\begin{cases} X_1 < 0, & Y_1 > 0 \\ X_3 > 0, & Y_3 < 0. \end{cases}$$

Si un glissement doit se produire au niveau de la barre (1), il se produira au point A_3 et jamais au point A_1 car :

$$|X_1| = |X_3|$$

et

$$|Y_1| > |Y_3|$$

ce qui veut dire que la résultante générale $\vec{R}_1$ ne pourra jamais venir sur le bord de son cône de frottement.

De la même façon, si un glissement doit se produire au niveau de la barre (2), il se produira au point A_4 et jamais au point A_2.

Reste donc à comparer les conditions de non glissement aux points A_3 et A_4.

Au point A_3 cette condition est :

$$|X_3| \leqslant f|Y_3|.$$

REMARQUE

> *Comme Y_3 peut devenir nul, sans que X_3 le devienne (voir relations (24), (26), (28)), il faudrait un coefficient de frottement infini pour empêcher le glissement au point A_3 lorsque x augmente.*

Sachant que $X_3 > 0$ et $Y_3 < 0$ la relation précédente s'écrit :

$$X_3 \leqslant -fY_3$$

avec (24) et (26) on obtient :

$$-\frac{\eta}{r}\left[F\frac{h}{l} + Mg\left(\frac{x}{l} + \frac{\eta}{l} - 1\right) - \frac{mg}{2}\right] \leqslant -f\left[F\frac{h}{l} + Mg\left(\frac{x}{l} + \frac{\eta}{l} - 1\right)\right]$$

soit

$$x\frac{Mg}{l}\left(f - \frac{\eta}{r}\right) \leqslant -\left[F\frac{h}{l} + Mg\left(\frac{\eta}{l} - 1\right)\right]\left(f - \frac{\eta}{r}\right) - mg\frac{\eta}{2r}.$$

Avec les valeurs numériques proposées :

$$f - \frac{\eta}{r} > 0,$$

par conséquent, la condition sur x s'écrit :

$$\boxed{x \leqslant l - \eta - \frac{Fh}{Mg} - \frac{m}{2M} \cdot \frac{l}{\left(\frac{rf}{\eta} - 1\right)}.}$$

Application numérique : $\boxed{x \leqslant 133{,}9 \text{ cm.}}$

Au point A_4 la condition de non glissement est :

$$|X_4| \leqslant f|Y_4|$$

sachant que $X_4 > 0$ et $Y_4 < 0$, cette inéquation s'écrit :

$$X_4 \leqslant -fY_4$$

avec (25) et (27) on obtient :

$$\frac{\eta}{r}\left[F\frac{h}{l} + Mg\left(\frac{x}{l} + \frac{\eta}{l}\right) + \frac{mg}{2}\right] \leqslant f\left[F\frac{h}{l} + Mg\left(\frac{x}{l} + \frac{\eta}{l}\right)\right]$$

soit

$$x\frac{Mg}{l}\left[\frac{\eta}{r} - f\right] \leqslant -\left(F\frac{h}{l} + Mg\frac{\eta}{l}\right)\left(\frac{\eta}{r} - f\right) - mg\frac{\eta}{2r}$$

avec les valeurs numériques proposées :

$$\left(\frac{\eta}{r} - f\right) < 0,$$

par conséquent, la condition sur x s'écrit :

$$\boxed{x \geqslant -\eta - \frac{F}{Mg}h + \frac{m}{2M} \cdot \frac{l}{\left(\frac{rf}{\eta} - 1\right)}.}$$

Application numérique :

On trouve que : $x \geqslant -12{,}9$ cm. Comme dans l'étude, on suppose que $x > 0$ cette condition est satisfaite.

Finalement, l'hypothèse de roulement sans glissement est vérifiée si $x \leqslant 133{,}9$ cm.

CONSEILS POUR LA RÉSOLUTION

Pour déterminer les composantes inconnues des éléments de réduction des torseurs d'action mécanique d'un mécanisme constitué de n pièces, on dispose au maximum de $6n$ équations indépendantes ($3n$ dans le plan) en appliquant le principe fondamental de la statique à n sous-ensembles de pièces du mécanisme.

En écrivant les lois de Coulomb ou les relations sur le contact ponctuel en supposant certaines pièces en contact à la limite du glissement, on obtient des relations supplémentaires pour déterminer les composantes inconnues. Il faut cependant toujours vérifier que cette hypothèse est compatible avec les équations déduites du principe fondamental.

3. C'est par analyse des torseurs d'action mécanique d'un mécanisme que l'on choisit, en fonction du problème posé :

a) les sous-ensembles de pièces auxquels on appliquera le principe fondamental;

b) le point où l'on écrira le théorème du moment statique;

c) l'axe sur lequel on projettera les équations vectorielles obtenues en appliquant le théorème de la résultante statique ou le théorème du moment statique.

4. Attention aux erreurs de signe dans l'application du théorème des actions mutuelles.

5. Pour qu'un solide de masse non nulle, roule sans glisser sur un autre solide, il faut entre ces deux solides un coefficient de frottement non nul.

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 — La figure 8 représente la butée de fixation de sécurité LOOK 77 pour ski.

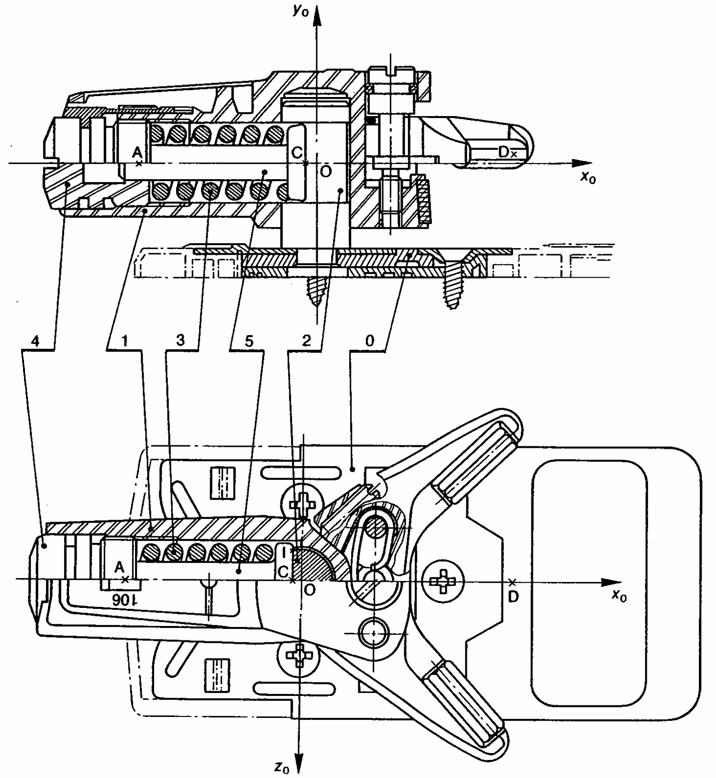


Fig. 8

Le pivot ② est riveté à la semelle ⓪ qui est vissée sur le ski. Soit $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié à la semelle tel que $(O, \vec{y}_0)$ coïncide avec l'axe du pivot et $(O, \vec{x}_0)$ soit dirigé suivant l'axe du ski.

Le corps ① a une liaison pivot sans frottement d'axe $(O, \vec{y}_0)$ avec le pivot ②. Soit $R(O, \vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{z}_1)$ un repère lié au corps ① tel que l'axe $(O, \vec{x}_1)$ soit dirigé suivant l'axe du corps.

On pose : $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_0)$.

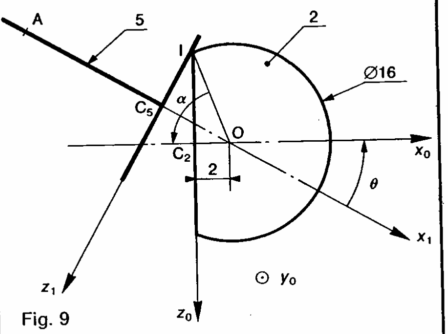


Fig. 9

La rotation du corps ① provoque le déplacement du piston ⑤ et la compression du ressort ③ grâce au méplat usiné sur le pivot. Le réglage de la dureté de la fixation s'effectue en comprimant plus ou moins le ressort ③ par l'intermédiaire du bouchon ④.

On suppose que le piston ⑤ a une liaison linéique annulaire sans frottement d'axe $(A, \vec{x}_1)$ avec le corps ① et une liaison linéique rectiligne d'axe $(I, \vec{y}_0)$ de normale $\vec{x}_1$ avec frottement, avec le pivot ② lorsque $\theta \neq 0$. Cette liaison est supposée avoir un coefficient de frottement suffisamment élevé pour considérer que le piston ⑤ ne vient pas en contact avec le pivot ①.

On pose : $\overline{OA} = -44\vec{x}_1$ (en millimètres).

La position du point I est définie par la *figure 9*. Le ressort ③ a les caractéristiques suivantes :

Longueur « libre » : $l_0 = 40$ mm, longueur « montée » : $l = 36$ mm, raideur $K = 5$ daN/mm.
A l'instant du déclenchement de la fixation, l'action de la chaussure sur la fourche du corps ① est représentable par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(\text{chaussure} \longrightarrow 1)\} = {}_{D}\begin{Bmatrix} X\vec{x}_1 + Y\vec{y}_0 + F\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

avec $\overline{OD} = 50\vec{x}_1 + 2\vec{y}_0$ (en millimètres).

Les pièces de la fixation sont supposées de poids négligeable devant F.

QUESTIONS

1° Déterminer la force exercée par le ressort ③ sur le piston ⑤ en fonction de l'angle θ.

2° Déterminer la relation entre l'angle θ et la composante F sur l'axe $\vec{z}_1$ de l'action mécanique exercée par la chaussure sur la fourche du corps ①.

RÉPONSES

1° $\vec{R}(3 \longrightarrow 5) = 100[1 + 4\cos(75{,}52 - \theta)]\vec{x}_1$
(θ exprimé en degrés et $\|\vec{R}(3 \longrightarrow 5)\|$ en newtons).

2° En appliquant le théorème du moment statique par rapport à l'axe $(O, \vec{y}_0)$ à l'ensemble constitué par ①, ④ et les fourches; puis le théorème du moment statique par rapport à l'axe $(I, \vec{y}_0)$ au piston ⑤. On trouve :

$$F = \frac{88[1 + 4\cos(75{,}52 - \theta)]\sin(75{,}52 - \theta)}{5{,}5 - \cos(75{,}52 - \theta)}.$$

2 — Sur un plan incliné ⓪ un parallélépipède rectangle ① retient une barre cylindrique de révolution ② *(figure 10)*. Étudions la rupture d'équilibre d'un tel système.

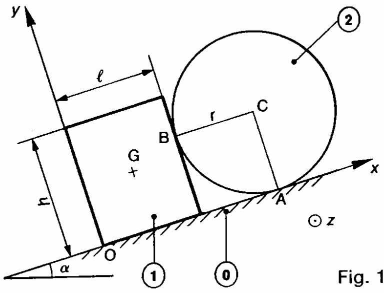


Fig. 10

Dans ce problème, supposé plan, soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ u repère galiléen lié au plan ⓪, l'axe $(O, \vec{x})$ étant dirig suivant la ligne de plus grande pente du plan. Noton α l'angle du plan ⓪ par rapport au plan horizontal Le parallélépipède rectangle ① est homogène, de mass m, de centre de gravité G. Sa section droite a pou largeur l et pour hauteur h.
La barre cylindrique ② est homogène, de masse M. S section droite est circulaire de centre C, de rayon
Soit f le coefficient de frottement entre les trois solide en contact.

On donne :

$$\begin{cases} m = 4 \text{ kg} \\ M = 12 \text{ kg} \\ g = 10 \text{ m/s}^2 \\ l = 10 \text{ cm} \\ h = 15 \text{ cm} \\ r = 10 \text{ cm} \\ f = 0{,}2. \end{cases}$$

QUESTIONS

1° Écrire les six équations scalaires déduites du principe fondamental de la statique appliqué à ① puis à ②.

2° En supposant (hypothèse dont on vérifiera la validité à la question 5) qu'à la rupture d'équilibre :

① glisse sur ⓪ sans basculer.

② roule sans glisser sur ⓪ et roule et glisse sur ①.

Écrire les deux équations scalaires que l'on obtient lorsque le système est à la limite du glissement.

3° Déterminer la valeur maximale de l'angle α pour que le système reste en équilibre par rapport au plan ⓪.

4° A la limite du glissement, déterminer les inconnues de liaison.

5° Vérifier la validité de l'hypothèse de rupture d'équilibre faite à la question 2.

RÉPONSES

1° En posant :

$$\{\mathcal{T}(\textcircled{0} \longrightarrow \textcircled{1})\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} X_0\vec{x} + Y_0\vec{y} \\ M_0\vec{z} \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{T}(\textcircled{1} \longrightarrow \textcircled{2})\} = {}_{B}\begin{Bmatrix} X_B\vec{x} + Y_B\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{T}(\textcircled{0} \longrightarrow \textcircled{2})\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} X_A\vec{x} + Y_A\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

les équations d'équilibre s'en déduisent facilement…

2° $\begin{cases} X_0 = fY_0 \\ Y_B = fX_B \end{cases}$.

3° α_{maxi} est tel que :

$$\operatorname{tg} \alpha_{maxi} = \frac{f}{1 + \frac{M}{m}(1 - f)}.$$

4° $X_0 = 8{,}22$ (en N)
$Y_0 = 41{,}1$
$M_0 = 1{,}35$ (en mN)

$X_B = 5{,}87$
$Y_B = 1{,}17$.

$X_A = 1{,}17$
$Y_A = 118{,}62$.

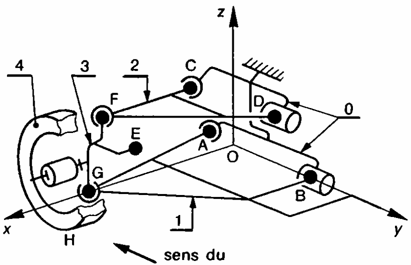
5° Condition de non-basculement de ① sur ⓪ :

$$M_0 > 0.$$

Condition de roulement sans glissement de ② sur ⓪ :

$$X_A < fY_A.$$

3 — La *figure 11* représente le schéma cinématique de la suspension du demi-train avant du véhicule Renault 4.



sens du deplacement

Fig. 11

La suspension est constituée d'un triangle inférieur ① et d'un triangle supérieur, ②, liés à la caisse par deux liaisons rotule de centre A et C et deux liaisons linéique annulaire d'axe $(B, \vec{y})$ et $(D, \vec{y})$ respectivement. Le porte moyeu ③ a une liaison rotule de centre F avec ② et une autre liaison rotule de centre G avec ①.

La biellette de direction, non représentée sur la figure, a une liaison rotule de centre E avec ③, et exerce sur ③ une action mécanique représentée par la force $(E, F\vec{x})$. La barre de torsion d'axe $(O, \vec{y})$ exerce sur le triangle inférieur une action mécanique représentée par le couple de moment $C\vec{y}$.

La roue ④ a une liaison pivot d'axe $(K, \vec{x})$ avec le porte moyeu ③ (le véhicule se déplace en ligne droite).

On suppose que toutes les liaisons définies jusqu'à présent sont sans frottement et que les pièces constituant la suspension sont de masse nulle ainsi que la roue.

L'action mécanique de la route sur la roue est représentée par la force $(H, \vec{R})$ (le moment de roulement est négligé).

On pose : $N = \vec{z} \cdot \vec{R}$. Soit f le coefficent de frottement entre la roue et la route.

On donne, en millimètres, dans le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$\overrightarrow{OA} = -100\vec{y}$; $\overrightarrow{OB} = 200\vec{y}$; $\overrightarrow{OC} = 50\vec{x} + 400\vec{z}$;

$\overrightarrow{CD} = 200\vec{y}$; $\overrightarrow{OG} = 350\vec{x}$; $\overrightarrow{CF} = 200\vec{x}$;

$\overrightarrow{FE} = 150\vec{y} - 150\vec{z}$; $\overrightarrow{GH} = 50\vec{x} - 150\vec{z}$.

QUESTION

Le véhicule étant dans une phase de freinage brutal dans le sens de $-\vec{y}$, déterminer F et C ainsi que les actions mécaniques dans les liaisons, sauf dans la liaison entre la roue et le porte moyeu. On se placera dans le cas où les roues avant sont à la limite du glissement par rapport à la route. On donne N = 440 daN et $f = 0{,}9$.

RÉPONSE

Les pièces étant de masse nulle on peut appliquer le principe fondamental de la statique à tout ensemble de pièces constituant la suspension (voir *chapitre 2* de dynamique).

On trouve alors (en décanewtons et en mètre-décanewtons)

$$\left\{\mathcal{T}(\text{caisse} \longrightarrow 1 \text{ en } A)\right\} = {}_{A}\left\{\begin{matrix} -680\vec{x} - 545\vec{y} - 293\vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\mathcal{T}(\text{caisse} \longrightarrow 1 \text{ en } B)\right\} = {}_{B}\left\{\begin{matrix} 613\vec{x} - 147\vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\mathcal{T}(\text{caisse} \longrightarrow 2 \text{ en } C)\right\} = {}_{C}\left\{\begin{matrix} 183\vec{x} + 149\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\mathcal{T}(\text{caisse} \longrightarrow 2 \text{ en } D)\right\} = {}_{D}\left\{\begin{matrix} -149\vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\mathcal{T}(2 \longrightarrow 3)\right\} = {}_{F}\left\{\begin{matrix} 34\vec{x} + 149\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\mathcal{T}(1 \longrightarrow 3)\right\} = {}_{G}\left\{\begin{matrix} -67\vec{x} - 545\vec{y} - 440\vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$$

et F = 33, C = 154.

4 — Pour l'opération de tournage d'un alésage d'une série de 1 000 têtes de vérin, on décide pour obtenir un montage et un démontage rapide de la pièce de brider celle-ci par un mécanisme utilisant l'effet centrifuge, créé par la rotation de la broche, sur deux masselottes identiques (S_1) et (S_2) *(figure 12).*

Le but de l'étude est la détermination de la masse des masselottes, pour que la pièce reste en contact avec ses appuis pour des conditions de coupe données.

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au bâti du tour, l'axe $(O, \vec{x})$ coïncidant avec l'axe de la broche.

Soit $R_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié au montage (M), on pose : $\theta = (\vec{y}, \vec{y}_1)$.

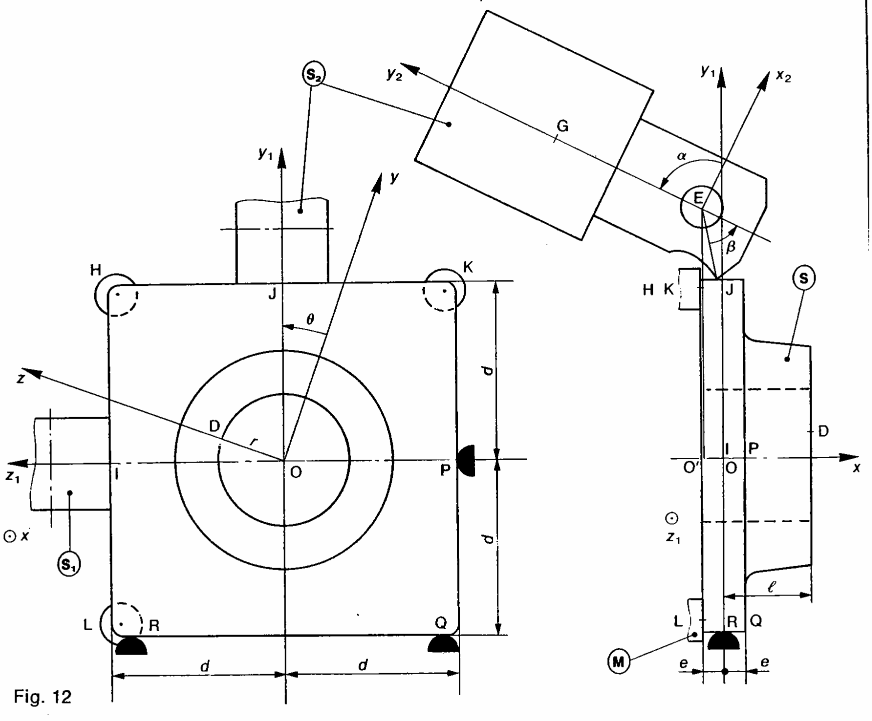


Fig. 12

Le positionnement de la pièce (S) dans le montage (M) est réalisé par 6 appuis ponctuels sans frottement aux points H, K, L, P, Q, R, dont les coordonnées cartésiennes dans le repère R_1 sont en première approximation :

$$H \left| \begin{matrix} -e \\ d \\ d \end{matrix} \right. \quad K \left| \begin{matrix} -e \\ d \\ -d \end{matrix} \right. \quad L \left| \begin{matrix} -e \\ -d \\ d \end{matrix} \right. \quad P \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{matrix} \right. \quad Q \left| \begin{matrix} 0 \\ -d \\ -d \end{matrix} \right. \quad R \left| \begin{matrix} 0 \\ -d \\ d \end{matrix} \right.$$

les normales de contact dirigées de l'appui vers la pièce étant respectivement : $\vec{x}$, $\vec{x}$, $\vec{x}$, $\vec{z}_1$, $\vec{y}_1$, $\vec{y}_1$.

Le mécanisme de serrage, constitué par deux masselottes identiques (S_1) et (S_2), exerce sur la pièce (S) deux forces $(I, \vec{F}')$ et $(J, \vec{F})$ telles que :

$$\vec{F}' \left| \begin{matrix} -F \sin \varphi \\ 0 \\ -F \cos \varphi \end{matrix} \right._{R_1} \qquad \vec{F} \left| \begin{matrix} -F \sin \varphi \\ -F \cos \varphi \\ 0 \end{matrix} \right._{R_1}$$

$$I \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ d \end{matrix} \right._{R_1} \qquad J \left| \begin{matrix} 0 \\ d \\ 0 \end{matrix} \right._{R_1}$$

φ est l'angle de frottement entre le mécanisme de serrage et la pièce.

On suppose que l'outil à aléser exerce sur la pièce la force $(D, \vec{F}_C)$ telle que :

$$\vec{F}_C = -F_A\vec{x} + F_T\vec{y} + F_R\vec{z}$$

avec $F_A, F_T, F_R \geqslant 0$ et $\overrightarrow{OD} = l\vec{x} + r\vec{z}$.

L'action de la pesanteur est négligée.

QUESTIONS

1° On considère le torseur d'action mécanique de l'outil sur la pièce défini au point O par :

$$\{\mathcal{C}(\text{outil} \longrightarrow S)\} = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_0 \end{Bmatrix}$$

avec

$$\vec{R} = R_1\vec{x} + R_2\vec{y}_1 + R_3\vec{z}_1$$

$$\vec{M}_0 = M_1\vec{x} + M_2\vec{y}_1 + M_3\vec{z}_1.$$

Déterminer R_1, R_2, R_3, M_1, M_2, M_3 en fonction de F_A, F_T et F_R.

2° On suppose que la pièce est dynamiquement équilibrée par rapport à l'axe de rotation $(O, \vec{x})$ et que la broche tourne à vitesse angulaire constante.
Dans ces conditions, on montre en dynamique *(chapitre 2)* que le torseur des actions mécaniques extérieures à la pièce (S) est nul. En admettant ce résultat, déterminer les actions des appuis sur la pièce en fonction de R_1, R_2, R_3, M_1, M_2, M_3 et F.

3° On pose $F_R = \lambda F_T$ et $F_A = \mu F_T$. En remplaçant sin θ et cos θ par 1, déterminer des majorants des composantes R_1, R_2, R_3, M_1, M_2, M_3.

4° Déterminer l'ordre de grandeur de la valeur minimale de F qui maintient la pièce en contact avec ses 6 appuis, en majorant les expressions obtenues, de la même façon qu'à la question précédente.

On donne :
$\lambda = 0{,}1$, $\mu = 0{,}2$, $\varphi = 10°$,
$r = 15$ mm, $d = 40$ mm, $l = 20$ mm.
$F_T = K_s \cdot A$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_s : \text{pression spécifique de coupe} \\ \qquad K_s = 1\,250 \text{ N/mm}^2 \text{ pour un alliage d'aluminium.} \\ A = ap \\ \qquad a : \text{avance, } a = 0{,}1 \text{ mm/tr} \\ \qquad p : \text{profondeur de passe, } p = 2 \text{ mm.} \end{array} \right.$$

5° La masselotte de serrage (S_2), de centre de gravité G, a une liaison pivot sans frottement d'axe $(E, \vec{z}_1)$ avec le montage (M) telle que : $\overrightarrow{O'E} = h\vec{y}_1$ (O′ sur l'axe $(O, \vec{x})$). Soit $R_2(E, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ un repère lié à (S_2) tel que $\overrightarrow{EG} = b\vec{y}_2$.

On pose $$(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \alpha$$

(S_2) est en contact avec (S) le long d'un segment de droite de l'axe $(J, \vec{z}_1)$.

On pose : $\|\overrightarrow{EJ}\| = c$ et $(\overrightarrow{EJ}, -\vec{y}_2) = \beta$.
Si on suppose la masse de (S_2) concentrée en son centre de gravité G, on montre en dynamique (chapitre 2) que l'effet centrifuge sur (S_2) due à la rotation de la broche est équivalent à la force $(G, \vec{W})$, telle que :

$$\vec{W} = m\omega^2\rho\vec{y}_1$$

$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{l} m : \text{masse de } (S_2) \\ \omega = \theta' \\ \rho : \text{distance de G à l'axe } (O, \vec{x}). \end{array} \right.$$

En appliquant à (S_2) le théorème du moment statique par rapport à l'axe $(E, \vec{z}_1)$, déterminer la masse *m* minimale que doit avoir la masselotte pour exercer sur (S) la force F calculée précédemment.
On donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} h = 56 \text{ mm} \\ b = 37 \text{ mm} \\ c = 15 \text{ mm} \\ \alpha = 60° \\ \beta = 45° \\ \theta' = 104{,}72 \text{ rad/s (1 000 tr/min).} \end{array} \right.$$

RÉPONSES

1° $R_1 = -F_A$
$R_2 = F_T \cos \theta + F_R \sin \theta$
$R_3 = -F_T \sin \theta + F_R \cos \theta$
$M_1 = -rF_T$
$M_2 = -(lF_R + rF_A) \cos \theta + lF_T \sin \theta$
$M_3 = (lF_R + rF_A) \sin \theta + lF_T \cos \theta.$

2° $$H = \frac{1}{2d}(M_3 - M_2) + F \sin \varphi$$

$$K = \frac{1}{2d} M_2 - \frac{R_1}{2} + \frac{F}{2} \sin \varphi$$

$$L = -\frac{1}{2d} M_3 - \frac{R_1}{2} + \frac{F}{2} \sin \varphi$$

$$P = F \cos \varphi - R_3$$

$$Q = \frac{1}{2}\left(F \cos \varphi - R_2 - \frac{M_1}{d}\right)$$

$$R = \frac{1}{2}\left(F \cos \varphi - R_2 + \frac{M_1}{d}\right).$$

3° Majorant de :

$$\begin{aligned}
R_1 &: \mu F_T \\
R_2 &: (1+\lambda)F_T \\
R_3 &: (1+\lambda)F_T \\
M_1 &: rF_T \\
M_2 &: \left[(1+\lambda)l+\mu r\right]F_T \\
M_3 &: \left[(1+\lambda)l+\mu r\right]F_T.
\end{aligned}$$

4° La pièce est en contact avec ses 6 appuis si les composantes H, K, L, P, Q, R sont strictement positives.

$$H>0 \implies F>\frac{1}{\sin\varphi}\left[(1+\lambda)\frac{l}{d}+\mu\frac{r}{d}\right]F_T$$

$$K>0 \text{ et } L>0$$
$$\implies F>\frac{1}{\sin\varphi}\left[(1+\lambda)\frac{l}{d}+\mu\left(\frac{r}{d}+1\right)\right]F_T$$

$$P>0 \implies F>(1+\lambda)\frac{F_T}{\cos\varphi}$$

$$Q>0 \text{ et } R>0 \implies F>\frac{1}{\cos\varphi}\left[(1+\lambda)+\frac{r}{d}\right]F_T$$

Avec les valeurs numériques proposées c'est la condition pour $K>0$ et $L>0$ qui doit être respectée, soit :

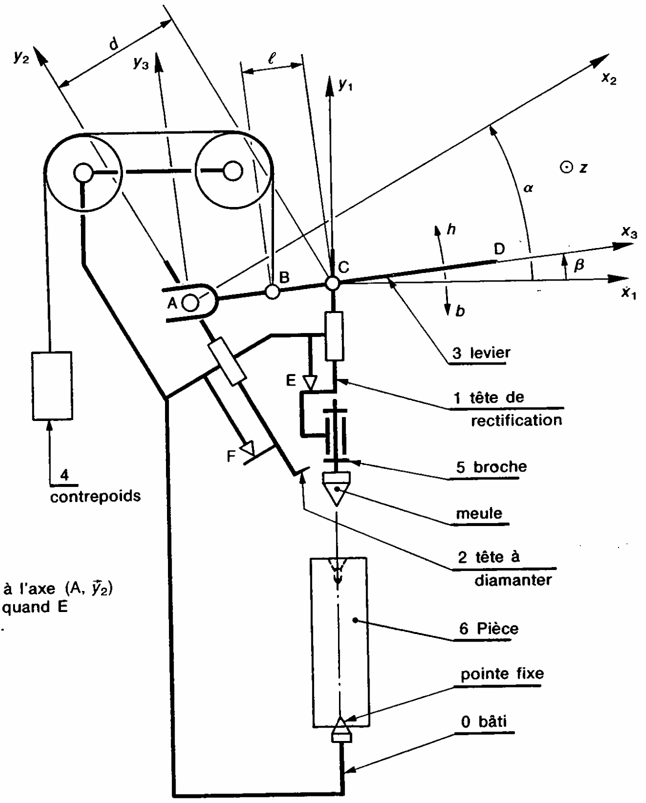
$$F>1\,188 \text{ N}.$$

5° Masse minimale : $m=290$ g.

5 — Le schéma cinématique de la *figure 13* représente un dispositif de commande manuelle de machine à rectifier les trous de centre.

Une action mécanique en D vers le bas (flèche *b*) sur le levier (3) provoque la descente de la tête de rectification (1), qui porte la broche (5) supportant la meule. Ceci permet de rectifier l'un des trous de centre d'une pièce (6) maintenue à la main sur la pointe fixe.

Une action mécanique en D vers le haut (flèche *h*) sur le même levier provoque la translation de la tête à diamanter (2). La meule peut ainsi être remise en état



$\ell = BC$
d = distance de C_0 à l'axe $(A, \vec{y}_2)$
C_0 : position de C quand E est en contact.

Fig. 13

entre deux opérations. Un contrepoids (4) est suspendu à un câble sans raideur, de masse nulle, reposant sur deux poulies. Il permet le rappel automatique de la tête à rectifier contre la butée (E) et de la tête à diamanter contre la butée (F). (E) et (F) sont à contact ponctuel.
Toutes les liaisons symbolisées sur la figure sont supposées sans frottement et sans jeu. On note :

$$\begin{cases} m_1 \text{ la masse de l'ensemble } \{(1), (5), (\text{meule})\} \\ m_2 \text{ la masse de la tête à diamanter } (2) \\ m_4 \text{ la masse du contrepoids } (4). \end{cases}$$

On néglige la masse des autres éléments du mécanisme par rapport à m_1, m_2 et m_4.

QUESTIONS

1° Quand l'ensemble est au repos, c'est-à-dire dans la configuration de la figure, déterminer les actions mécaniques des butées (E) et (F) sur, respectivement, la tête de rectification et la tête à diamanter en fonction des paramètres définis ci-dessus et sur la figure.

2° En déduire la valeur minimale de m_4 pour que l'équilibre proposé sur la figure soit possible.

Application numérique :

$$\alpha = 30°; \quad m_1 = 3 \text{ kg};$$
$$\beta = 6°; \quad m_2 = 1 \text{ kg};$$
$$d = 130 \text{ mm}; \quad m_4 = 8 \text{ kg};$$
$$l = 60 \text{ mm}; \quad g = 10 \text{ m/s}^2.$$

RÉPONSES

1° En appliquant successivement :

a) Au levier (3) le théorème du moment statique par rapport à l'axe $(C, \vec{z})$, puis le théorème de la résultante statique en projection sur $\vec{x}_3$ et $\vec{y}_3$.

b) A la tête à diamanter (2) le théorème de la résultante statique en projection sur $\vec{y}_2$.

c) A la tête à rectifier (ensemble : $\{(1), (5), (\text{meule})\}$) le théorème de la résultante statique en projection sur $\vec{y}_1$.

On trouve :

$$\|\vec{R}((E) \longrightarrow (1))\| = m_4 g \left[1 - \frac{l}{d} \cos^2 \beta \cos(\alpha - \beta)\right] - m_1 g$$

$$\|\vec{R}((F) \longrightarrow (2))\| = m_4 g \frac{l}{d} \cos^2 (\alpha - \beta) \cos \beta - m_2 g \cos \alpha.$$

2° $m_4 > 5{,}15$ kg.

EXERCICES SANS RÉPONSES

6 — Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié à un mur ⓪, l'axe $(O, \vec{z})$ étant dirigé suivant la verticale ascendante *(figure 14)*.

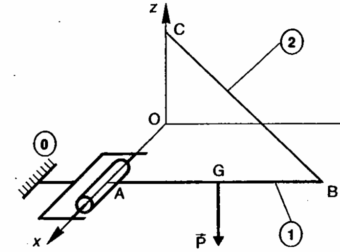


Fig. 14

Un portique ① assimilable à un segment de droite AB de longueur l, de centre de gravité G situé au milieu de AB, de poids $\vec{P} = -P\vec{z}$, a une liaison pivot sans frottement d'axe $(A, \vec{x})$ avec le mur ⓪, telle que : $\overrightarrow{OA} = d\vec{x}$ $(d > 0)$.

Ce portique est maintenu horizontal par un cable ②, sans raideur et de masse nulle, accroché à son extrémité B et au point C du mur ⓪, tel que : $\overrightarrow{OC} = h\vec{z}$ $(h > 0)$.

QUESTION

Déterminer en fonction de d, l, h et P le torseur d'action mécanique du mur ⓪ sur le portique ①, ainsi que la tension du cable ②.

7 — Le robot manipulateur représenté *figure 15* par son schéma se compose :

— d'un socle ① pivotant autour de l'axe vertical $(O, \vec{y})$ par rapport à une base ⓪, non représentée,

— d'un bras mécanique constitué de deux parties :

- le *« bras »* ②, relié au socle par une articulation *« d'épaule »*,
- l'*avant-bras* ③, relié au bras ② par une articulation de *« coude »*.

L'angle du bras ② par rapport à la verticale est commandé par un « vérin d'épaule » V_1, l'angle de l'avant-bras ③ par rapport à l'horizontale est commandé par un « vérin de coude » V_2.

Les ensembles ②-④ et ③-⑤ constituent des parallélogrammes. A l'extrémité de l'avant-bras ③, le moteur ⑧ commande l'orientation du positionneur ⑦ par rapport au poignet ⑥.

Le robot étant immobilisé dans la configuration de la figure, la position des points particuliers dans le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est donnée, en millimètres, par :

$$\overrightarrow{OA} = -200\vec{x}\,; \quad \overrightarrow{OB} = 200\vec{x}\,; \quad \overrightarrow{OC} = 250\vec{x} + 430\vec{y}\,;$$
$$\overrightarrow{OD} = 360\vec{x} + 630\vec{y}\,; \quad \overrightarrow{OE} = 610\vec{x} + 1\,075\vec{y}\,;$$
$$\overrightarrow{OF} = 610\vec{x} + 1275\vec{y}\,; \quad \overrightarrow{OH} = 1\,050\vec{x} + 825\vec{y}\,;$$
$$\overrightarrow{OI} = 2\,080\vec{x} + 420\vec{y}\,; \quad \overrightarrow{OJ} = 2\,080\vec{x} + 220\vec{y}.$$

Le positionneur ⑦ est immobilisé dans le plan de symétrie $(O, \vec{x}, \vec{y})$ du robot et supporte la charge verticale $(K, \vec{P})$ telle que : $\vec{P} = -4\,000\vec{y}$ (en daN) et $\overrightarrow{OK} = 2\,350\vec{x}$ (en millimètres).

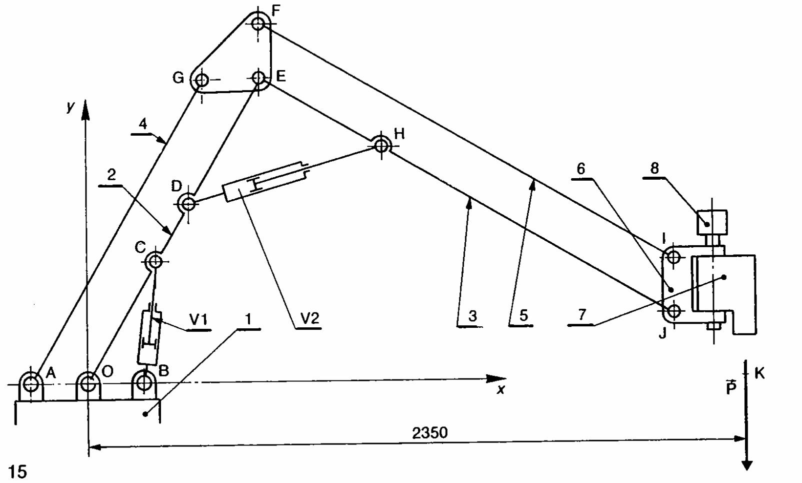

F
G
E
y
4
H
2
D
6
8
C
I
V1
1
V2
3
5
7
J
A
O
B
x
K
P
2350

Fig. 15

On suppose les liaisons sans frottement et les pièces constituant le robot de poids négligeable devant $\vec{P}$.

QUESTION

Déterminer graphiquement et analytiquement les actions mécaniques exercées par les vérins V_1 et V_2 sur le bras ②.

8 — La *figure 16* représente un montage de tournag permettant l'usinage d'une pièce cylindrique en aci moulé.

Le dispositif de bridage est constitué des élément suivants :

— Arbre de commande ② actionné dans le sens de l flèche par une clé dynamométrique tarée à 45 mN;

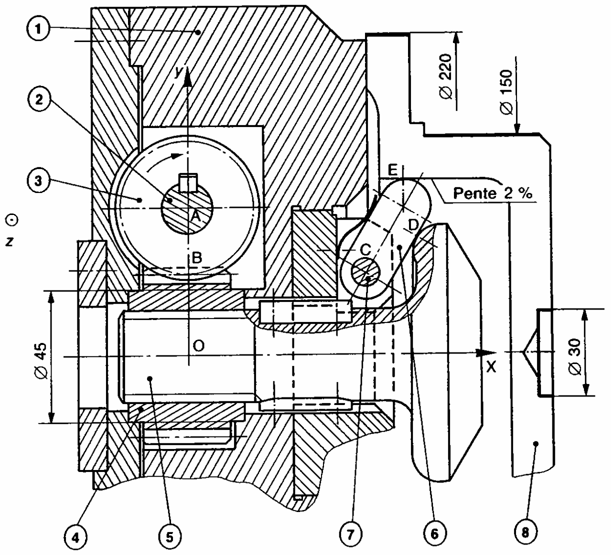

①
②
③
y
A
B
z
Ø 220
Ø 150
E
Pente 2 %
D
C
Ø 45
O
X
Ø 30
④
⑤
⑦
⑥
⑧

Fig. 16

— Pignon de commande ③ : 16 dents, angle d'inclinaison d'hélice (à droite) $\beta_3 = 45°$, module normal $m_n = 2$ mm, angle de pression $\alpha = 20°$;
— Roue-écrou ④ : 20 dents, angle d'inclinaison d'hélice (à droite) $\beta_4 = 45°$, module normal $m_n = 2$ mm, angle de pression $\alpha = 20°$;
Le rendement du système vis-écrou ③-④ est $\eta = 0{,}8$.
— Axe d'ablocage ⑤ : sa partie filetée est définie par la *figure 17* (hélice à droite);

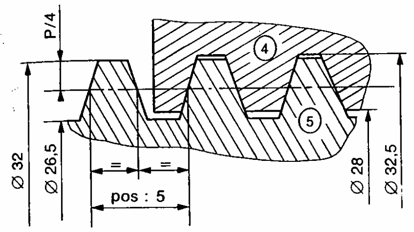


Fig. 17

— Trois clames ⑥ disposées à 120° maintenues en contact avec l'axe ⑤ par trois ressorts à lame. Dans le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié à ①, la position des points particuliers est donnée en millimètres par :

$$\overrightarrow{OA} = 50{,}91\vec{y}\,;$$
$$\overrightarrow{OB} = 28{,}284\vec{y}\,;$$
$$\overrightarrow{OC} = 62\vec{x} + 22\vec{y}\,;$$
$$\overrightarrow{CD} = 18\vec{x} + 12{,}5\vec{y}\,;$$
$$\overrightarrow{CE} = 14\vec{x} + 23\vec{y}.$$

L'action de la pesanteur est négligée.

QUESTIONS

1° La valeur absolue du moment par rapport à l'axe $(A, \vec{z})$, exercé sur l'arbre de commande ② dans le sens de la flèche, étant de 45 mN, calculer le moment par rapport à l'axe $(O, \vec{x})$ de l'action mécanique de ③ sur ④.

2° Déterminer l'effort exercé par la roue-écrou ④ sur l'axe d'ablocage ⑤ sachant que les coefficients de frottement entre ④ et ① et entre ④ et ⑤ ont pour valeur $f_{4/1} = f_{4/5} = 0{,}15$. On supposera que la liaison plane de normale $(O, \vec{x})$ entre ④ et ① a lieu sur une couronne de diamètre moyen 45 mm.

3° Déterminer les efforts de bridage des clames ⑥ sur la pièce ⑧ sachant que les coefficients de frottement entre ⑤ et ⑥ et entre ⑥ et ⑧ ont pour valeur $f_{5/6} = 0{,}15$ et $f_{6/8} = 0{,}35$. On admettra que les articulations ⑦ sont sans frottement et que les actions des trois ressorts à lames sont négligeables.
Vérifier que la composante de l'effort de bridage de ⑧ sur ① suivant l'axe $(O, \vec{x})$ a une valeur supérieure à 1 500 N. Valeur minimum exigée pour que la pièce soit en contact avec ① pour les conditions de coupe choisies. Les effets d'inertie dus à la rotation de la broche sont négligés.

9 — On considère le problème plan suivant :
Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au bâti (Σ) du système bielle manivelle d'un compresseur pneumatique *(figure 18)*.

La manivelle OA, de masse négligeable, a une liaison pivot sans frottement d'axe $(O, \vec{z})$ avec le bâti (Σ).
On pose : $\begin{cases} OA = r \\ \alpha = (\vec{x}, \overrightarrow{OA}). \end{cases}$

Le coulisseau (S), de masse négligeable, a une liaison glissière avec frottement (coefficient de frottement f) de direction $\vec{x}$ avec le bâti (Σ).
La bielle AB, de masse négligeable, a une liaison rotule de centre A avec la manivelle OA et une autre liaison rotule de centre B avec le coulisseau (S). Ces deux liaisons sont sans frottement et le point B est sur l'axe $(O, \vec{x})$.
On pose : $\begin{cases} AB = l \\ \beta = (\overrightarrow{AB}, \vec{x}). \end{cases}$

Le moteur électrique d'axe $(O, \vec{z})$ exerce sur la manivelle OA un couple donné de moment $C\vec{z}$, avec $C > 0$.
L'air exerce sur le coulisseau (S) la force $(B, F\vec{x})$. F est algébrique. On suppose le système en équilibre par rapport au bâti (Σ) dans une position telle que :

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

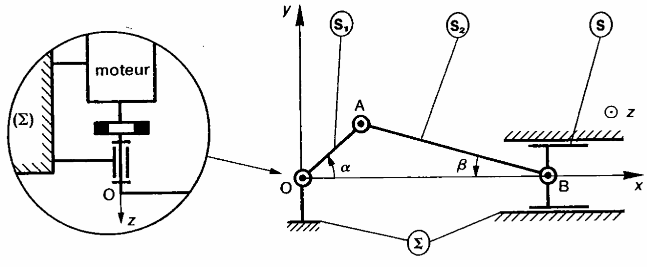


Fig. 18

QUESTIONS

1° Quelle relation y a-t-il entre α et β?

2° Combien y a-t-il d'inconnues de liaison dans ce mécanisme?

3° Montrer que le système reste en équilibre par rapport au bâti (Σ) si :

$$\frac{C}{r}\cdot\frac{\cos\beta - f\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \leqslant F \leqslant \frac{C}{r}\cdot\frac{\cos\beta + f\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

10 — Un porte tôle est représenté *figure 19.* Les molettes ont une liaison pivot d'axe $(B, \vec{z})$ et $(B', \vec{z})$ avec le flasque. Elles serrent la tôle sous l'action mécanique de deux biellettes articulées en C et C′ avec les molettes, et en D et D′ avec l'étrier auquel est accroché le câble.

On suppose que toutes les liaisons sont sans frottement, sauf bien sûr la liaison entre la tôle et les molettes, et que toutes les pièces sont de masse négligeable devant la masse de la tôle.
On donne (en millimètres)

$$\begin{cases} \vec{IA} = -30\vec{y} \\ \vec{IC} = -\vec{IB} = 15\vec{x} + 12\vec{y} \\ \vec{ID} = 102\vec{x} - 10\vec{y}. \end{cases}$$

QUESTION

Déterminer la valeur minimale du coefficient de frotte-ment entre la tôle et les molettes pour que ce mécanisme puisse fonctionner.

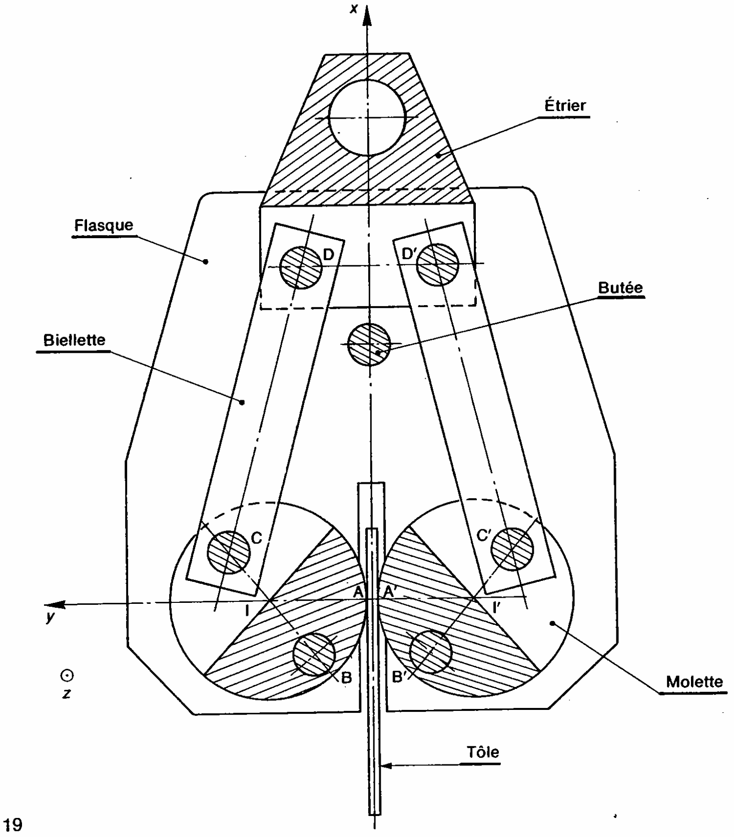


Fig. 19

3 hyperstatisme et mobilité des mécanismes

Pour maîtriser le comportement d'un mécanisme (afin, par exemple, d'obtenir une précision voulue de mise en position d'une pièce par rapport à une autre, ou d'éviter une usure prématurée, un coincement, ou un montage impossible) il faut connaître précisément la position relative de chaque liaison, ainsi que les torseurs d'action mécanique correspondants.

L'objectif de ce chapitre est donc :

— de localiser, quand elles existent, les inconnues de liaison (inconnues hyperstatiques) que l'on ne peut pas déterminer uniquement par application du principe fondamental de la statique (ou de la dynamique) à ce mécanisme,

— de proposer, éventuellement, des modifications pour rendre le mécanisme isostatique (sans inconnue hyperstatique),

— de savoir à quelles conditions géométriques de position relative des liaisons correspondent les inconnues hyperstatiques.

1. HYPOTHÈSES DE L'ÉTUDE

Les résultats que nous allons mettre en place seront valables pour :

— des pièces modélisées par des solides indéformables,

— des liaisons sans frottement,

— des liaisons à contact bilatéral, c'est-à-dire des liaisons dans lesquelles le contact est supposé maintenu si le sens des actions mécaniques est inversé. Cette hypothèse concerne essentiellement les liaisons ponctuelle, linéique rectiligne et appui-plan.

De plus, pour simplifier l'étude, nous supposerons que toutes les pièces sont de masse nulle, de façon que, les effets d'inertie étant nuls, on puisse écrire pour tout sous-ensemble (e) de pièces d'un mécanisme :

$$\{\mathcal{T}(\bar{e} \longrightarrow e)\} = \{\vec{0}\}.$$

2. GRAPHE DES LIAISONS D'UN MÉCANISME

Dans le graphe des liaisons d'un mécanisme les solides sont schématisés par des cercles et les liaisons par des arcs de courbe joignant ces cercles.

Application

Dans le montage d'usinage représenté *figure 1,* les liaisons entre les différents solides sont les suivantes :

(L_1) : Glissière de direction $\vec{x}$;
(L_2) : Appui-plan de normale $\vec{x}$;
(L_3) : Glissière hélicoïdale d'axe $(O, \vec{x})$;
(L_4) : Pivot glissant d'axe $(O, \vec{y})$ (vé long);
(L_5) : Linéique rectiligne d'axe $(I, \vec{y})$, de normale $\vec{x}$;
(L_6) : Appui-plan de normale $\vec{y}$.

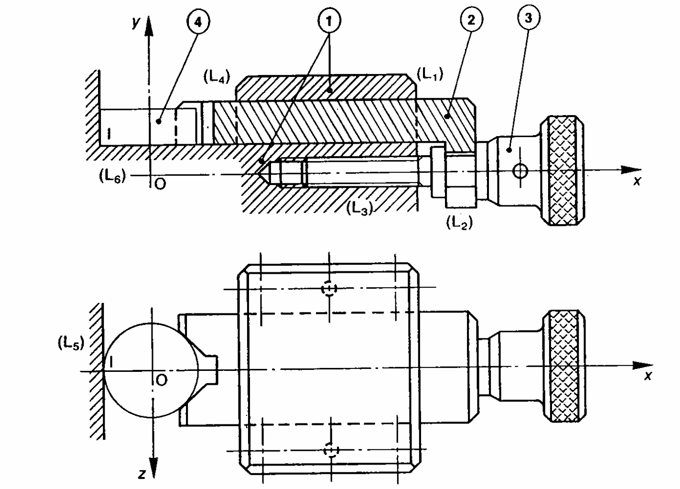


Fig. 1

Le graphe des liaisons de ce mécanisme faisant apparaître les quatre solides en présence réunis par six liaisons s'établit ainsi :

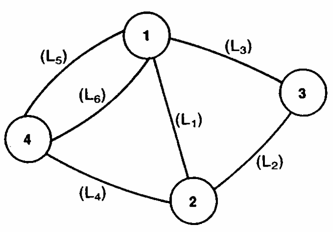


Fig. 2

3. TORSEURS STATIQUE ET CINÉMATIQUE D'UNE LIAISON

Soit une liaison (L_i) entre deux solides (S_1) et (S_2). Plaçons un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sur la liaison (L_i), en tenant compte pour faciliter l'étude de ses éléments de symétrie.

Définissons, au point O, le torseur d'action mécanique du solide (S_1) sur le solide (S_2) à travers la liaison (L_i) :

$$\left\{\mathcal{T}(S_1 \xrightarrow{L_i} S_2)\right\} = {}_{O}\left\{\begin{matrix} \vec{R}(S_1 \xrightarrow{L_i} S_2) \\ \vec{M}_O(S_1 \xrightarrow{L_i} S_2) \end{matrix}\right\}.$$

Dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ posons :

$$\vec{R}(S_1 \xrightarrow{L_i} S_2) = X_i\vec{x} + Y_i\vec{y} + Z_i\vec{z}$$

$$\vec{M}_O(S_1 \xrightarrow{L_i} S_2) = L_i\vec{x} + M_i\vec{y} + N_i\vec{z}$$

Et pour simplifier, adoptons l'écriture :

$$\left\{\mathcal{T}\left(S_1 \xrightarrow{L_i} S_2\right)\right\} = \{\mathcal{T}_i\}.$$

Alors :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_i\} = {}_{O}\left\{\begin{matrix} X_i & L_i \\ Y_i & M_i \\ Z_i & N_i \end{matrix}\right\}.}$$

Suivant la nature de la liaison (L_i) certai composantes du torseur $\{\mathcal{T}_i\}$ sont nulles ou li entre elles par des relations. Par exemple, si (est une liaison pivot glissant d'axe $(O, \vec{x})$: X_i et $L_i = 0$.

Définitions

— Le torseur $\{\mathcal{T}_i\}$ est appelé *torseur statique* la liaison (L_i).

— Les composantes X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i ı nulles sont appelées *inconnues statiques* de liaison (L_i).

Notons n_{S_i} le nombre d'inconnues statiques *indép dantes* de la liaison (L_i).

Définissons, au point O, le torseur cinématique mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) que la liai (L_i) autorise :

$$\{\mathcal{V}_i(S_2/S_1)\} = {}_{O}\left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}_i(S_2/S_1) \\ \vec{V}_i(O \in S_2/S_1) \end{matrix}\right\}.$$

Dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ posons :

$$\vec{\Omega}_i(S_2/S_1) = \alpha_i\vec{x} + \beta_i\vec{y} + \gamma_i\vec{z}$$
$$\vec{V}_i(O \in S_2/S_1) = u_i\vec{x} + v_i\vec{y} + w_i\vec{z}.$$

Pour simplifier, adoptons l'écriture :

$$\{\mathcal{V}_i(S_2/S_1)\} = \{\mathcal{V}_i\}.$$

Alors :

$$\boxed{\{\mathcal{V}_i\} = {}_O\begin{Bmatrix} \alpha_i & u_i \\ \beta_i & v_i \\ \gamma_i & w_i \end{Bmatrix}.}$$

Suivant la nature de la liaison (L_i) certaines composantes du torseur $\{\mathcal{V}_i\}$ sont nulles ou liées entre elles par des relations. Par exemple, si (L_i) est une liaison pivot glissant d'axe $(O, \vec{x})$: $\beta_i = 0$, $\gamma_i = 0$, $v_i = 0$, $w_i = 0$.

Définitions

— Le torseur $\{\mathcal{V}_i\}$ est appelé *torseur cinématique* de la liaison (L_i).

— Les composantes α_i, β_i, γ_i, u_i, v_i, w_i non nulles sont appelées *inconnues cinématiques* de la liaison (L_i).

Notons n_{C_i} le nombre d'inconnues cinématiques *indépendantes* de la liaison (L_i) :

Connaissant les caractéristiques des torseurs cinématiques et statiques des liaisons (déterminées au *chapitre 3* de cinématique et au *chapitre 1* de statique) on vérifie facilement qu'il existe entre les nombres n_{C_i} et n_{S_i} la relation :

$$\boxed{n_{C_i} = 6 - n_{S_i}.}$$

Par exemple, pour une liaison pivot glissant : $n_{S_i} = 4$ et $n_{C_i} = 2$.

REMARQUES

La liaison (L_i) étant supposée sans frottement, on montre en dynamique (voir chapitre 3) que la puissance des actions mutuelles développée dans la liaison est nulle. Or cette puissance est égale à :

$$\vec{M}_O(S_1 \xrightarrow{L_i} S_2)\cdot\vec{\Omega}_i(S_2/S_1)$$
$$+\vec{R}(S_1 \xrightarrow{L_i} S_2)\cdot\vec{V}_i(O \in S_2/S_1).$$

Par conséquent, les inconnues statiques et cinématiques de la liaison doivent vérifier la relation :

$$\boxed{L_i\alpha_i + M_i\beta_i + N_i\gamma_i + X_iu_i + Y_iv_i + Z_iw_i = 0.}$$

Considérons par exemple une liaison pivot glissant d'axe $(O, \vec{x})$. Son torseur statique est tel que $X_i = 0$ et $L_i = 0$ (Y_i, Z_i, M_i, $N_i \neq 0$).

Par suite, pour que cette puissance soit nulle, quel que soit le mouvement relatif entre les pièces, il faut que : $\beta_i = 0$, $\gamma_i = 0$, $v_i = 0$, $w_i = 0$, ce qui montre que $n_{C_i} = 6 - n_{S_i}$.

— Le nombre de relations de nullité indépendantes qu'impose une liaison (L_i) aux composantes α_i, β_i, γ_i, u_i, v_i, w_i est égal à $6 - n_{C_i}$, soit n_{S_i}.

— On montre en dynamique que la puissance des actions mutuelles développée dans une liaison se met sous la forme du produit du torseur statique $\{\mathcal{T}_i\}$ par le torseur cinématique $\{\mathcal{V}_i\}$, soit :

$$\{\mathcal{T}_i\}\cdot\{\mathcal{V}_i\}.$$

Lorsque cette puissance est nulle on dit que les deux torseurs sont réciproques.

4. LIAISON ÉQUIVALENTE

Supposons qu'il existe entre deux pièces (S_1) et (S_2) plusieurs liaisons réalisées avec ou sans pièces intermédiaires *(figure 3).*

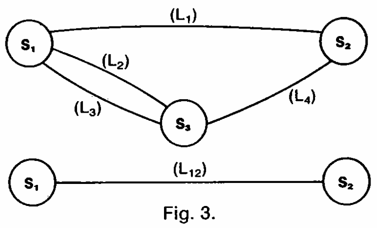


Fig. 3.

La liaison équivalente à l'ensemble des liaisons situées entre les pièces (S_1) et (S_2) est la liaison théorique de référence (L_{12}) qui a le même comportement que cette association de liaisons, c'est-à-dire qui transmet la même action mécanique et qui autorise le même mouvement.

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à (S_2).

Définissons au point O (choisi en fonction des éléments de symétrie des liaisons pour simplifier les calculs) le torseur d'action mécanique de (S_1) sur (S_2) de la liaison équivalente :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\} = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2) \\ \vec{M}_O(S_1 \longrightarrow S_2) \end{Bmatrix}.$$

Posons :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\} = \{\mathcal{T}\}$$

et dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2) = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}$$
$$\vec{M}_O(S_1 \longrightarrow S_2) = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z}.$$

Alors :

$$\boxed{\{\mathcal{T}\} = {}_O\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}.}$$

Définissons, au même point O, le torseur cinématique du mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) de la liaison équivalente :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/S_1) \\ \vec{V}(O \in S_2/S_1) \end{Bmatrix}.$$

Posons :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}=\{\mathcal{V}\}$$

et dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\vec{\Omega}(S_2/S_1)=\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}+\gamma\vec{z}$$

$$\vec{V}(O\in S_2/S_1)=u\vec{x}+v\vec{y}+w\vec{z}.$$

Alors :

$$\boxed{\{\mathcal{V}\}= {}_{O}\begin{Bmatrix}\alpha & u\\ \beta & v\\ \gamma & w\end{Bmatrix}.}$$

Définitions

- **$\{\mathcal{T}\}$ est le *torseur statique* de la liaison équivalente.**
- **$\{\mathcal{V}\}$ est le *torseur cinématique* de la liaison équivalente.**

REMARQUE

La liaison équivalente doit également avoir le même bilan énergétique que les liaisons dont elle globalise le comportement. Comme chaque liaison composante développe une puissance nulle, la liaison équivalente doit développer une puissance nulle.

Par suite, le torseur statique et le torseur cinématique de la liaison équivalente sont réciproques.

La connaissance de l'un de ces torseurs entraîne donc la connaissance de l'autre.

Suivant la nature des liaisons et la façon dont elles sont associées, nous allons déterminer dans les paragraphes qui suivent les caractéristiques de la liaison équivalente.

5. LIAISONS EN PARALLÈLE

5.1. DÉFINITION

n liaisons (L_1), (L_2), ..., (L_i), ..., (L_n) sont disposées en parallèle entre deux solides (S_1) et (S_2) si chaque liaison relie directement ces deux solides.

Le graphe des liaisons se trace ainsi :

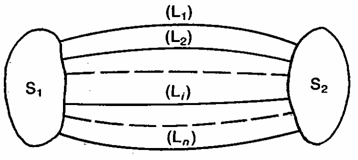


Fig. 4

5.2. LIAISON ÉQUIVALENTE

5.2.1. Torseur statique

Pour déterminer les caractéristiques du to statique de la liaison équivalente appliquons à le principe fondamental de la statique.

Supposons qu'en plus de l'action mécanique de sur (S_2) à travers les n liaisons en parallèle, s'e sur (S_2) une action mécanique représentée p torseur $\{\mathcal{T}_0\}$. Le principe fondamental de la sta appliqué à (S_2) s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n}\{\mathcal{T}_i\}+\{\mathcal{T}_0\}=\{\vec{0}\}.$$

En écrivant le principe fondamental avec le to statique de la liaison équivalente, on obtient :

$$\{\mathcal{T}\}+\{\mathcal{T}_0\}=\{\vec{0}\}.$$

En comparant les relations (1) et (2) on t l'expression du torseur statique de la l équivalente en fonction des torseurs statique n liaisons en parallèle :

$$\boxed{\{\mathcal{T}\}=\sum_{i=1}^{n}\{\mathcal{T}_i\}.}$$

Par conséquent : pour qu'une composante d seur statique de la liaison équivalente ne so nulle, il suffit qu'une seule composante corr dante d'une liaison (L_i) ne soit pas nulle composantes d'action mécanique transmi entre (S_1) et (S_2) sont celles qui sont transmi par les liaisons (L_i).

5.2.2. Torseur cinématique

La connaissance du torseur statique de la équivalente entraîne la connaissance du cinématique, comme nous l'avons signa *paragraphe 4.*

Pour l'obtenir directement, il suffit d'écrire torseur cinématique de la liaison équivalen être compatible avec tous les torseurs ciném des liaisons (L_i). Soit

$$\{\mathcal{V}\}=\{\mathcal{V}_i\},\quad \forall i$$

ou bien :

$$\boxed{\{\mathcal{V}\}=\{\mathcal{V}_1\}=\{\mathcal{V}_2\}=\dots=\{\mathcal{V}_n\}.}$$

Par exemple, supposons qu'il y ait entre le solides (S_1) et (S_2) les deux liaisons en p suivantes :

(L_1) : liaison pivot glissant d'axe $(O, \vec{x})$

(L_2) : liaison ponctuelle de normale $(O, \vec{x})$

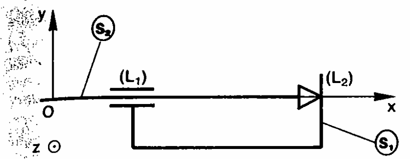


Fig. 4 *bis*

Les torseurs cinématiques de ces deux liaisons s'écrivent au point O, dans la base de R :

$$\{\mathcal{V}_1\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \alpha_1 & u_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad \{\mathcal{V}_2\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \alpha_2 & 0 \\ \beta_2 & v_2 \\ \gamma_2 & w_2 \end{Bmatrix}$$

les composantes α, β, γ, u, v, w du torseur cinématique de la liaison équivalente doivent vérifier les équations suivantes, déduites de la relation (4) :

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 = \alpha_2 \\ \beta &= 0 \ = \beta_2 \\ \gamma &= 0 \ = \gamma_2 \\ u &= u_1 = 0 \\ v &= 0 \ = v_2 \\ w &= 0 \ = w_2. \end{aligned}$$

Par suite, le torseur cinématique de la liaison équivalente s'écrit :

$$\{\mathcal{V}\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

torseur qui correspond à une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$.

REMARQUE

> *Les composantes de mouvement existant entre* (S_1) *et* (S_2) *sont celles qui appartiennent simultanément à toutes les liaisons* (L_i).

5.2.3. Hyperstatisme et mobilité

Le nombre total d'inconnues statiques introduit par les n liaisons en parallèle est :

$$\boxed{N_s = \sum_{i=1}^{n} n_{s_i}.}$$

L'écriture de la relation (3) donne six équations scalaires pour déterminer les N_s inconnues statiques en fonction des composantes X, Y, Z, L, M, N du torseur statique de la liaison équivalente.
Soit r_s le nombre d'équations scalaires *indépendantes* ($r_s \leqslant 6$).

*REMARQUE

> r_s *est le rang de la matrice associée à ce système de six équations à* N_s *inconnues, c'est-à-dire l'ordre d'un des déterminants principaux que l'on peut extraire de cette matrice.*

Définitions

> **Le *degré d'hyperstatisme h* de la liaison équivalente aux *n* liaisons en parallèle est égal au nombre total N_s d'inconnues statiques introduit par les liaisons, moins le nombre r_s de relations indépendantes entre ces inconnues.**

Soit : $\boxed{h = N_s - r_s.}$

Lorsque $h = 0$ la liaison équivalente est dite **isostatique.**
Lorsque $h > 0$ la liaison équivalente est dite **hyperstatique** d'ordre h.
Les h inconnues statiques qui ne peuvent pas être calculées en fonction des composantes X, Y, Z, L, M, N du torseur statique de la liaison équivalente sont appelées **inconnues hyperstatiques.**

REMARQUE

> *En explicitant la relation (4) on constate que le nombre* r_s *représente aussi le nombre de relations de nullité indépendantes imposées aux composantes* α, β, γ, u, v, w, *du torseur cinématique de la liaison équivalente (voir application du paragraphe 5.3). Cette propriété se démontre dans le cas général.*

Définitions

> **Le *degré de mobilité m* de la liaison équivalente aux *n* liaisons en parallèle est égal à 6 (nombre de degrés de liberté de la liaison libre) moins le nombre r_s de relations de nullité indépendantes imposées aux composantes du torseur cinématique de la liaison équivalente.**

Soit : $\boxed{m = 6 - r_s.}$

Lorsque $m = 0$ la liaison équivalente est dite **complète** ou **rigide.**
Lorsque $m > 0$ la liaison équivalente est dite **mobile** à m degrés de liberté.

5.3. Applications

Application 1

Considérons un arbre (S_2), d'axe $(O, \vec{x})$ monté dans un bâti (S_1) par l'intermédiaire de deux liaisons (L_1) et (L_2).
La liaison (L_1) est une liaison linéique annulaire d'axe $(O, \vec{x})$, de centre O.
La liaison (L_2) est une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$.

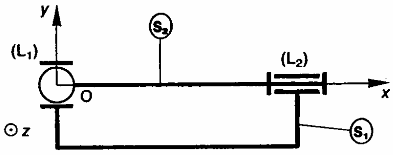


Fig. 5.

QUESTION 1

Déterminer le torseur statique de la liaison équivalente aux deux liaisons en parallèle (L_1) et (L_2).

RÉPONSE

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à (S_2). Les torseurs statiques des liaisons (L_1) et (L_2) ont au point O, dans la base de R, leur forme particulière conservée.

Posons

$$\{\mathcal{T}_1\} = {}_{O}\!\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_1 & 0 \\ Z_1 & 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\{\mathcal{T}_2\} = {}_{O}\!\left\{\begin{matrix} X_2 & 0 \\ Y_2 & M_2 \\ Z_2 & N_2 \end{matrix}\right\}.$$

Le torseur statique $\{\mathcal{T}\}$ de la liaison équivalente est tel que :

$$\{\mathcal{T}\} = \{\mathcal{T}_1\} + \{\mathcal{T}_2\}.$$

Posons :

$$\{\mathcal{T}\} = {}_{O}\!\left\{\begin{matrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{matrix}\right\}.$$

Les six équations scalaires à vérifier sont :

$$X = X_2$$
$$Y = Y_1 + Y_2$$
$$Z = Z_1 + Z_2$$
$$L = 0$$
$$M = M_2$$
$$N = N_2.$$

Par conséquent le torseur statique de la liaison équivalente est :

$$\{\mathcal{T}\} = {}_{O}\!\left\{\begin{matrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{matrix}\right\}.$$

Ce torseur statique est celui d'une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$.

QUESTION 2

Déterminer le degré d'hyperstatisme de la liaison équivalente ainsi que les inconnues hyperstatiques.

RÉPONSE

Le degré d'hyperstatisme de la liaison équivalente est :

$$h = N_S - r_S$$

or : $N_S = n_{S_1} + n_{S_2} = 2 + 5 = 7$

et le nombre d'équations indépendantes permettant le calcul des inconnues statiques des liaisons (L_1) et (L_2) en fonction de X, Y, Z, L, M, N est $r_S = 5$. Par conséquent :

$$\boxed{h = 2.}$$

Les deux inconnues hyperstatiques de la liaison équivalente sont Y_1 ou Y_2 et Z_1 ou Z_2.

REMARQUES

— On vérifie que le degré de mobilité de la liaison équivalente ($m = 6 - r_S$) est bien égal à 1.

— La simultanéité des contacts dans les liaisons (L_1) *et* (L_2) *impose que le centre de la liaison* (L_1) *soit sur l'axe de la liaison* (L_2)*, c'est- que les coordonnées cartésiennes suivant (et* $(O, \vec{z})$ *du centre de la liaison* (L_1) *nulles.*

On constate donc qu'il y a une correspor directe entre l'existence d'une composante statique de résultante générale de torseur st suivant un axe et une condition dimensic suivant cet axe.

De la même façon on constaterait qu'il y correspondance directe entre l'existence composante hyperstatique de moment ré: de torseur statique suivant un axe e condition angulaire autour de cet axe.

Par suite, une construction hyperstatique d dera toujours une plus grande précisi position relative des liaisons qu'une constr isostatique, d'où une fabrication avec de. rances de position plus réduites.

QUESTION 3

Par une étude cinématique, déterminer le torseur ci que de la liaison équivalente aux deux liaisons (L_1)

RÉPONSE

Les torseurs cinématiques des liaisons (L_1) e s'écrivent au point O, dans la base de R :

$$\{\mathcal{V}_1\} = {}_{O}\!\left\{\begin{matrix} \alpha_1 & u_1 \\ \beta_1 & 0 \\ \gamma_1 & 0 \end{matrix}\right\}$$

et

$$\{\mathcal{V}_2\} = {}_{O}\!\left\{\begin{matrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}.$$

Le torseur cinématique $\{\mathcal{V}\}$ de la liaison équivale de la forme :

$$\{\mathcal{V}\} = {}_{O}\!\left\{\begin{matrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{matrix}\right\}.$$

La compatibilité de $\{\mathcal{V}\}$ avec $\{\mathcal{V}_1\}$ impose :

$$v = 0, \quad w = 0.$$

La compatibilité de $\{\mathcal{V}\}$ avec $\{\mathcal{V}_2\}$ impose :

$$\beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0.$$

Par conséquent cinq relations de nullité indépendan imposées aux composantes du torseur cinématiqu liaison équivalente. Ce nombre est égal à r_S : nor relations indépendantes entre les inconnues statiq liaisons.

Par suite le torseur cinématique de la liaison équ est :

$$\{\mathcal{V}\} = {}_{O}\!\left\{\begin{matrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}.$$

REMARQUE

Les relations $v = 0$ et $w = 0$ sont imposée fois aux composantes du torseur $\{\mathcal{V}\}$ *indique la présence de composantes hyp ques de résultante générale des torseurs st des liaisons* (L_1) *et* (L_2) *suivant* $(O, \vec{y})$ *et (*

QUESTION 4

Pour que la liaison équivalente aux deux liaisons (L_1) et (L_2) soit une liaison pivot isostatique d'axe $(O, \vec{x})$, proposer plusieurs modifications possibles de la liaison (L_2), la liaison (L_1) restant inchangée.

RÉPONSE

La liaison équivalente conservant le même degré de mobilité $m = 6 - r_S = 1$, on en déduit que $r_S = 5$.
Si la liaison est isostatique : $h = N_S - r_S = 0$.
Alors : $$N_S = n_{S_1} + n_{S_2} = 5.$$
Comme $n_{S_1} = 2$, la liaison (L_2) doit introduire $n_{S_2} = 3$ inconnues statiques indépendantes (liaison à 3 degrés de liberté).
Pour trouver une liaison (L_2) rendant la construction isostatique il suffit de supposer $Y_2 = 0$ et $Z_2 = 0$. Alors le torseur statique de la liaison (L_2) devient :

$$\{\mathcal{T}_2\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & M_2 \\ 0 & N_2 \end{Bmatrix}.$$

Ce torseur statique est celui d'une *liaison appui plan* de normale $(O, \vec{x})$. D'où la première solution *(figure 6)* :

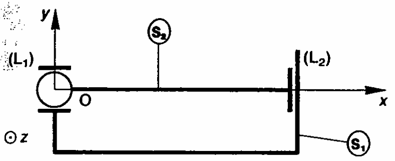


Fig. 6

Les torseurs statiques des liaisons (L_1) et (L_2) précédents ont leur forme particulière conservée *(chapitre 1 paragraphe 3.4.11)* au même point O et dans la même base de R.
Pour obtenir une autre construction isostatique il faut chercher une liaison (L_2) dont le torseur statique a sa forme particulière en un autre point que le point O.
Envisageons de placer en un point A de l'axe $(O, \vec{x})$ une liaison rotule de centre A. Le torseur statique correspondant est :

$$\{\mathcal{T}_2\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} X_2 & 0 \\ Y_2 & 0 \\ Z_2 & 0 \end{Bmatrix}.$$

Posons :

$$\overrightarrow{OA} = l\vec{x} \qquad (l \neq 0).$$

Pour vérifier que cette solution convient écrivons que :

$${}_{O}\{\mathcal{T}\} = {}_{O}\{\mathcal{T}_1\} + {}_{O}\{\mathcal{T}_2\}$$

d'où les six équations scalaires :

$$\begin{aligned} X &= X_2 \\ Y &= Y_1 + Y_2 \\ Z &= Z_1 + Z_2 \\ L &= 0 \\ M &= -lZ_2 \\ N &= lY_2. \end{aligned}$$

Toutes les inconnues statiques de ce système peuvent être calculées en fonction de X, Y, Z, L, M, N et $r_S = 5$.

Par conséquent la *liaison rotule* choisie convient pour réaliser la liaison pivot isostatique entre (S_1) et (S_2) *(figure 7).*

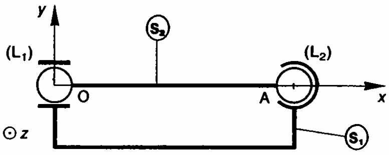


Fig. 7

REMARQUES

> — *C'est au constructeur de choisir en fonction de la nature du mécanisme qu'il étudie la liaison* (L_2) *la plus adaptée.*
> — *Lorsqu'en un même point et dans une même base tous les torseurs statiques (ou cinématiques) des liaisons ont leur forme particulière, les liaisons sont dites* concentriques.

Application 2

Pour vérifier qu'une liaison entre deux pièces (S_1) et (S_2), réalisée par association en parallèle de six liaisons ponctuelles de normales connues, est *complète* et *isostatique*, il suffit d'utiliser la méthode définie précédemment.
Cependant dans ce cas fréquemment rencontré, en particulier dans les montages d'usinage, on vérifie pratiquement qu'il en est ainsi à condition :

1° qu'il n'y ait pas plus de trois normales parallèles,

2° qu'il n'y ait pas plus de trois normales dans un même plan, ces trois normales étant, ni concourantes en un même point, ni parallèles,

3° qu'il n'y ait pas plus de trois normales non coplanaires concourantes en un même point,

4° que les six normales soient disposées dans 3 directions différentes.

6. LIAISONS EN SÉRIE

6.1. DÉFINITION

> ***n* liaisons (L_1), (L_2), ..., (L_i), ..., (L_n) sont en série entre deux solides (S_0) et (S_n) si elles sont disposées à la suite l'une de l'autre par l'intermédiaire de ($n - 1$) solides.**

Le graphe des liaisons se trace ainsi (figure 8) :

On dit également que les ($n + 1$) solides assemblés par les *n* liaisons en série constituent une **chaîne continue ouverte.**

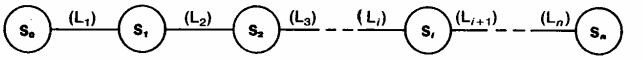


Fig. 8

6.2. LIAISON ÉQUIVALENTE

6.2.1. Torseur statique

Le torseur statique $\{\mathcal{T}_i\}$ de la liaison (L_i) représente dans cette étude l'action mécanique du solide (S_{i-1}) sur le solide (S_i). Le torseur statique $\{\mathcal{T}\}$ de la liaison équivalente représente l'action mécanique équivalente du solide (S_0) sur le solide (S_n).
Supposons qu'en plus des actions mécaniques dans les liaisons entre les différents solides, s'exerce sur le solide (S_0) une action mécanique représentée par le torseur $\{\mathcal{T}_0\}$.
Le principe fondamental de la statique appliqué à (S_0) s'écrit :

$$\{\mathcal{T}_0\}-\{\mathcal{T}_1\}=\{\vec{0}\}$$

à l'ensemble $\{(S_0), (S_1)\}$:

$$\{\mathcal{T}_0\}-\{\mathcal{T}_2\}=\{\vec{0}\}$$

à l'ensemble $\{(S_0), (S_1), (S_2)\}$:

$$\{\mathcal{T}_0\}-\{\mathcal{T}_3\}=\{\vec{0}\}$$

et ainsi de suite jusqu'à l'ensemble $\{(S_0), (S_1), \dots (S_{n-1})\}$:

$$\{\mathcal{T}_0\}-\{\mathcal{T}_n\}=\{\vec{0}\}.$$

En écrivant le principe fondamental, appliqué à (S_0), avec le torseur statique de la liaison équivalente de l'action mécanique de (S_0) sur (S_n), on obtient :

$$\{\mathcal{T}_0\}-\{\mathcal{T}\}=\{\vec{0}\}.$$

En comparant toutes ces relations on en déduit que le torseur statique de la liaison équivalente doit vérifier :

$$\boxed{\{\mathcal{T}\}=\{\mathcal{T}_1\}=\{\mathcal{T}_2\}=\dots=\{\mathcal{T}_n\}.} \qquad (5)$$

Par conséquent, si une composante d'un torseur statique d'une liaison (L_i) est nulle, la composante correspondante du torseur statique de la liaison équivalente est nulle. Les composantes d'action mécanique transmissibles entre (S_0) et (S_n) sont donc celles qui sont transmissibles simultanément par les liaisons (L_i).

6.2.2. Torseur cinématique

Le torseur cinématique $\{\mathcal{V}_i\}$ de la liaison (L_i) représente dans cette étude le mouvement du solide (S_i) par rapport au solide (S_{i-1}). Le torseur cinématique $\{\mathcal{V}\}$ de la liaison équivalente représente le mouvement du solide (S_n) par rapport au solide (S_0).
La relation entre le torseur $\{\mathcal{V}\}$ et les torseurs $\{\mathcal{V}_i\}$ s'obtient en écrivant la relation de composition des torseurs cinématiques entre les différents solides en présence :

$$\{\mathcal{V}(S_n/S_0)\}=\{\mathcal{V}(S_n/S_{n-1})\}+\dots+\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}$$

soit avec les notations utilisées :

$$\boxed{\{\mathcal{V}\}=\sum_{i=1}^{n}\{\mathcal{V}_i\}.} \qquad (6)$$

Par suite, les composantes de mouvement exi entre (S_0) et (S_n) sont toutes celles des liaisons

6.2.3. Hyperstatisme et mobilité

L'écriture de la relation (5) :

$$\{\mathcal{T}\}=\{\mathcal{T}_1\}=\{\mathcal{T}_2\}=\dots=\{\mathcal{T}_n\}$$

permet la détermination de toutes les compos X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i des torseurs statiques $\{\mathcal{T}$ fonction des composantes X, Y, Z, L, M, torseur statique $\{\mathcal{T}\}$ de la liaison équivalente. Par conséquent, la liaison équivalente aux n lia en série entre (S_0) et (S_n) est toujours *isosta*

Définition

Le *degré de mobilité* m_u de la *liaison équi* aux n liaisons en série entre (S_0) et (S_n) es au nombre d'inconnues cinématiques indépe tes du torseur cinématique de la l équivalente.

m_u est aussi appelé **degré de mobilité utile chaîne continue ouverte.**
Le nombre total d'inconnues cinématiques int par les n liaisons en série est :

$$\boxed{N_c=\sum_{i=1}^{n} n_{c_i}.}$$

Définition

Le *degré de mobilité* m de la *chaîne c ouverte* comprenant n liaisons est égal au N_c d'inconnues cinématiques introduit pa liaisons.

Soit $\boxed{m=N_c.}$

Comme l'introduction successive de solides in diaires entre (S_0) et (S_n) ne peut qu'augme degré de mobilité de la chaîne continue ouve a toujours : $m \geqslant m_u$ (voir l'applicatic *paragraphe 6.2.4*).

Posons alors : $\boxed{m=m_u+m_i.}$

m_i est appelé **degré de mobilité interne** de la **continue ouverte.**
Une pièce a une mobilité interne dans un mé (par exemple, une bielle tournant sur ell entre deux liaisons rotule) si elle peut a mouvement qui n'entraîne aucun mouvem autres pièces du mécanisme.

6.2.4. Application

Soit une chaîne continue ouverte constituée solides (S_0), (S_1) et (S_2).

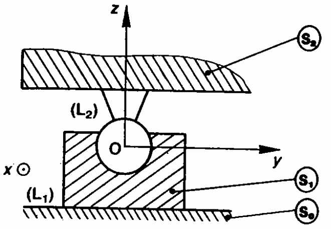


Fig. 9

La liaison (L_2) entre (S_1) et (S_2) est une liaison rotule de centre O.
La liaison (L_1) entre (S_0) et (S_1) est une liaison appui plan de normale $(O, \vec{z})$.
Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère situé sur les liaisons.

QUESTION 1

Déterminer le torseur statique de la liaison équivalente aux deux liaisons en série entre (S_0) et (S_2).

RÉPONSE

Au point O, dans la base de R, les torseurs statiques des liaisons (L_1) et (L_2) sont de la forme :

$$\{\mathcal{T}_1\} = {}_O\begin{Bmatrix} 0 & L_1 \\ 0 & M_1 \\ Z_1 & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}_2\} = {}_O\begin{Bmatrix} X_2 & 0 \\ Y_2 & 0 \\ Z_2 & 0 \end{Bmatrix}$$

soit

$$\{\mathcal{T}\} = {}_O\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$$

le torseur statique de la liaison équivalente.
Le torseur $\{\mathcal{T}\}$ est tel que :

$$\{\mathcal{T}\} = \{\mathcal{T}_1\} = \{\mathcal{T}_2\}$$

d'où

$$\begin{array}{ll} X = 0 & X = X_2 \\ Y = 0 & Y = Y_2 \\ Z = Z_1 & Z = Z_2 \\ L = L_1 & L = 0 \\ M = M_1 & M = 0 \\ N = 0 & N = 0 \end{array}$$

Par conséquent le torseur statique de la liaison équivalente est :

$$\{\mathcal{T}\} = {}_O\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}.$$

Par suite la liaison équivalente aux deux liaisons en série entre (S_0) et (S_2) est une *liaison ponctuelle* de normale $(O, \vec{z})$.

REMARQUE

> *L'avantage d'une telle réalisation est d'avoir des liaisons à contact surfacique.*

QUESTION 2

Par une étude cinématique, déterminer le torseur cinématique de la liaison équivalente aux deux liaisons en série entre (S_0) et (S_2). En déduire le degré de mobilité interne de la chaîne continue ouverte constituée par (S_0), (S_1) et (S_2).

RÉPONSE

Les torseurs cinématiques des liaisons (L_1) et (L_2) s'écrivent au point O, dans la base de R :

$$\{\mathcal{V}_1\} = {}_O\begin{Bmatrix} 0 & u_1 \\ 0 & v_1 \\ \gamma_1 & 0 \end{Bmatrix} \quad \{\mathcal{V}_2\} = {}_O\begin{Bmatrix} \alpha_2 & 0 \\ \beta_2 & 0 \\ \gamma_2 & 0 \end{Bmatrix}$$

soit

$$\{\mathcal{V}\} = {}_O\begin{Bmatrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{Bmatrix}$$

le torseur cinématique de la liaison équivalente.
Le torseur $\{\mathcal{V}\}$ est tel que :

$$\{\mathcal{V}\} = \{\mathcal{V}_1\} + \{\mathcal{V}_2\}$$

soit

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_2 \\ \beta &= \beta_2 \\ \gamma &= \gamma_1 + \gamma_2 \\ u &= u_1 \\ v &= v_1 \\ w &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent le torseur cinématique de la liaison équivalente aux deux liaisons en série entre (S_0) et (S_2) est de la forme :

$$\{\mathcal{V}\} = {}_O\begin{Bmatrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & 0 \end{Bmatrix}.$$

Le degré de mobilité de la chaîne continue ouverte constituée par (S_0), (S_1) et (S_2) est $m = N_c$.

Or : $N_c = n_{c_1} + n_{c_2} = 3 + 3$

donc : $m = 6$.

Le degré de mobilité m_u de la liaison équivalente est égal au nombre d'inconnues cinématiques indépendantes du torseur cinématique de la liaison ponctuelle équivalente d'où :

$$m_u = 5.$$

Par suite le degré de mobilité interne de la chaîne continue ouverte est :

$$m_i = m - m_u$$

soit : $\boxed{m_i = 1.}$

La mobilité interne se localise en remarquant que la relation : $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ indique que γ_1 et γ_2 peuvent être différents de zéro, si le torseur cinématique de la liaison équivalente est nul, c'est-à-dire que (S_1) peut tourner autour de $(O, \vec{z})$ sans provoquer un mouvement de (S_2) par rapport à (S_0).

7. AVANTAGES ET INCONVÉNIENTS D'UN MÉCANISME ISOSTATIQUE PAR RAPPORT A UN MÉCANISME HYPERSTATIQUE

Dans un mécanisme isostatique, l'absence d'inconnues hyperstatiques indique que la position relative des liaisons n'a pas besoin d'être aussi précise que dans un mécanisme hyperstatique.

D'où :

a) Une facilité de fabrication plus grande par l'absence de tolérances de position réduites à respecter (parallélisme, perpendicularité, coaxialité...). Notons que cette facilité de fabrication est en partie compensée par une complexité plus grande du mécanisme. Complexité généralement due à l'introduction de pièces intermédiaires en série dans les liaisons pour augmenter leur nombre de degrés de liberté.

b) Une assurance que les surfaces de liaison sont bien en contact. Par conséquent, une construction isostatique réalise une mise en position précise d'une pièce par rapport à une autre.

c) Une connaissance exacte du torseur statique de chaque liaison, qui permet une évaluation correcte des pressions entre les surfaces en contact.

EXEMPLE

Positionnement isostatique de Kelvin

Dans ce positionnement, utilisé par exemple pour les tourelles de tour, la liaison isostatique et complète entre les deux pièces (S_1) et (S_2) est réalisée par l'association en parallèle des trois liaisons suivantes :

(L_1) : liaison rotule.
(L_2) : liaison linéique annulaire, dont l'axe passe par le centre de la liaison rotule.
(L_3) : liaison ponctuelle, dont la normale est perpendiculaire au plan formé par l'axe de la liaison linéique annulaire et le point de contact de la liaison ponctuelle.

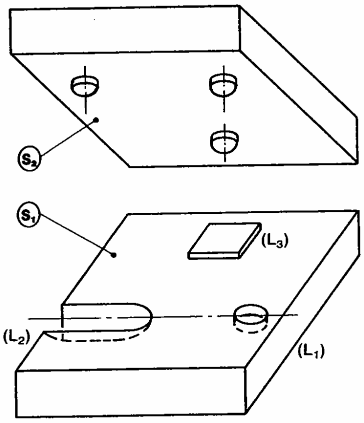


Fig. 10

Ceci dit, un mécanisme hyperstatique est souvent plus rigide qu'un mécanisme isostatique (par exemple un arbre montré sur trois paliers), ce qui est aussi un facteur de précision de position d'une pièce par rapport à une autre. Une telle construction est généralement employée pour les mécanismes de transmission d'actions mécaniques importantes.

REMARQUE

> *Pour savoir si un mécanisme est réelle hyperstatique, le constructeur devra interp les conclusions de l'étude théorique faite i fonction des solutions technologiques qu'il sage d'adopter pour le construire. particulier : introduction de jeu dans les lia où de pièces déformables dans le mécanis*

8. MAINTIEN DU CONTACT DANS LES LIAISONS

Les dispositifs de maintien du contact d'une sur ses appuis se classent en deux catégories

1° Ceux qui assurent un maintien du contact pièce déjà positionnée.

2° Ceux qui assurent à la fois la mise en po et le maintien du contact d'une pièce.

Étudions un exemple de la première catégori exemple de la deuxième catégorie est étudié l'exercice numéro 2).

Le montage d'usinage (M) de la *figure 11* p d'obtenir sur la pièce (P), les formes définie les cotes A, B et C, par fraisage « horizontal » (trois tailles).

La pièce repose sur un plan horizontal, dégagé sa partie médiane, et s'appuie sur les trois sphériques (1), (2) et (3).

On montre par une étude de liaisons en par que la liaison équivalente ainsi obtenue, en pièce (P) et le montage d'usinage (M), est *isc que* et *complète*.

Étudions le maintien du contact (le bridage) par la vis de pression (V).

Supposons qu'on exerce sur cette vis une mécanique *connue* (emploi d'une clé mométrique) pour que les inconnues statique liaisons puissent être déterminées (sinon ces nues seraient hyperstatiques).

La liaison de la pièce (P) avec le montage d'u (M) par l'intermédiaire de la vis (V) fait inte en série les deux liaisons suivantes :

(L_1) : liaison ponctuelle d'axe $(O, \vec{y})$.
(L_2) : liaison glissière hélicoïdale d'axe (O, pas réduit *p*.

Déterminons le torseur statique de la équivalente à ces deux liaisons en série.

Au point O, dans la base du repère R(O, $\vec{x}$, lié à (M), les torseurs statiques des deux li (L_1) et (L_2) sont de la forme :

$$\{\mathcal{T}_1\} = {}_O\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}_2\} = {}_O\left\{\begin{matrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{matrix}\right.$$

soit

$$\{\mathcal{T}\} = {}_O\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$$

le torseur statique de la liaison équivalente.

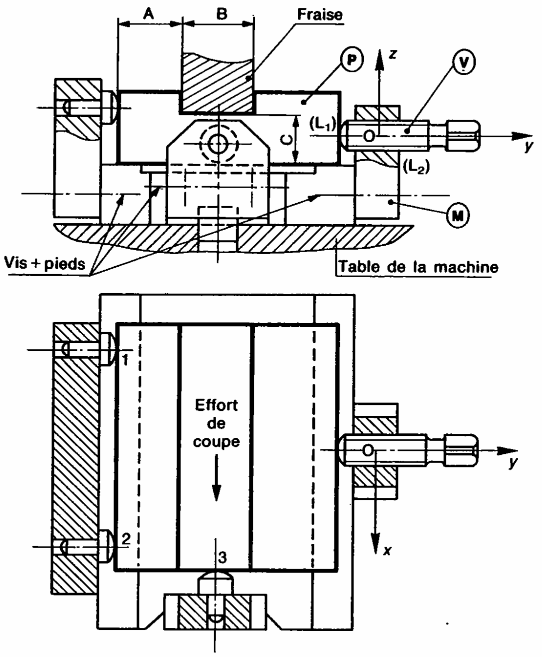


Fig. 11

Le torseur $\{\mathcal{T}\}$ doit vérifier :

$$\{\mathcal{T}\} = \{\mathcal{T}_1\} = \{\mathcal{T}_2\}$$

soit :

$$\begin{aligned} X &= 0 = X_2 \\ Y &= Y_1 = Y_2 \\ Z &= 0 = Z_2 \\ L &= 0 = L_2 \\ M &= 0 = -pY_2 \\ N &= 0 = N_2. \end{aligned}$$

Le torseur $\{\mathcal{T}\}$ est donc nul. Par suite, la liaison équivalente, entre le montage (M) et la pièce (P), au dispositif du maintien du contact est une *liaison libre*.

Ce dispositif de maintien du contact n'ajoute aucune inconnue statique à celles déjà introduites par les liaisons de mise en position de la pièce. Par conséquent, la liaison équivalente aux liaisons de la pièce (P) avec le montage (M) (dispositif de maintien du contact compris) est toujours isostatique.

D'une façon générale, la liaison équivalente entre deux solides, d'un dispositif de maintien du contact n'assurant pas la mise en position relative des solides, doit être une liaison libre. Une telle liaison permet de ne pas augmenter le degré d'hyperstatisme, déjà obtenu par les liaisons de mise en position relative des deux solides.

REMARQUES

— Le dispositif de maintien du contact doit permettre des mouvements relatifs dans toutes les directions aux pièces entre lesquelles il vient s'intercaler.

— Le maintien de l'action mécanique de la vis (V) *sur la pièce* (P) *est assuré par l'irréversibilité du système vis-écrou, ce qui n'apparaît pas dans cette étude car les liaisons sont supposées sans frottement.*

9. CHAINE CONTINUE FERMÉE

9.1. DÉFINITION

Une chaîne continue ouverte dont les deux solides extrêmes ont une liaison entre eux constitue une chaîne continue fermée.

Dans le cas d'une chaîne continue fermée constituée de $(n+1)$ solides assemblés en série par $(n+1)$ liaisons, le graphe des liaisons se trace ainsi :

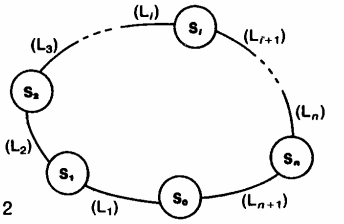


Fig. 12

Une chaîne continue fermée est aussi appelée *chaîne simple* ou *boucle*.

EXEMPLE

La chaîne cinématique du réducteur représentée *figure 13* est une chaîne continue fermée constituée des trois solides suivants :

(S_0) : bâti du réducteur
(S_1) : arbre d'entrée du réducteur
(S_2) : arbre de sortie du réducteur.

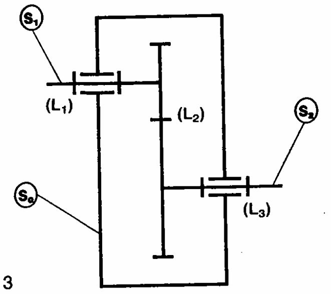


Fig. 13

9.2. ÉTUDE STATIQUE

Le torseur statique $\{\mathcal{T}_i\}$ de la liaison (L_i) représente dans cette étude l'action mécanique du solide (S_{i-1}) sur le solide (S_i).

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au solide (S_0), que l'on supposera être le bâti supportant la chaîne continue fermée.

Supposons qu'en plus des actions mécaniques dans les liaisons entre les différents solides, s'exerce :

— sur le solide (S_1) une action mécanique, dite d'*entrée* du mécanisme, représentée au point O, dans la base de R, par le torseur :

$$\{\mathcal{T}_e\} = {}_O\left\{\begin{matrix} X_e & L_e \\ Y_e & M_e \\ Z_e & N_e \end{matrix}\right\}$$

— sur le solide (S_n) une action mécanique, dite de *sortie* du mécanisme, représentée au point O, dans la base de R, par le torseur :

$$\{\mathcal{T}_s\} = {}_O\left\{\begin{matrix} X_s & L_s \\ Y_s & M_s \\ Z_s & N_s \end{matrix}\right\}$$

— sur le solide (S_0) une action mécanique repr tée au point O, dans la base de R, par le to $\{\mathcal{T}_0\}$ (action mécanique du sol sur le bâti).

Ces trois torseurs sont liés par la relation obt en appliquant le principe fondamental de la sta à l'ensemble des $(n+1)$ solides de la c continue fermée :

$$\{\mathcal{T}_e\} + \{\mathcal{T}_s\} + \{\mathcal{T}_0\} = \{\vec{0}\}$$

soit $N_s = \sum_{i=1}^{n+1} n_{s_i}$ le nombre d'inconnues stat introduit par les $(n+1)$ liaisons de la c continue fermée.

Toutes les relations entre ces N_s inconnues sta s'obtiennent en appliquant le principe fonda de la statique successivement aux n solides (S_2), ..., (S_n).

Montrons qu'il est inutile d'appliquer le pr fondamental de la statique au solide (S_0).

Pour cela appliquons le principe fondamental statique à :

(S_1) : $\{\mathcal{T}_1\} - \{\mathcal{T}_2\} + \{\mathcal{T}_e\} = \{\vec{0}\}$
(S_2) : $\{\mathcal{T}_2\} - \{\mathcal{T}_3\} = \{\vec{0}\}$
. . . .
(S_{n-1}) : $\{\mathcal{T}_{n-1}\} - \{\mathcal{T}_n\} = \{\vec{0}\}$
(S_n) : $\{\mathcal{T}_n\} - \{\mathcal{T}_{n+1}\} + \{\mathcal{T}_s\} = \{\vec{0}\}$.

Ajoutons membre à membre ces relations, il après simplifications :

$$\{\mathcal{T}_1\} - \{\mathcal{T}_{n+1}\} + \{\mathcal{T}_e\} + \{\mathcal{T}_s\} = \{\vec{0}\}$$

avec la relation (7) on obtient :

$$-\{\mathcal{T}_1\} + \{\mathcal{T}_{n+1}\} + \{\mathcal{T}_0\} = \{\vec{0}\}.$$

Cette relation traduit l'application du p fondamental de la statique au solide (S_0). C elle se déduit des précédentes, il est d'appliquer le principe fondamental de la s au solide (S_0).

Soit r_s le nombre d'équations scalaires *indép tes* entre les N_s inconnues statiques $(r_s \leqslant 6n$

Définition

Le *degré d'hyperstatisme h* de la chaîne c fermée est égal au nombre N_s d'inconnues s introduit par les liaisons, moins le nombr relations indépendantes entre ces inconnu

Soit $\boxed{h = N_s - r_s.}$

REMARQUE

Lorsque le nombre de solides est impor détermination de r_S est parfois fastidieus

Dans cette étude statique, on montre que l ***de mobilité** m* de la chaîne continue fermée

$$\boxed{m = 6n - r_s.}$$

m représente le nombre d'inconnues cinématiques indépendantes de la chaîne continue fermée. Par conséquent m comprend le degré de mobilité interne de la chaîne continue fermée.

En éliminant r_S entre (8) et (9), on obtient la relation suivante entre le degré d'hyperstatisme h et le degré de mobilité m :

$$h = m + N_s - 6n.$$

Soit : $N_C = \sum_{i=1}^{n+1} n_{C_i}$ le nombre d'inconnues cinématiques introduit par les $(n+1)$ liaisons. Sachant que : $n_{C_i} = 6 - n_{s_i}$, N_C s'écrit :

$$N_C = \sum_{i=1}^{n+1} (6 - n_{S_i})$$

soit : $$N_C = 6(n+1) - N_S.$$

Par suite :

$$\boxed{h = m + 6 - N_C.} \qquad (10)$$

Cette relation permet le calcul du degré d'hyperstatisme connaissant le degré de mobilité. Nous allons mettre en évidence dans l'étude qui suit, une méthode simple pour déterminer le degré de mobilité de chaîne continue fermée.

9.3. ÉTUDE CINÉMATIQUE

Le torseur cinématique $\{\mathcal{V}_i\}$ de la liaison (L_i) représente dans cette étude le mouvement du solide (S_i) par rapport au solide (S_{i-1}).

En écrivant la relation de composition des torseurs cinématiques entre les différents solides en présence, on obtient :

$$\{\mathcal{V}(S_0/S_0)\} = \{\mathcal{V}(S_0/S_n)\} + \{\mathcal{V}(S_n/S_{n-1})\} + \dots + \{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} = \{\vec{0}\}.$$

Soit avec les notations utilisées :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n+1} \{\mathcal{V}_i\} = \{\vec{0}\}.}$$

En explicitant cette relation on obtient un système de six équations scalaires pour déterminer les N_C inconnues cinématiques.

Soit r_C le nombre d'équations scalaires *indépendantes* ($r_C \leq 6$).

Définition

Le *degré de mobilité m* de la chaîne continue fermée est égal au nombre N_C d'inconnues cinématiques introduit par les liaisons, moins le nombre r_C de relations indépendantes entre ces inconnues.

Soit $$\boxed{m = N_C - r_C.}$$

On peut également dire que le degré de mobilité de la chaîne continue fermée est le nombre d'inconnues cinématiques indépendantes qu'il faut se fixer pour déterminer toutes les autres.

9.4. APPLICATION

Considérons un mécanisme de commande d'une tige par un excentrique.

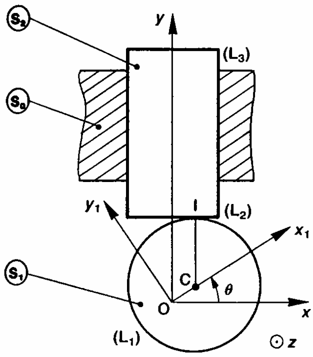


Fig. 14

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti (S_0).

L'excentrique (S_1) est assimilé à un cylindre de révolution d'axe $(C, \vec{z})$, de rayon a. (S_1) a une liaison pivot (L_1) d'axe $(O, \vec{z})$ avec (S_0).

Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à (S_1) tel que : $\overline{OC} = e\vec{x}_1$ $(e > 0)$.

On pose : $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.

La tige (S_2), cylindrique de révolution, a une liaison pivot glissant (L_3) d'axe $(O, \vec{y})$ avec (S_0).

(S_1) et (S_2) ont une liaison linéique rectiligne (L_2) d'axe $(I, \vec{z})$ et de normale $\vec{y}$.

QUESTION 1

Par une étude cinématique déterminer le degré de mobilité de la chaîne continue fermée (S_0) — (S_1) — (S_2) — (S_0). En déduire son degré d'hyperstatisme.

RÉPONSE

Avec les notations définies précédemment, les torseurs cinématiques $\{\mathcal{V}_i\}$ des liaisons (L_i) sont, dans R, de la forme :

$$\{\mathcal{V}_1\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 \end{Bmatrix} \qquad \{\mathcal{V}_2\} = {}_{I}\begin{Bmatrix} 0 & u_2 \\ \beta_2 & 0 \\ \gamma_2 & w_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{V}_3\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_3 & v_3 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}.$$

Les torseurs $\{\mathcal{V}_i\}$ doivent vérifier la relation :

$$\sum_{i=1}^{3} \{\mathcal{V}_i\} = \{\vec{0}\}.$$

Pour ajouter ces trois torseurs, exprimons au préalable le torseur $\{\mathcal{V}_2\}$ au point O.

$$\{\mathcal{V}_2\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} 0 & u_2 + \gamma_2(a + e \sin\theta) \\ \beta_2 & -\gamma_2 e \cos\theta \\ \gamma_2 & w_2 + \beta_2 e \cos\theta \end{Bmatrix}.$$

Par suite, les inconnues cinématiques sont liées par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}&\beta_2+\beta_3=0\\&\gamma_1+\gamma_2=0\\&u_2+\gamma_2(a+e\sin\theta)=0\\&v_3-\gamma_2 e\cos\theta=0\\&w_2+\beta_2 e\cos\theta=0.\end{aligned}$$

Le nombre d'équations indépendantes de ce système est : $r_C=5$.
Le nombre d'inconnues cinématiques introduit par les trois liaisons étant : $N_C=1+4+2=7$, le degré de mobilité de la chaîne continue fermée est :

$$m=N_C-r_C$$

soit : $\boxed{m=2.}$

REMARQUE

> *Si on se fixe γ_1 et β_3, on détermine les autres inconnues cinématiques.*

Le degré d'hyperstatisme se détermine par la relation $h=m+6-N_C$.

D'où : $\boxed{h=1.}$

QUESTION 2

Par une étude statique, déterminer l'inconnue hyperstatique de la chaîne continue fermée. Proposer une solution pour rendre ce mécanisme isostatique.

RÉPONSE

Appliquons le principe fondamental de la statique à (S_1), puis à (S_2), en supposant que s'exerce :
— sur (S_1) : l'action mécanique d'entrée du mécanisme définie par le torseur :

$$\{\mathcal{T}_e\}={}_{O}\begin{Bmatrix}X_e & L_e\\Y_e & M_e\\Z_e & N_e\end{Bmatrix}$$

— sur (S_2) : l'action mécanique de sortie du mécanisme définie par le torseur :

$$\{\mathcal{T}_s\}={}_{O}\begin{Bmatrix}X_s & L_s\\Y_s & M_s\\Z_s & N_s\end{Bmatrix}.$$

Les torseurs statiques $\{\mathcal{T}_i\}$ des liaisons (L_i) sont de la forme :

$$\{\mathcal{T}_1\}={}_{O}\begin{Bmatrix}X_1 & L_1\\Y_1 & M_1\\Z_1 & 0\end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{T}_2\}={}_{I}\begin{Bmatrix}0 & L_2\\Y_2 & 0\\0 & 0\end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{T}_3\}={}_{O}\begin{Bmatrix}X_3 & L_3\\0 & 0\\Z_3 & N_3\end{Bmatrix}$$

(tous ces torseurs sont exprimés dans la base de R).
Appliquons le principe fondamental de la statique à (S_1) :

$$\{\mathcal{T}_1\}-\{\mathcal{T}_2\}+\{\mathcal{T}_e\}=\{\vec{0}\}$$

d'où après avoir exprimé $\{\mathcal{T}_2\}$ en O :

$$\begin{aligned}&X_1+X_e=0\\&Y_1-Y_2+Y_e=0\\&Z_1+Z_e=0\\&L_1-L_2+L_e=0\\&M_1+M_e=0\\&-Y_2 e\cos\theta+N_e=0.\end{aligned}$$

Appliquons le principe fondamental de la stati (S_2) :

$$\{\mathcal{T}_2\}-\{\mathcal{T}_3\}+\{\mathcal{T}_s\}=\{\vec{0}\}$$

d'où après avoir exprimé $\{\mathcal{T}_2\}$ en O :

$$\begin{aligned}&-X_3+X_s=0\\&Y_2+Y_s=0\\&-Z_3+Z_s=0\\&L_2-L_3+L_s=0\\&M_s=0\\&Y_2 e\cos\theta-N_3+N_s=0.\end{aligned}$$

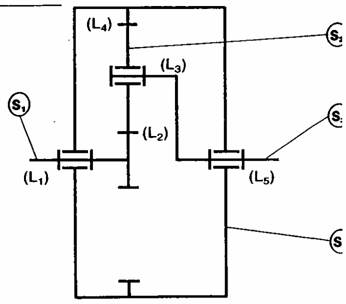
On vérifie que les seules inconnues statiques peuvent être calculées en fonction des compo des torseurs $\{\mathcal{T}_e\}$ et $\{\mathcal{T}_S\}$ sont L_1, L_2 et L conséquent l'inconnue hyperstatique du méca est L_1 ou L_2 ou L_3.
Le mécanisme est isostatique si $L_2=0$, c'est- si la liaison (L_2) est modélisable par une ponctuelle de normale $(I, \vec{y})$. C'est le cas l l'excentrique est de faible épaisseur.

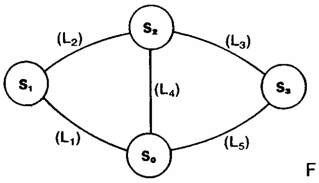
10. CHAINE COMPLEXE

10.1. DÉFINITION

> **Une chaîne complexe est une chaîne ciném constituée de plusieurs chaînes continues fe imbriquées.**

EXEMPLE





F

La chaîne cinématique du réducteur à train épicycloïdal schématisé *figure 15* est une chaîne complexe constituée de deux chaînes continues fermées imbriquées, comme l'indique son graphe des liaisons.

10.2. NOMBRE CYCLOMATIQUE DE LA CHAINE COMPLEXE

Soient n le nombre de solides et l le nombre de liaisons de la chaîne complexe. On montre (théorie des graphes) que le nombre de chaînes continues fermées indépendantes à étudier est :

$$\boxed{\gamma = l - n + 1}$$

γ est appelé **nombre cyclomatique** de la chaîne complexe.

Pour l'exemple précédent : $l = 5$ et $n = 4$. Par suite : $\gamma = 2$.

REMARQUE

On choisit les γ chaînes continues fermées de telle façon que toutes les liaisons y apparaissent au moins une fois.

10.3. ÉTUDE STATIQUE

Soit N_S le nombre d'inconnues statiques introduit par les l liaisons.

En appliquant le principe fondamental de la statique successivement à $(n-1)$ solides de la chaîne complexe on obtient $6(n-1)$ équations scalaires entre les N_S inconnues statiques.

Soit r_S le nombre d'équations scalaires *indépendantes* $(r_S \leqslant 6(n-1))$.

REMARQUE

Il est inutile d'appliquer le principe fondamental de la statique aux n solides, pour la même raison que celle donnée au paragraphe 9.2.

Définition

Le *degré d'hyperstatisme h* de la chaîne complexe est :

$$\boxed{h = N_S - r_S.} \qquad (10)$$

On montre dans cette étude statique que le *degré de mobilité m* de la chaîne complexe est :

$$\boxed{m = 6(n-1) - r_S.} \qquad (11)$$

En éliminant r_S entre (10) et (11) on obtient entre le degré d'hyperstatisme h et le degré de mobilité m la relation suivante :

$$h = m + N_S - 6(n-1).$$

Soit $N_C = \sum_{i=1}^{l} n_{C_i}$ le nombre d'inconnues cinématiques introduit par les l liaisons.

Sachant que $n_{C_i} = 6 - n_{S_i}$, N_C s'écrit :

$$N_C = \sum_{i=1}^{l} (6 - n_{S_i})$$

soit $$N_C = 6l - N_S.$$

Par suite

$$h = m + 6l - 6(n-1) - N_C$$

ou $$h = m + 6(l - n + 1) - N_C$$

avec $\gamma = l - n + 1$, on obtient :

$$\boxed{h = m + 6\gamma - N_C.}$$

Cette relation permet le calcul de degré d'hyperstatisme connaissant le degré de mobilité de la chaîne complexe.

10.4. ÉTUDE CINÉMATIQUE

En écrivant pour les γ chaînes continues fermées la loi de composition des torseurs cinématiques, comme au *paragraphe 9.3,* on obtient 6γ relations scalaires entres les N_C inconnues cinématiques de la chaîne complexe.

Soit r_C le nombre d'équations scalaires *indépendantes* $(r_C \leqslant 6\gamma)$.

Définition

Le *degré de mobilité m* de la chaîne complexe est :

$$\boxed{m = N_C - r_C.}$$

10.5. APPLICATION

Considérons un étau serrant une pièce (S_3) de forme parallélépipèdique.

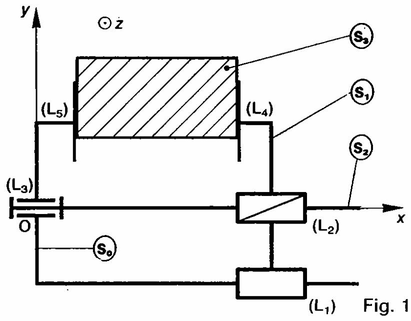


Fig. 16

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au mors fixe (S_0) de l'étau. Le mors mobile (S_1) a une liaison glissière (L_1) de direction $\vec{x}$ avec (S_0).

La vis de manœuvre (S_2) a une liaison pivot (L_3) d'axe ($O, \vec{x}$) avec (S_0), et une liaison glissière hélicoïdale (L_2) d'axe ($O, \vec{x}$) avec (S_1).
Les liaisons de la pièce (S_3) avec le mors fixe (S_0) et le mors mobile (S_1) sont deux liaisons planes (L_5) et (L_4) respectivement, de normale $\vec{x}$.

QUESTION 1

Tracer le graphe des liaisons et déterminer le nombre de chaînes continues fermées indépendantes de ce mécanisme.

RÉPONSE

Le graphe des liaisons se trace ainsi :

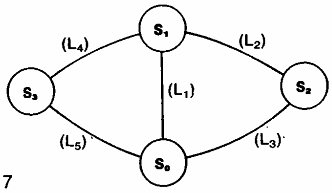


Fig. 17

Ce mécanisme est constitué de quatre solides réunis par cinq liaisons. Par suite le nombre de chaînes continues fermées indépendantes est : $\gamma = l - n + 1 = 2$.

QUESTION 2

Par une étude cinématique déterminer le degré de mobilité de la chaîne complexe. En déduire son degré d'hyperstatisme.

RÉPONSE

Tous les torseurs cinématiques (ou statiques) des liaisons ont leur forme particulière au point O, dans la base de R (liaisons concentriques).
Posons :

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} = \{\mathcal{V}_1\} = {}_O\begin{Bmatrix} 0 & u_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \{\mathcal{V}_2\} = {}_O\begin{Bmatrix} \alpha_2 & p\alpha_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \ (p \text{ : pas réduit})$$

$$\{\mathcal{V}(S_0/S_2)\} = \{\mathcal{V}_3\} = {}_O\begin{Bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{V}(S_3/S_1)\} = \{\mathcal{V}_4\} = {}_O\begin{Bmatrix} \alpha_4 & 0 \\ 0 & v_4 \\ 0 & w_4 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{V}(S_0/S_3)\} = \{\mathcal{V}_5\} = {}_O\begin{Bmatrix} \alpha_5 & 0 \\ 0 & v_5 \\ 0 & w_5 \end{Bmatrix}.$$

Pour la chaîne continue fermée (S_0) − (S_1) − (S_2) − (S_0), on peut écrire :

$$\{\mathcal{V}_1\} + \{\mathcal{V}_2\} + \{\mathcal{V}_3\} = \{\vec{0}\}$$

d'où

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ u_1 + p\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Pour la chaîne continue fermée (S_0) − (S_1) − (S_3) − nous avons :

$$\{\mathcal{V}_1\} + \{\mathcal{V}_4\} + \{\mathcal{V}_5\} = \{\vec{0}\}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\alpha_4 + \alpha_5 = 0 \\ &u_1 = 0 \\ &v_4 + v_5 = 0 \\ &w_4 + w_5 = 0. \end{aligned}$$

Les six équations écrites sont indépendantes ($r_C = 6$ nombre d'inconnues cinématiques introduit par les lia est : $N_C = 1 + 1 + 1 + 3 + 3 = 9$.
Par suite le degré de mobilité de la chaîne complex $m = 9 - 6$, soit

$$\boxed{m = 3.}$$

Ce degré de mobilité correspond aux trois compos de mouvement de (S_3) par rapport à (S_0).
Le degré d'hyperstatisme de la chaîne complexe est $h = m + 6\gamma - N_C = 3 + 12 - 9$, soit

$$\boxed{h = 6.}$$

QUESTION 3

Par une étude statique déterminer les inconnues hype ques du mécanisme. A quelles conditions dimensionnel angulaires de position relative des liaisons correspo elles?

RÉPONSE

Définissons les torseurs statiques des liaisons au po dans la base de R.

$$\{\mathcal{T}(S_0 \longrightarrow S_1\} = \{\mathcal{T}_1\} = {}_O\begin{Bmatrix} 0 & L_1 \\ Y_1 & M_1 \\ Z_1 & N_1 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\} = \{\mathcal{T}_2\} = {}_O\begin{Bmatrix} X_2 & -pX_2 \\ Y_2 & M_2 \\ Z_2 & N_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{T}(S_2 \longrightarrow S_0)\} = \{\mathcal{T}_3\} = {}_O\begin{Bmatrix} X_3 & 0 \\ Y_3 & M_3 \\ Z_3 & N_3 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_3)\} = \{\mathcal{T}_4\} = {}_O\begin{Bmatrix} X_4 & 0 \\ 0 & M_4 \\ 0 & N_4 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{T}(S_3 \longrightarrow S_0)\} = \{\mathcal{T}_5\} = {}_O\begin{Bmatrix} X_5 & 0 \\ 0 & M_5 \\ 0 & N_5 \end{Bmatrix}.$$

Supposons que s'exerce sur la pièce (S_2) une mécanique d'entrée du mécanisme définie par le to

$$\{\mathcal{T}_e\} = {}_O\begin{Bmatrix} X_e & L_e \\ Y_e & M_e \\ Z_e & N_e \end{Bmatrix}$$

supposons également que s'exerce sur la pièce (S action mécanique de sortie du mécanisme définie torseur :

$$\{\mathcal{T}_s\} = {}_O\begin{Bmatrix} X_s & L_s \\ Y_s & M_s \\ Z_s & N_s \end{Bmatrix}.$$

Appliquons le principe fondamental de la statique à :

$$(S_0) : \quad \{\mathcal{T}_3\}+\{\mathcal{T}_5\}-\{\mathcal{T}_1\}=\{\vec{0}\}.$$

d'où

$$\begin{aligned} X_3 + X_5 \quad &= 0 \\ Y_3 \quad - Y_1 &= 0 \\ Z_3 \quad - Z_1 &= 0 \\ - L_1 &= 0 \\ M_3 + M_5 - M_1 &= 0 \\ N_3 + N_5 - N_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$(S_1) : \quad \{\mathcal{T}_1\}-\{\mathcal{T}_2\}-\{\mathcal{T}_4\}=\{\vec{0}\}$$

d'où

$$\begin{aligned} - X_2 \quad - X_4 &= 0 \\ Y_1 - Y_2 \quad &= 0 \\ Z_1 - Z_2 \quad &= 0 \\ L_1 + pX_2 \quad &= 0 \\ M_1 - M_2 - M_4 &= 0 \\ N_1 - N_2 - N_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$(S_2) : \quad \{\mathcal{T}_2\}-\{\mathcal{T}_3\}+\{\mathcal{T}_e\}=\{\vec{0}\}$$

d'où

$$\begin{aligned} X_2 - X_3 + X_e &= 0 \\ Y_2 - Y_3 + Y_e &= 0 \\ Z_2 - Z_3 + Z_e &= 0 \\ -pX_2 \quad + L_e &= 0 \\ M_2 - M_3 + M_e &= 0 \\ N_2 - N_3 + N_e &= 0. \end{aligned}$$

REMARQUE

Il est inutile d'appliquer le principe fondamental de la statique à (S_3), les équations obtenues pouvant se déduire de celles déjà trouvées.

En examinant les dix-huit équations on en déduit que les six inconnues hyperstatiques sont :

Y_1 ou Y_2 ou Y_3
Z_1 ou Z_2 ou Z_3
M_2 ou M_3
M_1 ou M_4 ou M_5
N_2 ou N_3
N_1 ou N_4 ou N_5.

Les inconnues hyperstatiques Y_1 ou Y_2 ou Y_3 et Z_1 ou Z_2 ou Z_3 correspondent à des conditions dimensionnelles de distance, suivant $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$, entre les axes des liaisons (L_1), (L_2) et (L_3).

Les inconnues hyperstatiques M_2 ou M_3 et N_2 ou N_3 correspondent à des conditions angulaires de parallélisme, autour de $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$, entre les axes des liaisons (L_2) et (L_3).

Les inconnues hyperstatiques M_1 ou M_4 ou M_5 et N_1 ou N_4 ou N_5 correspondent à des conditions angulaires de parallélisme, autour de $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$, entre les normales aux plans des liaisons (L_4) et (L_5) et l'axe de la liaison (L_1).

À SAVOIR

1. Liaisons en parallèle

Le torseur statique de la liaison équivalente est tel que :

$$\{\mathcal{T}_e\} = \sum \{\mathcal{T}_i\}$$

Le torseur cinématique de la liaison équivalente vérifie :

$$\{\mathcal{V}_e\} = \{\mathcal{V}_1\} = \{\mathcal{V}_2\} = \dots = \{\mathcal{V}_n\}$$

La liaison équivalente a pour :
— degré d'hyperstatisme : [illegible]
— degré de mobilité : [illegible]

2. Liaisons en série

Le torseur statique de la liaison équivalente vérifie :

$$\{\mathcal{T}_e\} = \{\mathcal{T}_1\} = \{\mathcal{T}_2\} = \dots = \{\mathcal{T}_n\}$$

Le torseur cinématique de la liaison équivalente est tel que :

$$\{\mathcal{V}_e\} = \sum \{\mathcal{V}_i\}$$

La liaison équivalente est isostatique et a pour degré de mobilité m_c (nombre d'inconnues cinématiques indépendantes de son torseur cinématique).

Le degré de mobilité interne m_i de la chaîne continue ouverte est tel que :

$$\sum N_c = m_c + m_i$$

3. Chaîne continue fermée

Les torseurs cinématiques des $(k+1)$ liaisons de la chaîne continue fermée vérifient la relation :

$$\sum \{\mathcal{V}_i\} = \{0\}$$

La chaîne continue fermée a pour :
— degré de mobilité : [illegible]
— degré d'hyperstatisme : $h = m + 6 - N_c$

4. Chaîne complexe

Le nombre de chaînes continues fermées indépendantes à étudier est : $\gamma = L - n + 1$. La chaîne complexe a pour :
— degré de mobilité : [illegible]
— degré d'hyperstatisme : $h = m + 6\gamma - N_c$

PROBLÈME RÉSOLU

Le robot de manutention représenté *figure 18* est utilisé pour le déplacement de pièces d'un poste de travail (T_1) à un poste de travail (T_2).

Soit R(O, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) un repère lié au bâti (S_0) d robot. La glissière (S_2) a deux liaisons piv glissant (L_1) et (L_2) d'axes (H, $\vec{x}$) et (K, $\vec{x}$) ave

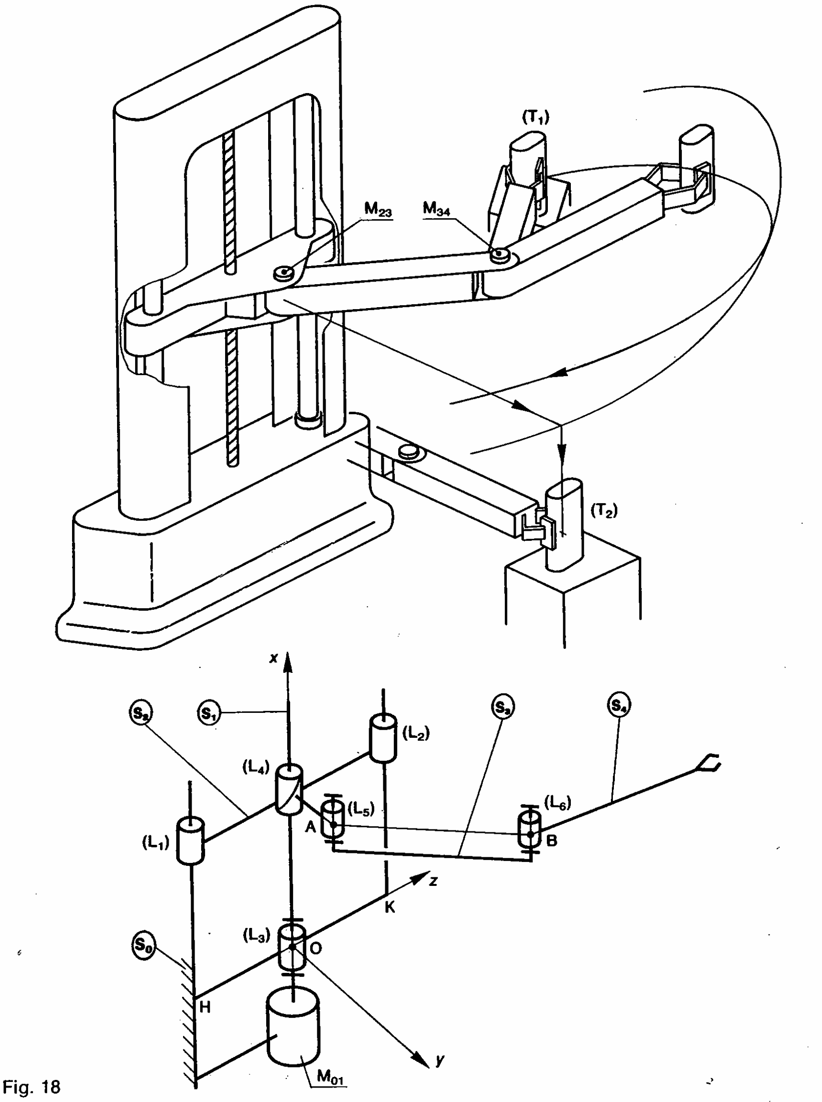

(T₁)
M₂₃
M₃₄
(T₂)
x
S₂
S₁
(L₂)
(L₄)
(L₅)
A
(L₁)
S₃
S₄
(L₆)
B
z
K
(L₃)
O
S₀
H
y
M₀₁

Fig. 18

(S_0), telles que : $\overrightarrow{OH} = -l\vec{z}$ et $\overrightarrow{OK} = l\vec{z}$ $(l > 0)$.
La glissière (S_2) est entraînée par une vis (S_1) ayant une liaison pivot (L_3) d'axe $(O, \vec{x})$ avec (S_0), et une liaison glissière hélicoïdale (L_4) d'axe $(O, \vec{x})$ et de pas réduit p avec (S_2). Cette vis est animée par un moteur (M_{O1}) lié au bâti (S_0).
Le bras (S_3) a une liaison pivot (L_5) d'axe $(A, \vec{x})$ avec la glissière (S_2).
Le bras (S_4) a une liaison pivot (L_6) d'axe $(B, \vec{x})$ avec le bras (S_3). A son extrémité est fixée la pince de serrage.
Les rotations des bras sont obtenues par deux moteurs (M_{23}) et (M_{34}).

QUESTION 1

Tracer le graphe des liaisons entre les pièces (S_0), (S_1) et (S_2).

RÉPONSE

Le graphe des liaisons se trace ainsi :

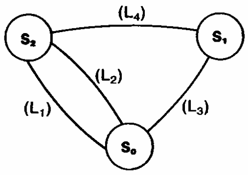


Fig. 19

QUESTION 2

Quel est le degré d'hyperstatisme de la liaison équivalente aux deux liaisons en parallèle (L_1) et (L_2) entre (S_0) et (S_2)? Quelles sont les inconnues hyperstatiques? A quelles conditions géométriques de position relative des liaisons correspondent-elles?

RÉPONSE

Les torseurs statiques des liaisons (L_1) et (L_2) sont aux points H et K respectivement, dans la base de R, de la forme :

$$\{\mathcal{T}_1\} = {}_H\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_1 & M_1 \\ Z_1 & N_1 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}_2\} = {}_K\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_2 & M_2 \\ Z_2 & N_2 \end{Bmatrix}$$

soit $$\{\mathcal{T}\} = {}_O\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$$

le torseur statique de la liaison équivalente.
Le torseur $\{\mathcal{T}\}$ est tel que :

$$\{\mathcal{T}\} = \{\mathcal{T}_1\} + \{\mathcal{T}_2\}.$$

En exprimant ces torseurs au même point O, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{gathered} X = 0 \\ Y = Y_1 + Y_2 \\ Z = Z_1 + Z_2 \\ L = lY_1 + lY_2 \\ M = M_1 + M_2 \\ N = N_1 + N_2. \end{gathered}$$

Comme $X = 0$ on vérifie que la liaison équivalente est une liaison glissière de direction $\vec{x}$.
Son degré d'hyperstatisme est : $l_i = N_S - r_S$.
Sachant que le nombre d'inconnues statiques introduit par les liaisons est $N_S = 8$, et que le nombre d'équations indépendantes du système écrit précédemment est $r_S = 5$, on en déduit que :

$$\boxed{h = 3.}$$

En examinant le système d'équations on constate que les inconnues hyperstatiques sont Z_1 ou Z_2, M_1 ou M_2, N_1 ou N_2.
Elles correspondent à une condition dimensionnelle de distance suivant $(O, \vec{z})$ et à deux conditions angulaires de parallélisme, autour de $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$, entre les axes des liaisons (L_1) et (L_2).

QUESTION 3

Quel est le degré d'hyperstatisme de la chaîne continue fermée (S_0)—(S_1)—(S_2)—(S_0) (en faisant abstraction du moteur (M_{O1}))?

RÉPONSE

Déterminons le degré d'hyperstatisme par une étude cinématique. Pour cela définissons les torseurs cinématiques des liaisons, en considérant la liaison équivalente entre (S_0) et (S_2).

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} = \{\mathcal{V}_3\} = {}_O\begin{Bmatrix} \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \{\mathcal{V}_4\} = {}_O\begin{Bmatrix} \alpha_4 & p\alpha_4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{V}(S_0/S_2)\} = \{\mathcal{V}_{02}\} = {}_O\begin{Bmatrix} 0 & u_{02} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

En écrivant que : $\{\mathcal{V}_{02}\} + \{\mathcal{V}_4\} + \{\mathcal{V}_3\} = \{\vec{0}\}$ on obtient les deux équations suivantes :

$$\begin{gathered} \alpha_4 + \alpha_3 = 0 \\ u_{02} + p\alpha_4 = 0. \end{gathered}$$

La mobilité de cette chaîne est : $m = N_C - r_C$, avec $N_C = 3$ et $r_C = 2$ (nombre d'équations indépendantes). Soit $m = 1$. Par suite le degré d'hyperstatisme de la chaîne continue fermée (S_0)—(S_1)—(S_2)—(S_0) est :

$$h = m + 6 - N_C$$

soit $$\boxed{h = 4.}$$

En sachant que la liaison entre (S_0) et (S_2) est elle-même hyperstatique d'ordre 3.

QUESTION 4

Déterminer les inconnues hyperstatiques de la chaîne continue fermée (S_0) — (S_1) — (S_2) — (S_0).
A quelles conditions géométriques de position relative des liaisons correspondent-elles?
Proposer une modification de la liaison (L_4) pour rendre le mécanisme isostatique et ainsi minimiser l'incidence des actions mécaniques supportées par la vis (S_1).

RÉPONSE

Définissons au point O, dans la base de R, les torseurs statiques des liaisons, en considérant la liaison équivalente entre (S_0) et (S_2).

$$\{\mathcal{T}(S_0 \longrightarrow S_1)\} = \{\mathcal{T}_3\} = {}_O\left\{\begin{matrix} X_3 & 0 \\ Y_3 & M_3 \\ Z_3 & N_3 \end{matrix}\right\}$$

$$\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\} = \{\mathcal{T}_4\} = {}_O\left\{\begin{matrix} X_4 & -pX_4 \\ Y_4 & M_4 \\ Z_4 & N_4 \end{matrix}\right\}$$

$$\{\mathcal{T}(S_2 \longrightarrow S_0)\} = \{\mathcal{T}_{O2}\} = {}_O\left\{\begin{matrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{matrix}\right\}.$$

Considérons que sur le mécanisme s'exerce :

— une action mécanique d'entrée sur la pièce (S_1), définie par le torseur :

$$\{\mathcal{T}_e\} = {}_O\left\{\begin{matrix} X_e & L_e \\ Y_e & M_e \\ Z_e & N_e \end{matrix}\right\}$$

— une action mécanique de sortie sur la pièce (S_2), définie par le torseur :

$$\{\mathcal{T}_S\} = {}_O\left\{\begin{matrix} X_s & L_s \\ Y_s & M_s \\ Z_s & N_s \end{matrix}\right\}.$$

Appliquons le principe fondamental de la statique à :

- (S_1) : $\{\mathcal{T}_3\} - \{\mathcal{T}_4\} + \{\mathcal{T}_e\} = \{\vec{0}\}$

d'où

$$\begin{aligned} X_3 - X_4 + X_e &= 0 \\ Y_3 - Y_4 + Y_e &= 0 \\ Z_3 - Z_4 + Z_e &= 0 \\ pX_4 + L_e &= 0 \\ M_3 - M_4 + M_e &= 0 \\ N_3 - N_4 + N_e &= 0. \end{aligned}$$

- (S_2) : $\{\mathcal{T}_4\} - \{\mathcal{T}_{02}\} + \{\mathcal{T}_s\} = \{\vec{0}\}$

d'où

$$\begin{aligned} X_4 \quad + X_s &= 0 \\ Y_4 - Y + Y_s &= 0 \\ Z_4 - Z + Z_s &= 0 \\ pX_4 - L + L_s &= 0 \\ M_4 - M + M_s &= 0 \\ N_4 - N + N_s &= 0. \end{aligned}$$

En examinant ces équations on constate que l quatre inconnues hyperstatiques sont :

$$\begin{matrix} Y_3 & \text{ou} & Y_4 & \text{ou} & Y \\ Z_3 & \text{ou} & Z_4 & \text{ou} & Z \\ M_3 & \text{ou} & M_4 & \text{ou} & M \\ N_3 & \text{ou} & N_4 & \text{ou} & N. \end{matrix}$$

Ces inconnues hyperstatiques correspondent des conditions dimensionnelles de distance et des conditions angulaires de parallélisme ent les axes des différentes liaisons.
Le mécanisme devient isostatique si, p exemple, on modifie la liaison (L_4) de telle faç que Y_4, Z_4, M_4 et N_4 soient nulles.
L'écrou de la liaison (L_4) doit donc êt «flottant», c'est-à-dire avoir des possibilités translation et de rotation suivant $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z}$
D'où le schéma cinématique de la liaison (L proposé *figure 20.*

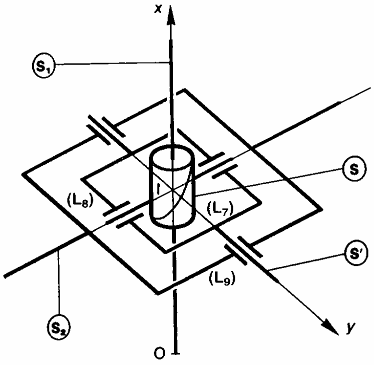


Fig. 20

On a intercalé en série entre (S_1) et (S_2) de pièces intermédiaires (S) et (S'), avec les liais suivantes :
Liaison (L_7) entre (S_1) et (S) : glissière hélic dale d'axe $(O, \vec{x})$.
Liaison (L_8) entre (S) et (S') : pivot gliss d'axe $(I, \vec{z})$ (I : point de l'axe $(O, \vec{x})$).
Liaison (L_9) entre (S') et (S_2) : pivot gliss d'axe $(I, \vec{y})$.
Vérifions par une étude cinématique que c association de liaisons en série convient.

Le torseur cinématique de la liaison équivalente entre (S_1) et (S_2) est égal à :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \{\mathcal{V}(S_2/S')\} + \{\mathcal{V}(S'/S)\} + \{\mathcal{V}(S/S_1)\}.$$

Les torseurs cinématiques des liaisons (L_7), (L_8) et (L_9) sont au point I, dans la base de R, de la forme :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S')\} = {}_{I}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_9 & v_9 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{V}(S'/S)\} = {}_{I}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \gamma_8 & w_8 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{V}(S/S_1)\} = {}_{I}\begin{Bmatrix} \alpha_7 & p\alpha_7 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}.$$

Posons : $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = {}_{I}\begin{Bmatrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{Bmatrix}.$

Alors :

$\alpha = \alpha_7$

$\beta = \beta_9$

$\gamma = \gamma_8$

$u = p\alpha_7$

$v = v_9$

$w = w_8.$

Par conséquent, le torseur cinématique de la liaison équivalente est au point I de la forme :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = {}_{I}\begin{Bmatrix} \alpha & p\alpha \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{Bmatrix}.$$

Ce torseur s'écrit au point O, en posant $\overrightarrow{OI} = x\vec{x}$:

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \alpha & p\alpha \\ \beta & v - \gamma x \\ \gamma & w + \beta x \end{Bmatrix}$$

c'est-à-dire de la forme :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \alpha & p\alpha \\ \beta & \lambda \\ \gamma & \mu \end{Bmatrix}.$$

Les inconnues cinématiques α, β, γ, λ et μ étant indépendantes.

Par suite, le torseur statique de la liaison équivalente, réciproque de celui-ci, est de la forme :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} X_4 & -pX_4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}.$$

Par conséquent, la liaison (L_4) ainsi modifiée rend la chaîne continue fermée

$$(S_0) - (S_1) - (S_2) - (S_0)$$

isostatique. (La liaison entre (S_0) et (S_2) étant toujours hyperstatique.)

CONSEILS POUR LA RESOLUTION

1. Pour faciliter les calculs et l'interprétation des résultats, choisir soigneusement le point et la base où seront exprimés les torseurs statiques et cinématiques des liaisons.

2. Toutes les caractéristiques d'une liaison équivalente à plusieurs liaisons en *parallèle* s'obtiennent facilement par une étude statique (torseur statique, degré d'hyperstatisme, degré de mobilité, inconnues hyperstatiques).

3. Une étude cinématique donne rapidement le torseur cinématique, et par conséquent le torseur statique, de la liaison équivalente à plusieurs liaisons en *série*, et met en évidence les mobilités internes.

4. Pour traiter une chaîne continue fermée il est parfois plus simple de remplacer plusieurs liaisons par leur liaison équivalente, et de chercher d'abord les caractéristiques de la liaison équivalente avant d'étudier les liaisons qui la compose.

Pour déterminer le degré d'hyperstatisme d'une chaîne continue fermée une étude cinématique est beaucoup plus simple qu'une étude statique, car elle ne fait intervenir au maximum que six équations. C'est seulement si l'on veut localiser les inconnues hyperstatiques qu'il faut aborder une étude statique.

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 — Une bride de serrage, d'un montage d'usinage (0) conçue pour répartir également l'action mécanique de bridage en trois points A, B et C d'une pièce (1) est représentée *figure 21*
La pièce (4) de la bride et le montage d'usinage (0) ont une liaison pivot (L_6) d'axe Δ.
La pièce (3) a une liaison pivot (L_5) d'axe $(O, \vec{x})$ avec la pièce (4), et la pièce (2) une liaison pivot (L_4) d'axe $(O, \vec{y})$ avec la pièce (3).

La pièce (1) a une liaison ponctuelle (L_1) de normale $(A, \vec{z})$ avec la pièce (3).

On pose : $\overrightarrow{OA} = -a\vec{y} - h\vec{z}$ (a et $h > 0$).

La pièce (1) a également deux liaisons ponctuelles (L_2) et (L_3) de normale $(B, \vec{z})$ et $(C, \vec{z})$ avec la pièce (2).

On pose : $\begin{cases} \overrightarrow{OB} = b\vec{x} + c\vec{y} - h\vec{z} \\ \overrightarrow{OC} = -b\vec{x} + c\vec{y} - h\vec{z} \ (b \text{ et } c > 0). \end{cases}$

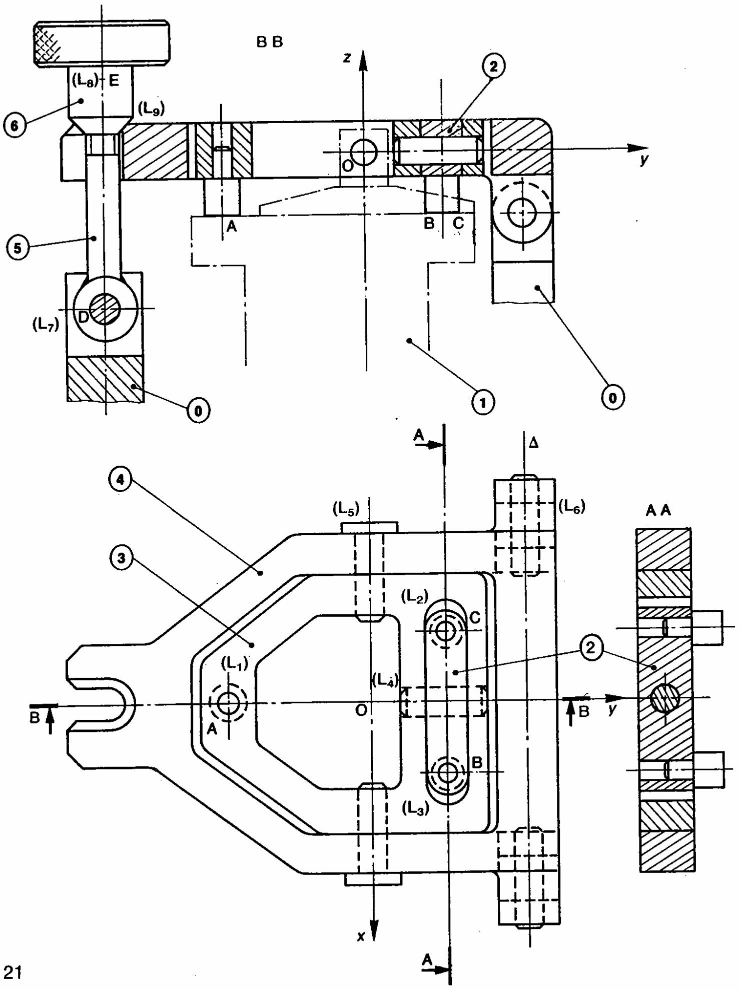


Fig. 21

Le système de maintien du contact est constitué d'un boulon d'axe $(D, \vec{z})$ dont la tige (5) a une liaison pivot glissant (L_7) d'axe $(D, \vec{x})$ avec le montage (0), et dont l'écrou (6) a une liaison linéique annulaire (L_9) d'axe $(E, \vec{y})$ avec la pièce (4). On pose : $\overrightarrow{DE} = d\vec{z}$ $(d > 0)$. L'écrou (6) et la tige (5) du boulon ont une liaison glissière hélicoïdale (L_8) d'axe $(D, \vec{z})$. L'action mécanique exercée sur l'écrou par l'opérateur est supposée connue.

QUESTIONS

1° Tracer le graphe des liaisons entre la pièce (1) et la pièce (4).

2° Déterminer, par une étude statique, la liaison équivalente (L_{12}) aux deux liaisons en parallèle (L_2) et (L_3) entre les pièces (1) et (2).

3° Déterminer, par une étude cinématique, la liaison équivalente (L_{123}) aux deux liaisons en série (L_{12}) et (L_4) entre les pièces (1) et (3).

4° Déterminer, par une étude statique, la liaison équivalente aux deux liaisons en parallèle (L_{123}) et (L_1) entre les pièces (1) et (3).
En déduire la liaison équivalente aux liaisons entre la pièce (1) et la pièce (4).

5° Déterminer la liaison équivalente aux trois liaisons en série (L_7), (L_8) et (L_9) entre le montage (0) et la pièce (4) du système de mantien du contact.

6° Montrer que la liaison entre la pièce (1) et le montage (0) par l'intermédiaire de la bride de serrage est équivalente à une liaison libre (c'est-à-dire que la bride de serrage peut s'adapter sur la pièce (1) quelle que soit sa position).

RÉPONSES

1° Le graphe des liaisons entre les pièces (1) et (4) se trace ainsi :

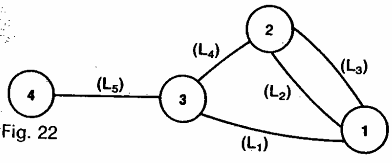


Fig. 22

2° La liaison équivalente aux deux liaisons (L_2) et (L_3) est une liaison linéique rectiligne d'axe $(B, \vec{x})$ et de normale $\vec{z}$.

3° La liaison équivalente aux deux liaisons (L_{12}) et (L_4) est une liaison ponctuelle de normale $(I, \vec{z})$ (I milieu de BC).

4° La liaison équivalente aux deux liaisons (L_{123}) et (L_1) est une liaison linéique rectiligne d'axe $(A, \vec{y})$ et de normale $\vec{z}$.
La liaison équivalente aux liaisons entre la pièce (1) et la pièce (4) est une liaison ponctuelle de normale $(O, \vec{z})$.

5° La liaison équivalente aux trois liaisons en série (L_7), (L_8) et (L_9) entre le montage (0) et la pièce (4) est une liaison libre.

6° Compte tenu des résultats précédents, on montre par une étude de liaisons en série entre les pièces (0), (4) et (1), que la liaison entre la pièce (1) et le montage (0) est équivalente à une liaison libre (voir graphe des liaisons de la *figure 23*).

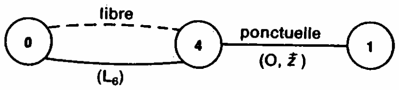


Fig. 23

2 — Le guidage d'un coulisseau au moyen de deux rails avec cages à aiguilles est représenté *figure 24*.

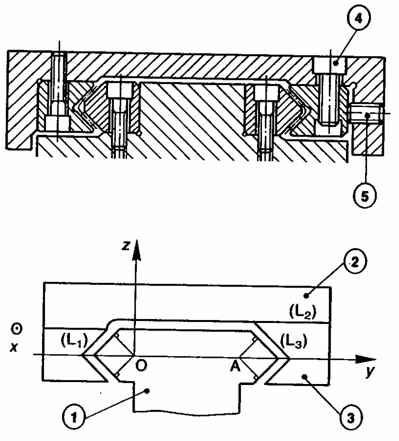


Fig. 24

Le but de l'étude est de déterminer le degré d'hyperstatisme d'une telle conception.
Les aiguilles étant de faible longueur, on considère que la liaison (L_1) réalisée entre le coulisseau (2) et le guide (1), par l'intermédiaire du rail de guidage, est équivalente à une liaison pivot glissant d'axe $(O, \vec{x})$, de très faible amplitude de rotation autour de cet axe.
De la même façon, on considère que la liaison (L_3) réalisée entre le coulisseau (2) et la cale (3) est équivalente à une liaison pivot glissant d'axe $(A, \vec{x})$, de très faible amplitude de rotation autour de cet axe.
On pose : $\overrightarrow{OA} = a\vec{y}$ $(a > 0)$.
L'effort de précontrainte dans la glissière est obtenu en positionnant la cale (3) avec les vis de réglage (5). Les vis (4) servent à maintenir la cale (3) dans sa position réglée.

(La cale (3) assure à la fois la mise en position et le maintien du contact dans la liaison glissière.)
La liaison (L_2) entre la cale (3) et le coulisseau (2) est une liaison appui plan de normale $\vec{z}$.
On suppose que les actions mécaniques exercées sur les vis (4) et (5) sont connues.
On suppose également que les liaisons entre le coulisseau (2) et la cale (3) réalisées par l'intermédiaire des vis (4) et (5) sont équivalentes à des liaisons libres.

QUESTIONS

1° Tracer le graphe des liaisons entre les pièces (1), (2), (3), (4) et (5).

2° A quelles conditions peut-on supposer que les liaisons entre le coulisseau (2) et la cale (3), réalisées par l'intermédiaire des vis (4) et (5), sont équivalentes à des liaisons libres?

3° Déterminer, par une étude cinématique, la liaison équivalente (L_{23}) aux deux liaisons en série (L_2) et (L_3) entre les pièces (1) et (2).

4° Déterminer, par une étude statique, le degré d'hyperstatisme de la liaison équivalente aux deux liaisons en parallèle (L_{23}) et (L_1) entre les pièces (1) et (2). A quelle condition géométrique de position relative des liaisons correspond l'inconnue hyperstatique?

RÉPONSES

1° Le graphe des liaisons se trace ainsi :

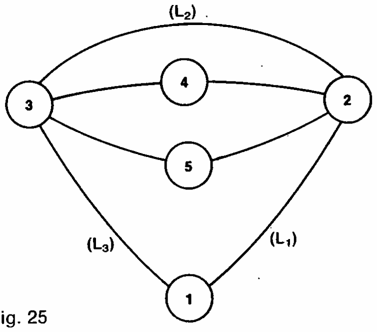


Fig. 25

2° Les liaisons entre le coulisseau (2) et la cale (3), réalisées par l'intermédiaire des vis (4) et (5), sont équivalentes à des liaisons libres si on suppose, par exemple, que la liaison entre la vis (5) et la cale (3) est modélisable par une liaison ponctuelle, ainsi que la liaison entre la vis (4) et le coulisseau (2). (L'association en série d'une liaison glissière hélicoïdale et d'une liaison ponctuelle de même axe donne une liaison libre.)

3° La liaison équivalente est une liaison linéique rectiligne d'axe $(A, \vec{x})$, de normale $\vec{z}$. (Écrire les deux torseurs cinématiques au point A.)

4° Écrire le torseur statique $\{\mathcal{T}_{23}\}$ au point A. Puis écrire ensuite au point O que le torseur statique de la liaison équivalente vérifie :

$$\{\mathcal{T}\}=\{\mathcal{T}_1\}+\{\mathcal{T}_{23}\}.$$

On en déduit que le degré d'hyperstatisme ($h = N_S - r_S$) de la liaison glissière équivalente est de 1.
L'inconnue hyperstatique (M_1 ou M_{23}) correspond à une condition angulaire de parallélisme autour de $(O, \vec{y})$ des axes des deux liaisons (L_1) et (L_3).

3 — Un montage de fraisage (1) conçu pour usiner le plan (P), à partir du brut, de la pièce (2) est schématisé *figure 26*.
Le but de l'étude est de vérifier que la liaison équivalente à l'ensemble des liaisons entre la pièce et le montage est complète et isostatique.
Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au montage (1). L'axe $(O, \vec{z})$ est dirigé suivant la verticale descendante. La mise en position de la pièce dans le montage est assurée par :
— Un vé court, réalisant avec la pièce une liaison linéique annulaire (L_1) d'axe $(C, \vec{x})$, telle que :

$$\overrightarrow{OC} = -a\vec{x} \quad (a>0).$$

— Une liaison ponctuelle (L_2) de normale $(B, \vec{z})$ telle que $\overrightarrow{OB} = -b\vec{x} + c\vec{z}$ (b et $c>0$).
— un centreur (3) ayant une liaison linéique annulaire (L_3) d'axe $(O, \vec{z})$ avec la pièce (2), et une liaison glissière (L_4) d'axe $(O_1, \vec{x})$ avec le montage (1), telle que : $\overrightarrow{OO_1} = -d\vec{z}$ (d>0).
— Un centreur (4) ayant une liaison linéique annulaire (L_5) d'axe $(O, \vec{z})$ avec la pièce (2), et une liaison glissière (L_6) d'axe $(O_2, \vec{x})$ avec le montage (1), telle que : $\overrightarrow{OO_2} = e\vec{z}$ ($e>0$).
— Un palonnier (5) ayant deux liaisons ponctuelles (L_7) et (L_8) de normales $(D_1, \vec{x})$ et $(D_2, \vec{x})$ avec la pièce (2), telles que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OD_1} = f\vec{x} + g\vec{y} - h\vec{z} \\ \overrightarrow{OD_2} = f\vec{x} + g\vec{y} + h\vec{z} \quad (f, g \text{ et } h>0). \end{cases}$$

Ce palonnier a une liaison pivot (L_9) d'axe $(A, \vec{y})$ ave le montage (1), telle que

$$\overrightarrow{OA} = i\vec{x} + g\vec{y} \qquad (i>0).$$

Une bride, en liaison ponctuelle de normale $(E, \vec{x})$ ave la pièce (2), assure le maintien de la pièce sur se appuis.

QUESTIONS

1° Tracer le graphe des liaisons de mise en position d la pièce (2) dans le montage (1).

2° Déterminer, par une étude cinématique, la liaiso équivalente aux deux liaisons en série (L_3) et (L_4) entr la pièce (2) et le montage (1).

**3° Déterminer, par une étude statique, la liaison équivalente aux deux liaisons en parallèle (L_7) et (L_8) entre pièce (2) et le palonnier (5).
En déduire la liaison équivalente partielle entre (1) (2), réalisée par l'intermédiaire du palonnier (5).**

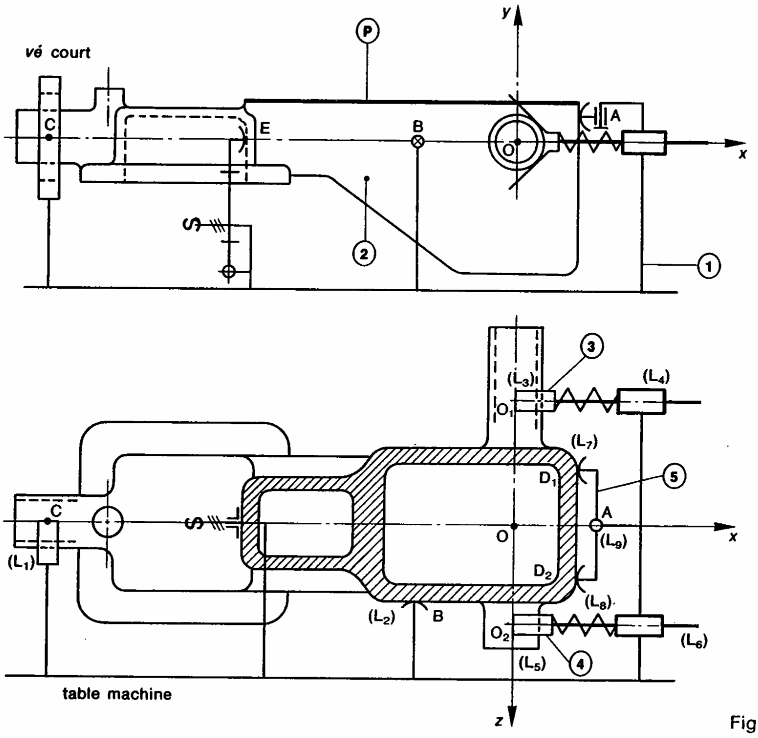


Fig. 26

4° Montrer que le système de bridage, représenté *figure 28*, réalise entre (1) et (2) une liaison équivalente à une liaison libre.

5° Montrer que la liaison équivalente à l'ensemble des liaisons entre la pièce (2) et le montage (1) est complète et isostatique.

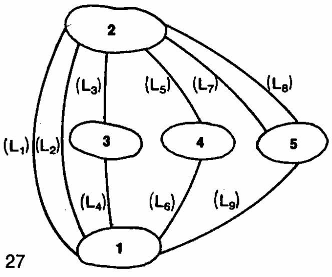


Fig. 27

RÉPONSES

1° Le graphe des liaisons de mise en position de (2) par rapport à (1) se trace ainsi (figure 27) :
2° La liaison équivalente aux deux liaisons en série (L_3) et (L_4) est une liaison ponctuelle de normale $(O_1, \vec{y})$.

3° La liaison équivalente aux deux liaisons en parallèle (L_7) et (L_8) est une liaison linéique rectiligne d'axe D_1D_2, de normale $\vec{x}$.
La liaison équivalente partielle entre (1) et (2) réalisée par l'intermédiaire du palonnier (5) est une liaison ponctuelle de normale $(A, \vec{x})$.

4° Pour montrer que le bridage est équivalent à une liaison libre, montrer d'abord que la liaison entre le montage (1) et la bride, par l'intermédiaire du goujon, est équivalente à une liaison libre, ensuite que les deux liaisons en série restantes entre (1) et (2) sont équivalentes à une liaison libre.

5° Avec les liaisons équivalentes mises en évidence dans les questions précédentes, on montre par une étude statique de liaisons en parallèle, que la liaison équivalente à l'ensemble des liaisons entre (1) et (2) est complète et isostatique.

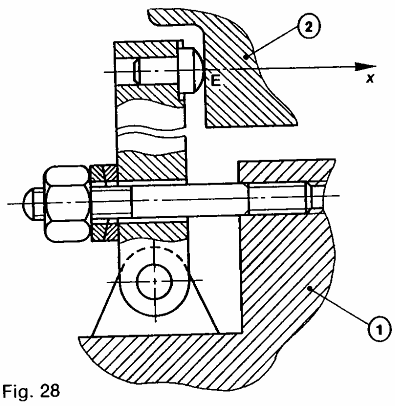


Fig. 28

(*) Un des déterminants principaux associé au système d'équations s'écrit :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ d & -e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 \end{vmatrix}$$

d'où $\Delta = -a(e+d)(a-b)$,

comme $a \neq b$, $\Delta \neq 0$ et $r_S = 6$.
Par suite

$$h = N_S - r_S = 0 \quad \text{et} \quad m = 6 - r_S = 0.$$

4 — On se propose d'améliorer le prototype de montage d'usinage à plateau tournant représenté sur la *figure 29*, et destiné à usiner la rainure de fraisage indiquée.

Le cycle d'usinage est le suivant :

1° Blocage pneumatique de la pièce sur le plateau (7).

2° Translation rectiligne du sous-ensemble $\{(2), (6), (7)\}$ commandée par le vérin (3) (liaison (2)-(8) non représentée).

3° Rotation du plateau (7) commandée par le vérin (6).

4° Retour rapide à la position initiale par action simultanée des deux vérins.

Les liaisons de ce mécanisme sont représentées sur le schéma cinématique de la *figure 30*.

(L_1) : liaison pivot glissant d'axe $(B, \vec{x}\,')$ entr
l'ensemble tige-piston (5) du vérin et le cylindr
(6).
(L_2) : liaison pivot d'axe $(B, \vec{z})$ entre le cylindre (6
et le coulisseau (2).
(L_3) : liaison pivot d'axe $(C, \vec{z})$ entre la tige (5) d
vérin et le plateau porte-pièce (7).
(L_4) : liaison pivot d'axe $(A, \vec{z})$ entre le plateau (7) e
le coulisseau (2).
(L_5) : liaison glissière d'axe $(D, \vec{y})$ entre le coulissea
(2) et le corps (4) du montage.
(L_6) : liaison pivot glissant d'axe $(D, \vec{y})$ entr
l'ensemble tige-piston (8) du vérin et l'ensembl
cylindre (3) - corps (4).
(L_7) : liaison entre la tige (8) et le coulisseau (2),
déterminer.

On pose :

$$\theta = (\vec{x}\,', \vec{u})$$
$$\overline{BC} = a\vec{x}\,' \quad (a > 0)$$
$$\overline{CA} = b\vec{u} \quad (b > 0).$$

QUESTIONS

1° Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme.

2° Déterminer le nombre de chaînes continues ferm indépendantes.

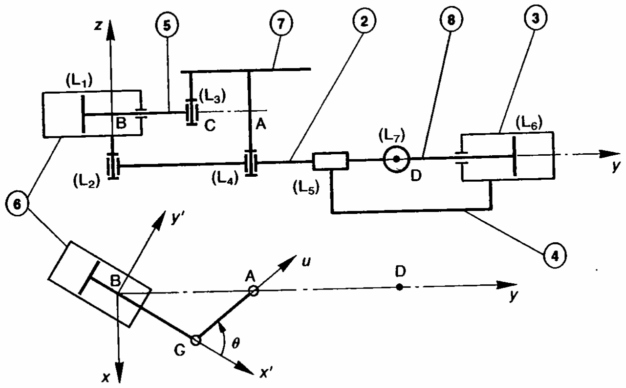


Fig. 30

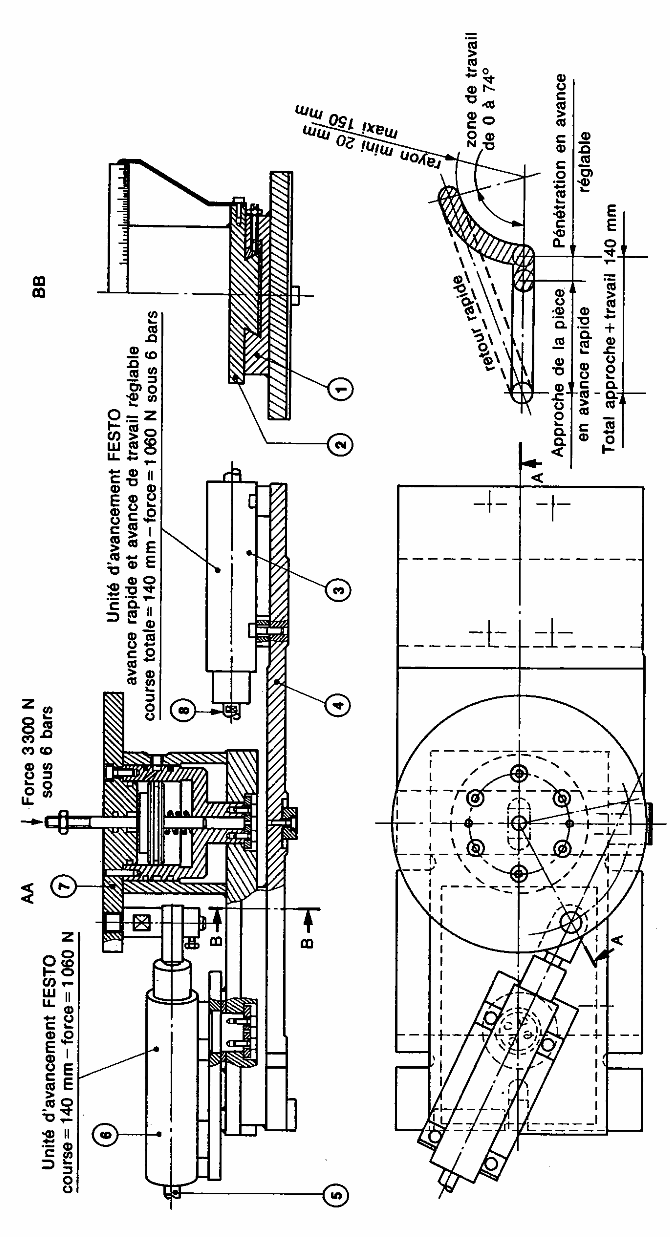

BB
AA
Force 3 300 N sous 6 bars
Unité d'avancement FESTO course = 140 mm – force = 1 060 N
Unité d'avancement FESTO avance rapide et avance de travail réglable course totale = 140 mm – force = 1 060 N sous 6 bars
①
②
③
④
⑤
⑥
⑦
⑧
B
B
A
A
rayon mini 20 mm
maxi 150 mm
zone de travail de 0 à 74°
retour rapide
Pénétration en avance réglable
Approche de la pièce en avance rapide
Total approche + travail 140 mm

Fig. 29

3° Étude de la chaîne continue fermée

(2) — (4) — (8).

***a*) Déterminer la liaison équivalente (L_{56}) aux deux liaisons en série (L_5) et (L_6) entre les pièces (2) et (8).**

***b*) Déterminer au point D, le torseur statique de la liaison (L_7), pour que la liaison équivalente aux deux liaisons en parallèle (L_{56}) et (L_7) entre les pièces (2) et (8) soit une liaison pivot isostatique d'axe $(D, \vec{y})$ (on admet une rotation de la tige (8) autour de son axe).**

***c*) Faire le croquis d'une solution technologique de la liaison (L_7) répondant à la question précédente.**

4° Étude de la chaîne continue fermée

(7) — (5) — (6) — (2).

***a*) Déterminer par une étude cinématique le degré d'hyperstatisme de la chaîne continue fermée.**

***b*) Afin de rendre cette chaîne isostatique, la liaison (L_3) sera modifiée.**
Déterminer alors par une étude statique, les inconnues hyperstatiques relatives à cette liaison.

***c*) Faire le croquis d'une solution technologique de la liaison (L_3) rendant la chaîne isostatique (on admet une rotation de la tige (5) autour de son axe).**

RÉPONSES

1° Le graphe des liaisons se trace ainsi :

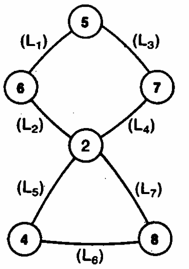


Fig. 31

2° Le nombre de chaînes continues fermées indépendantes est : $\gamma = l - n + 1$. Avec $l = 7$ et $n = 6$, $\gamma = 2$.

3° *a*) Le torseur cinématique de la liaison équivalente (L_{56}) est de la forme, au point D, dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\{\mathcal{V}_{56}\} = {}_{D}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \beta & v \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

b) Le torseur statique de la liaison (L_7) est de la forme, au point D, dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\{\mathcal{T}_7\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_7 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

torseur correspondant à une liaison ponctuelle normale $(D, \vec{y})$.

REMARQUE

Le degré d'hyperstatisme d'une chaîne conti
fermée est : $h = m + 6 - N_C$. Si on admet
rotation de la tige (8) autour de son axe, la mob
de la chaîne (2)—(4)—(8) est : $m = 2$.
Le nombre d'inconnues cinématiques introduit
les liaisons est $N_C = n_{C_5} + n_{C_6} + n_{C_7}$, avec $n_{C_5} =$
$n_{C_6} = 2$.
Par suite si la chaîne est isostatique; $h = 0$
$n_{C_7} = 5$.
La liaison (L_7) est donc à cinq degrés de libe
Cette information permet de guider le choix ver
solution convenable.

c) La liaison (L_7) peut-être obtenue par association
série d'une liaison rotule et d'une liaison appui pl

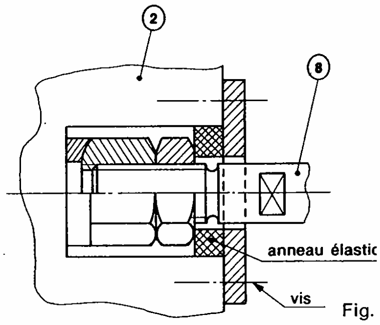


Fig.

4° *a*) Le degré d'hyperstatisme de la chaîne conti
fermée est : $h = 2$.
Pour traiter simplement cette question, ainsi qu
suivante, exprimer tous les torseurs au point C, d
la base $(\vec{x}', \vec{y}', \vec{z})$.

b) Posons

$$\{\mathcal{T}(5 \longrightarrow 7)\} = \{\mathcal{T}_3\} = {}_{C}\begin{Bmatrix} X_3 & L_3 \\ Y_3 & M_3 \\ Z_3 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}', \vec{y}', \vec{z})}$$

les deux inconnues hyperstatiques sont Z_3 et M_3.

c) La liaison (L_3) peut-être obtenue par associatio
série d'une liaison rotule et d'une liaison pivot glissa

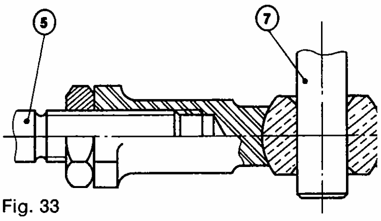


Fig. 33

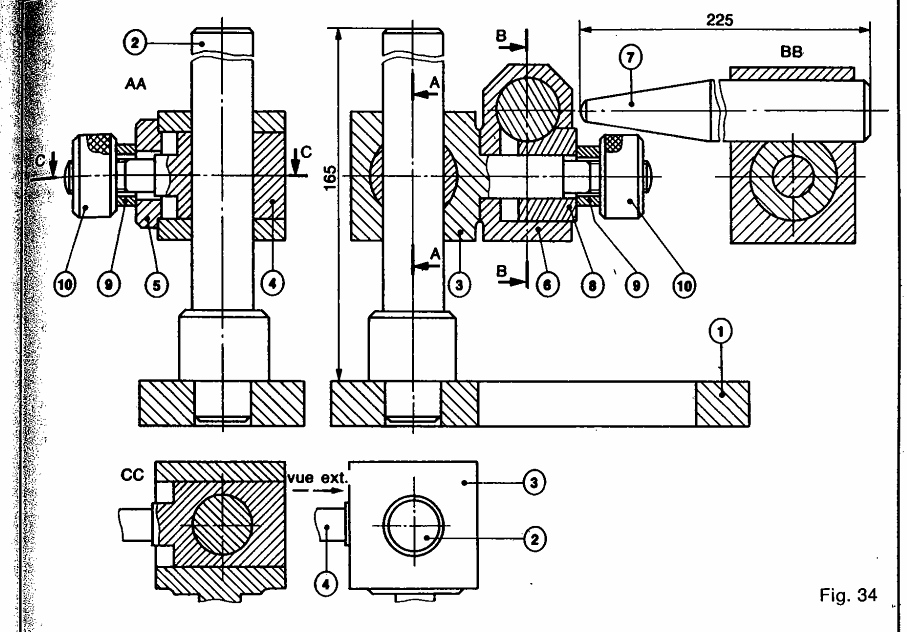


Fig. 34

5 — La *figure 34* représente le dessin d'ensemble d'une butée pour table de fraiseuse.
La pièce à usiner vient buter sur l'extrémité (7), réglée pour assurer à une série de pièces une cote de fabrication ayant pour origine le point d'appui.
Pour que les dispersions sur cette cote soient acceptables, il est nécessaire que la butée n'évolue pas en position en cours d'usinage sous l'effet d'actions mécaniques variables et de vibrations. Pour éviter cela, on peut envisager deux solutions :

1° Remplaçer les écrous moletés (10) par des écrous hexagonaux manœuvrés à la clé, pour créer des actions mécaniques suffisantes sur les pièces internes de l'appareil. Cette solution à l'inconvénient de rendre difficilement maîtrisable une légère modification de la position de la butée, nécessaire pour un réglage.

2° La construction proposée est très hyperstatique et malgré la qualité de la fabrication, il est probable qu'au montage des premiers ensembles il faudra prévoir des modifications augmentant certains jeux, qui seront préjudiciables à l'appareil car ils augmenteront la dispersion de la butée.
Une deuxième solution consiste donc à envisager une construction isostatique, pour localiser les contacts, et en simplifier la fabrication.

QUESTION

Pour chacune des liaisons : (2)—(3), (2)—(4), (3)—(4), (3)—(6), (6)—(7), (7)—(8), (6)—(8) et (9)—(10), proposer une solution afin de rendre la liaison isostatique.

REMARQUE

Dans cet exercice il vous est demandé d'adapter l'étude théorique du cours à des problèmes concrets de construction.

RÉPONSES

— *Liaison (2)—(3).*
Ce guidage en rotation avec jeu se comporte en réalité comme une linéique rectiligne suivant une génératrice de contact. Pour pallier cette insuffisance la *figure 35* montre que quatre appuis surfaciques ont été réalisés par un léger fraisage à l'opposé de la poussée de (4).

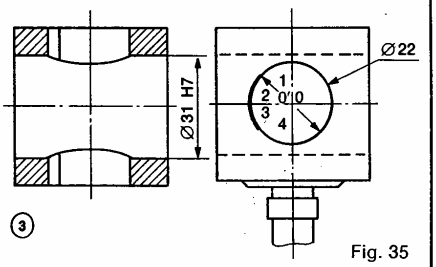


Fig. 35

— *Liaison (2)—(4).*
La *figure 36* montre que quatre appuis surfaciques ont été réalisés en créant un évidement, et par un léger fraisage.

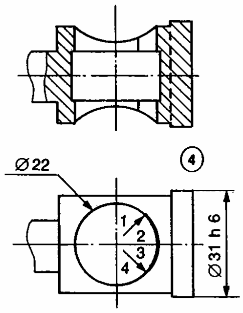


Fig. 36

— *Liaison (3)—(4)*
Afin que la liaison pivot glissant (2)—(4) soit prépondérante, même lorsque des défauts de perpendicularité existent entre le cylindre extérieur et l'alésage de (4), la liaison entre (3) et (4) doit être une linéique annulaire *(figure 36).*

— *Liaison (3)—(6)*
Cette liaison pivot est réalisée par l'association en parallèle d'un appui plan et d'un pivot glissant. Elle est donc hyperstatique d'ordre 2. La *figure 37* propose une solution de liaison isostatique où la liaison pivot glissant a été remplacée par une liaison linéique annulaire ($l = 0{,}2d$).

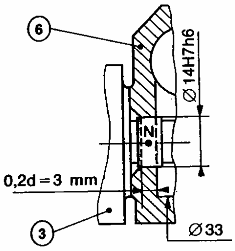


Fig. 37

— *Liaison (6)—(7)*
De même que pour la liaison (2)—(4), quatre appui surfaciques ont été réalisés en créant un évidement e par un léger fraisage.

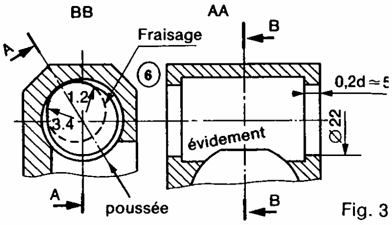


Fig. 3

— *Liaison (7)—(8) et liaison (6)—(8)*
Un méplat a été réalisé sur la pièce (8) de manière créer une liaison linéique rectiligne entre (7) et (8). U plat et deux rainures localisent quatre contacts afi d'obtenir une liaison pivot glissant.

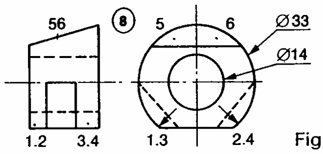


Fig. 3

— *Liaison (9)—(10)*
La *figure 40* montre que l'appui plan entre la rondel (9) et l'écrou (10) a été remplacé par une rotule, manière à rendre prépondérant l'appui plan entre (et (9).

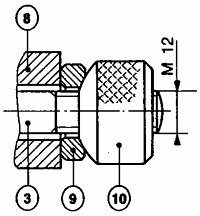


Fig. 4

EXERCICES SANS RÉPONSE

— La *figure 41* représente le dessin d'ensemble d'une table d'affuteuse. Trois liaisons glissière d'axe $(A, \vec{z})$, $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{x})$ assurent le déplacement de la table (11) par rapport au bâti.

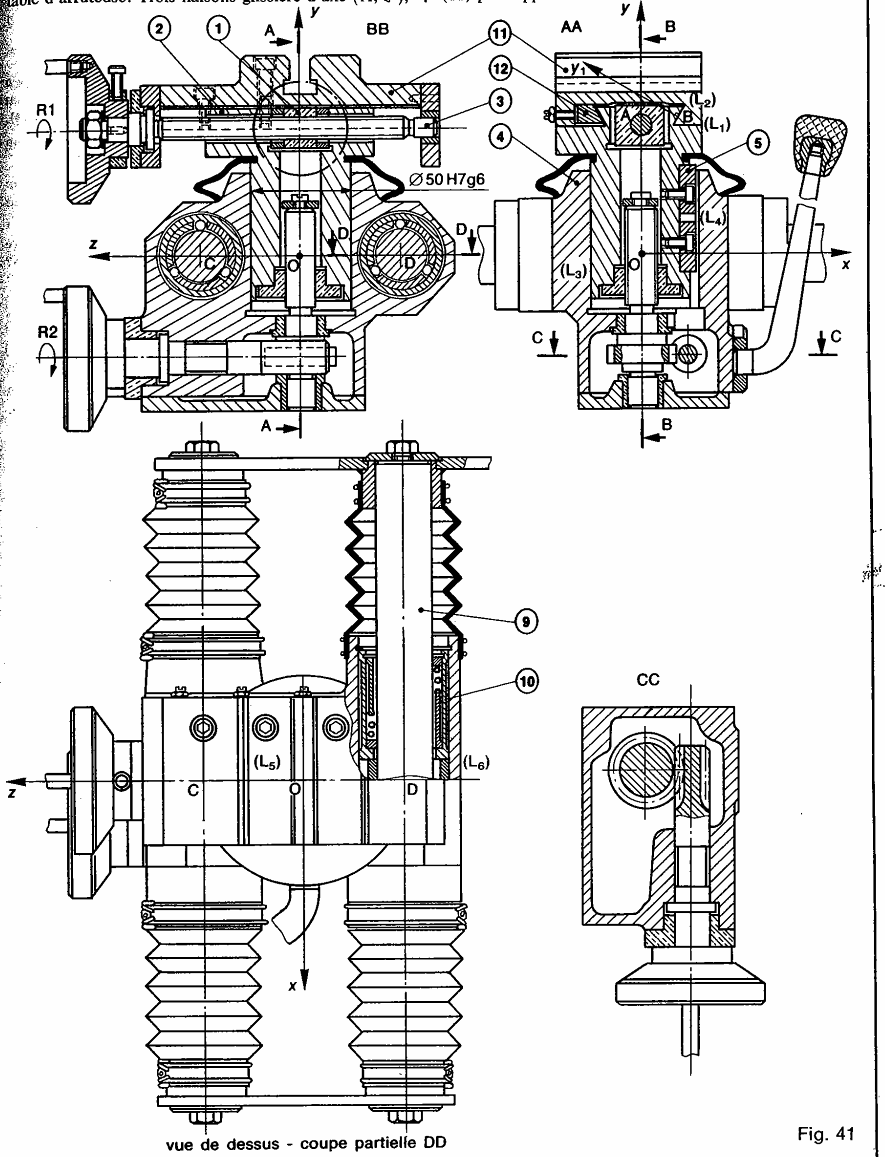

①
②
③
④
⑤
⑨
⑩
⑪
⑫
A
y
BB
AA
B
R1
R2
Ø50 H7g6
z
x
C
O
D
y_1
(L₁)
(L₂)
(L₃)
(L₄)
(L₅)
(L₆)
CC
vue de dessus - coupe partielle DD

Fig. 41

La liaison glissière d'axe $(A, \vec{z})$ entre la table (11) et la pièce (2) est constituée par une liaison appui-plan (L_1) de normale $\vec{y}$, et une autre liaison appui-plan (L_2) de normale $\vec{y}_1$. On pose : $\theta = (\vec{y}, \vec{y}_1)$. Le maintien du contact est assuré par la cale pentée (12), sur laquelle a été exercée une action mécanique connue par l'intermédiaire des vis de réglage.

La liaison glissière d'axe $(O, \vec{y})$ entre la pièce (2) et le chariot (4) est constituée par la liaison pivot glissant (L_3) de ∅ 50 H7g6 et la liaison linéique rectiligne (L_4) entre la clavette (5) et le chariot (4).

Enfin la liaison glissière d'axe $(O, \vec{x})$ entre le chariot (4) et le bâti est constituée par deux liaisons pivot glissant (L_5) et (L_6) d'axes parallèles $(C, \vec{x})$ et $(D, \vec{x})$. On pose : $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OD} = a\vec{z}$ $(a > 0)$.

QUESTIONS

1° *a*) Déterminer le degré d'hyperstatisme de la liaison glissière d'axe $(A, \vec{z})$ équivalente aux deux liaisons en parallèle (L_1) et (L_2), entre la table (11) et la pièce (2).

***b*) A quelle condition géométrique de position relative des liaisons correspond l'inconnue hyperstatique?**

***c*) Si on modélise la liaison (L_2) par une liaison linéique rectiligne d'axe $(B, \vec{z})$ de normale $(B, \vec{y}_1)$, montrer que la liaison équivalente aux deux liaisons (L_1) et (L_2) est isostatique.**

***d*) Quel est le degré d'hyperstatisme supplément qu'introduit le dispositif de maintien du contact à liaison équivalente aux deux liaisons (L_1) et (L_2) e la table (11) et la pièce (2), si on modélise la liai entre la cale pentée (12) et la pièce (2) par :**

***α*) une liaison appui-plan?**

***β*) une liaison linéique rectiligne?**

2° *a*) Déterminer le degré d'hyperstatisme de la liai glissière d'axe $(O, \vec{y})$ équivalente aux deux liaisons parallèle (L_3) et (L_4), entre la pièce (2) et le chariot

***b*) Proposer une modification pour rendre la liai équivalente isostatique.**

3° *a*) Déterminer le degré d'hyperstatisme de la liai glissière d'axe $(O, \vec{x})$ équivalente aux deux liaisons parallèle (L_5) et (L_6) entre le chariot (4) et le bâti.

***b*) A quelles conditions géométriques de position rela des liaisons correspondent les inconnues hyperstatiqu**

7 — La *figure 42* représente le schéma cinémati d'un épandeur d'engrais VICON.

L'arbre ① est lié par un double joint de CARDAN prise de force du tracteur. L'arbre ③, animé d mouvement de rotation alternatif, porte le tube distri

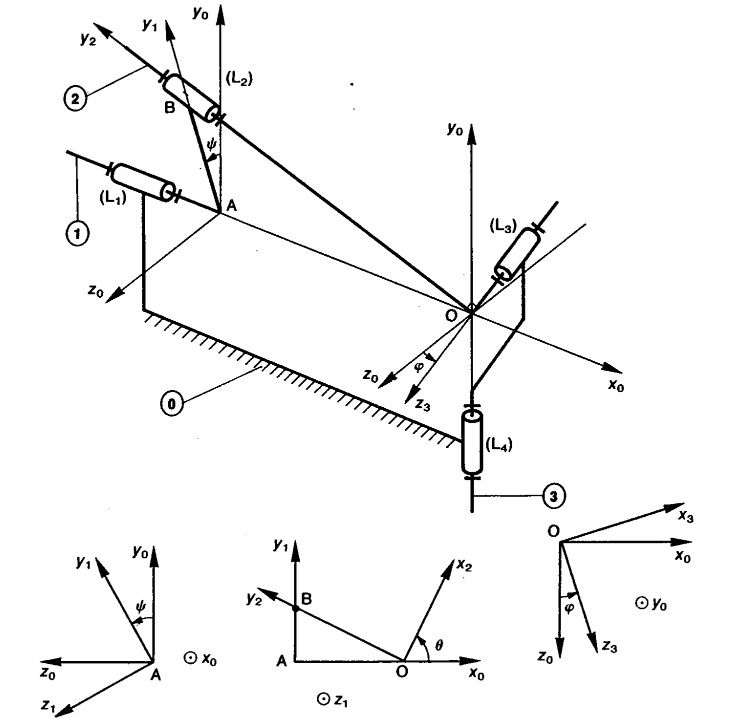


Fig. 42

teur d'engrais, situé dans un plan perpendiculaire à $\vec{y}_0$.

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié au bâti ⓪ de l'épandeur.

L'arbre ① a une liaison pivot (L_1) d'axe $(O, \vec{x}_0)$ avec le bâti ⓪. Soit $R_1(A, \vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à l'arbre ①. On pose : $\overline{OA} = -a\vec{x}_0$ $(a > 0)$ et $\psi = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.

Soit B un point de l'arbre ① tel que $\overline{AB} = b\vec{y}_1$ $(b > 0)$.

Soit $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ un repère lié à l'arbre ① tel que le point B soit sur l'axe $(O, \vec{y}_2)$.

On pose : $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$ (θ est constant).

La pièce ② a une liaison pivot (L_2) d'axe $(O, \vec{y}_2)$ avec l'arbre ①.

L'arbre ③ a une liaison pivot (L_4) d'axe $(O, \vec{y}_0)$ avec le bâti ⓪. Soit $R_3(O, \vec{x}_3, \vec{y}_0, \vec{z}_3)$ un repère lié à l'arbre ③. On pose : $\varphi = (\vec{z}_0, \vec{z}_3)$. La pièce ② et l'arbre ③ ont une liaison pivot (L_3) d'axe $(O, \vec{z}_3)$ telle que les axes $(O, \vec{z}_3)$ et $(O, \vec{y}_2)$ soient perpendiculaires.

QUESTIONS

1° Déterminer le degré d'hyperstatisme de ce mécanisme.

2° Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme.

3° Déterminer la liaison équivalente aux trois liaisons en série (L_1), (L_4) et (L_3) entre les pièces (1) et (2).

4° Déterminer, par une étude de liaisons en parallèle entre les pièces ① et ②, la liaison par laquelle il convient de remplacer la liaison (L_2) pour rendre ce mécanisme isostatique (on exprimera les torseurs dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$).

8 — La *figure 43* donne le dessin de définition du tripode d'un joint articulé.

Le schéma cinématique du montage permettant après avoir broché les cannelures, de réaliser simultanément les six centres d'usinage matérialisant les axes des trois tourillons, est représenté *figure 44*.

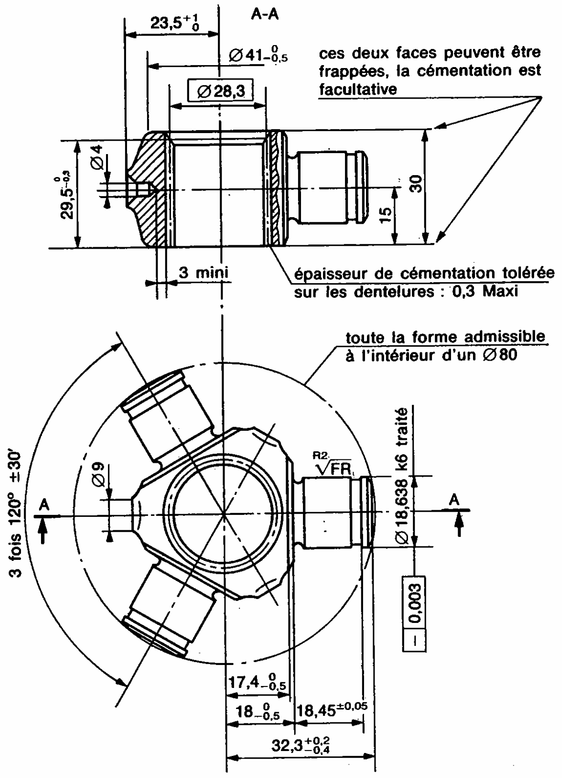

23,5$^{+1}_{0}$
A-A
Ø41$^{0}_{-0,5}$
Ø28,3
ces deux faces peuvent être frappées, la cémentation est facultative
Ø4
29,5$^{0}_{-0,3}$
30
15
3 mini
épaisseur de cémentation tolérée sur les dentelures : 0,3 Maxi
toute la forme admissible à l'intérieur d'un Ø80
3 fois 120° ±30'
Ø9
A
A
R2
FR
Ø18,638 k6 traité
0,003
17,4$^{0}_{-0,5}$
18$^{0}_{-0,5}$
18,45$^{\pm0,05}$
32,3$^{+0,2}_{-0,4}$

Fig. 43

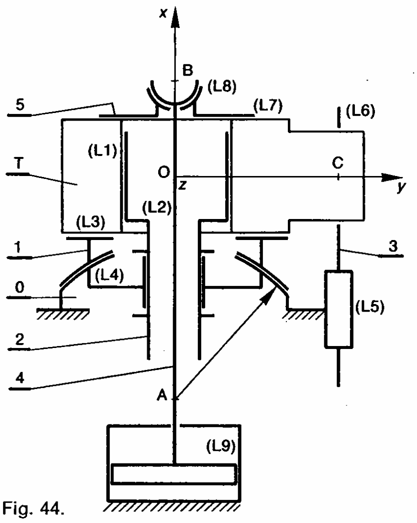


Fig. 44.

— Le tripode Ⓣ est lié à la pièce ② par la liaison glissière (L_1) d'axe $(O, \vec{x})$ par l'intermédiaire des cannelures.
— La pièce ② est liée au bâti ⓪ par une liaison pivot (L_2) d'axe $(O, \vec{x})$.
— La pièce ① est liée au tripode par une liaison appui plan (L_3) de normale $\vec{x}$, et au bâti par une liaison rotule (L_4) de centre A.
— Le vé axile ③, lié au bâti par une liaison glissière (L_5) d'axe $(C, \vec{x})$ vient en contact, avec un des tourillons du tripode, suivant une liaison linéique annulaire (L_6) d'axe $(C, \vec{y})$.
— La pièce ② est creuse et laisse passer la tige ④ du vérin de bridage. L'extrémité de cette tige est en liaison rotule (L_8) de centre B avec la rondelle ⑤, elle-même en liaison appui plan (L_7) de normale $\vec{x}$ avec le tripode Ⓣ. Le piston est en liaison pivot glissant (L_9) d'axe $(B, \vec{x})$ avec le cylindre, lié au bâti par une liaison encastrement.
Le but de l'étude est de vérifier que ce montage est isostatique.

QUESTIONS

1° Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme.

2° Montrer que la liaison équivalente à :
— (L_1) et (L_2) est une liaison pivot glissant d'axe $(O, \vec{x})$.
— (L_3) et (L_4) est une liaison ponctuelle de normale $(A, \vec{x})$.
— (L_5) et (L_6) est une liaison ponctuelle de normale $(C, \vec{z})$.

3° Montrer que la liaison équivalente à l'ensemble des liaisons (L_1), (L_2), (L_3), (L_4), (L_5) et (L_6), de mise en position du tripode par rapport au bâti, est une liaison complète et isostatique.

4° Montrer que la liaison équivalente à l'ensemble des liaisons (L_7), (L_8) et (L_9), du système de bridage du tripode par rapport au bâti, est une liaison libre.

9 — Dans la scie sauteuse « Black et Decker » d *figure 46*, examinons l'hyperstatisme du mécanisme transformation du mouvement de rotation du mo en un mouvement de translation rectiligne altern d'axe perpendiculaire, de la lame de scie.
$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est un repère lié au corps (1).

QUESTIONS

1° Dans une construction isostatique de la ch continue fermée (1)-(9)-(6)-(1) (voir *figure 45*), quel être le nombre de degrés de liberté de la liaison entre (6) et (9), si cette liaison doit interdire une rota de la lame de scie autour de son axe (alors la mob de la chaîne continue fermée est $m = 1$).

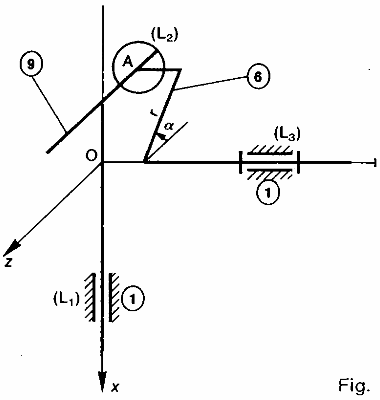


Fig.

(L_1) : liaison pivot glissant d'axe $(O, \vec{x})$.
(L_2) : liaison pivot d'axe $(O, \vec{y})$.

2° Tracer le graphe des liaisons entre les pièces (1), et (9).

3° Déterminer la liaison équivalente aux deux liaison série (L_1) et (L_3) entre (6) et (9).

4° Dans une construction isostatique de la ch continue fermée (1)-(9)-(6)-(1), montrer par une ét statique de liaisons en parallèle, que le torseur stati de la liaison (L_2) est de la forme, au point A, dan base de R :

$$\{\mathcal{T}_2\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_2 & L_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

5° La liaison (L_2) entre les pièces (6) et (9) est réal par l'intermédiaire de la pièce (8) (voir *figure 48*) qui introduit les liaisons suivantes :

(L_4) : liaison appui plan de normale $\vec{y}$.
(L_5) : liaison appui plan de normale $\vec{x}$.
(L_6) : liaison pivot glissant d'axe $(A, \vec{y})$.

***a*) Tracer le graphe des liaisons entre les pièces (6), et (9).**

***b*) Déterminer la liaison équivalente aux deux liai en série (L_5) et (L_6) entre (6) et (9).**

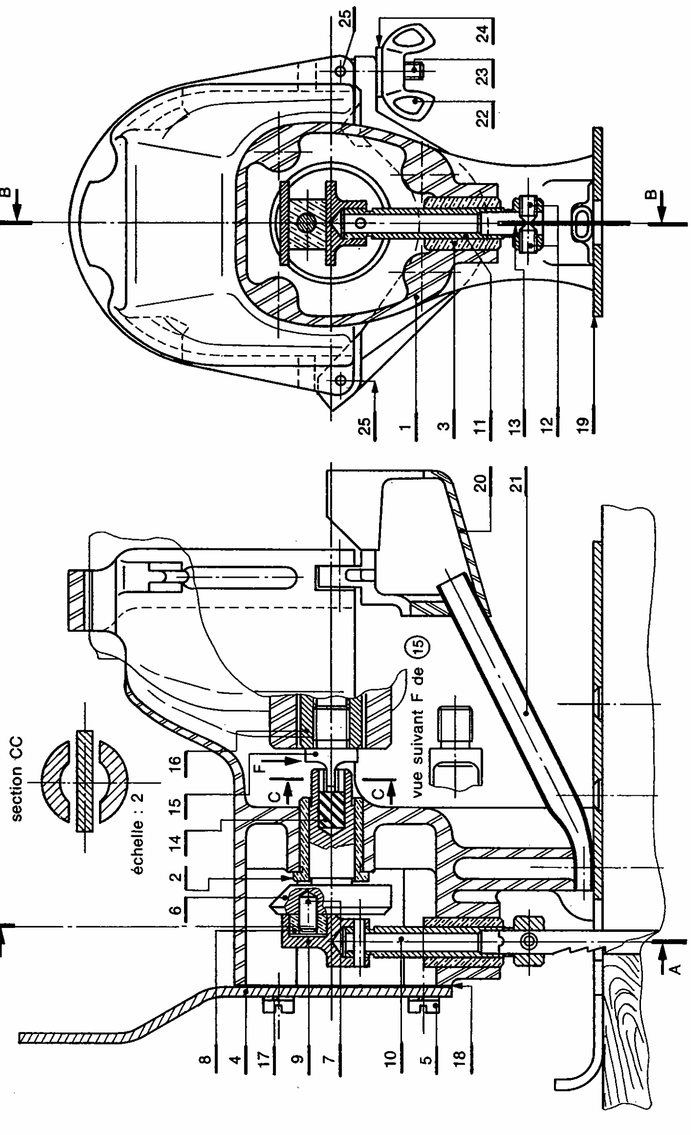

AA
BB
A
A
B
B
section CC
échelle : 2
vue suivant F de ⑮
C
C
F

Fig. 46.

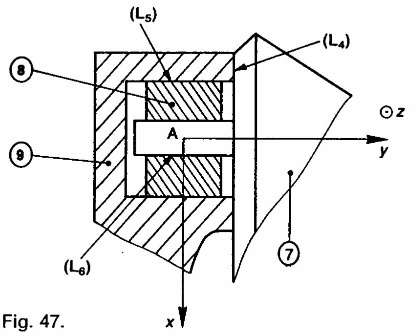

(L5)
(L4)
8
9
A
⊙z
y
7
(L6)
x

Fig. 47.

c) Déterminer, par une étude statique de liaisons en parallèle, le degré d'hyperstatisme, le(s) inconnue(s) hyperstatique(s), le torseur statique, de la liaison équivalente aux liaisons situées entre les pièces (6) et (9).

6° Déduire des résultats précédents le degré d'hyperstatisme et les inconnues hyperstatiques de la chaîne complexe constituée des solides (1), (9), (8) et (6).

7° Examiner sur le dessin proposé les solutions constructives adoptées pour se rapprocher d'une construction isostatique.

10 — Le dessin de la *figure 48* représente le mont de perçage du trou Ø 5 sur la pièce (P) dessinée traits mixtes fins.

Le canon de perçage (C) assure le guidage du fo La mise en position et le bridage s'effectuent lors le montage est retourné.

QUESTIONS

1° a) Tracer le graphe des liaisons entre les pi assurant la mise en position de la pièce (P) par rapp à la plaque support (1).

b) Modéliser ces liaisons.

c) Montrer que la liaison équivalente à ces liaisons e la pièce (P) et la plaque support (1) est complète isostatique.

2° a) Tracer le graphe des liaisons entre les pi assurant le bridage de la pièce (P) par rapport à plaque support (1).

b) Modéliser ces liaisons.

c) Montrer que la liaison équivalente à ces liaisons e la pièce (P) et la plaque support (1) est une liaison li

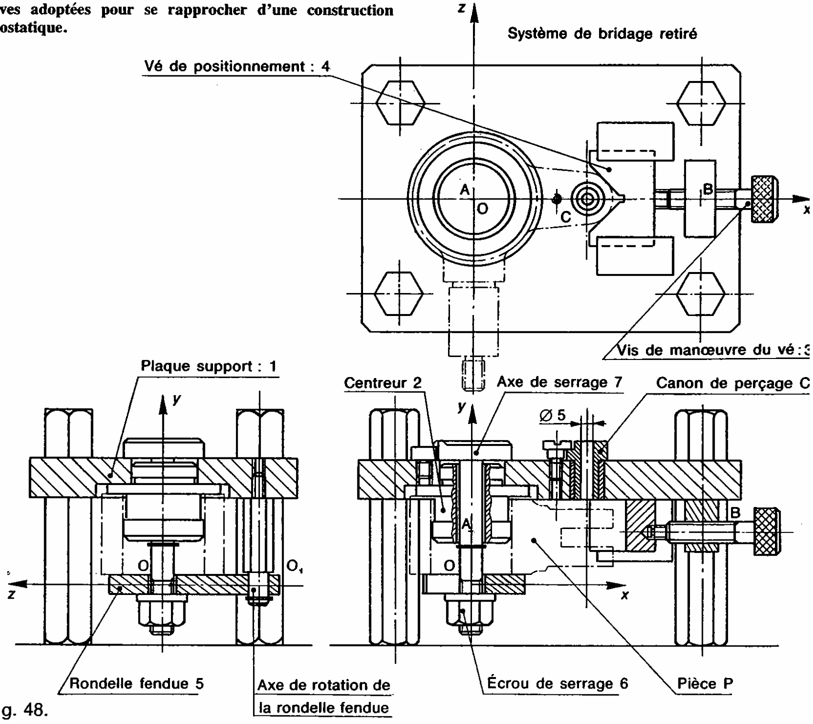

z
Système de bridage retiré
Vé de positionnement : 4
A
O
C
B
x
Vis de manœuvre du vé :
Plaque support : 1
Centreur 2
Axe de serrage 7
Canon de perçage C
Ø 5
y
O
O1
z
y
A
B
x
Rondelle fendue 5
Axe de rotation de la rondelle fendue
Écrou de serrage 6
Pièce P

Fig. 48.

3^e^ partie

DYNAMIQUE

1 □ cinétique

La cinétique se construit à partir de la cinématique en introduisant la notion de masse. Les définitions et les résultats, que nous allons mettre en place serviront à écrire le principe fondamental de la dynamique qui sera énoncé au *chapitre 2,* ainsi que le théorème de l'énergie cinétique qui sera démontré au *chapitre 3.*

1. PRINCIPE DE CONSERVATION DE LA MASSE

En mécanique classique (celle que l'on étudie) on admet le principe de conservation de la masse.

1.1. DÉFINITION

Un ensemble matériel (E) vérifie le principe de conservation de la masse, si tout sous-ensemble matériel (e) de l'ensemble matériel (E) a une masse $m(e)$ constante au cours du temps, soit

$$\forall (e) \subset (\mathrm{E}),\ \forall t \qquad m(e) = \text{constante.}$$

REMARQUE

En mécanique relativiste la masse d'un ensemble matériel est une fonction du temps.

1.2. CONSÉQUENCE : DÉRIVATION SOUS LE SIGNE SOMME

Soit (E) un ensemble matériel en mouvement par rapport à un repère R.
Soit $\vec{\varphi}(\mathrm{P}, t)$ un champ de vecteurs défini, à chaque date t, en tout point P de (E) relativement à la mesure de masse $\mathrm{d}m$ du point P considéré.
Considérons la résultante générale du torseur associé à ce champ de vecteurs :

$$\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{E}} \vec{\varphi}(\mathrm{P}, t)\,\mathrm{d}m.$$

Si l'on suppose la fonction $\vec{\varphi}(\mathrm{P}, t)$ contin
différentiable par rapport à la variable t, o
écrire compte tenu du principe de conservat
la masse :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{F}} \vec{\varphi}(\mathrm{P}, t)\,\mathrm{d}m\right]_{\mathrm{R}} = \int_{\mathrm{P}\in\mathrm{E}} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{\varphi}(\mathrm{P}, t)\right]_{\mathrm{R}} \mathrm{d}}$$

Nous utiliserons cette relation dans les parag
qui suivent avec des vecteurs position, des v
vitesse, etc.

2. TORSEUR CINÉTIQUE

Soit un ensemble matériel (E) de masse m, de
d'inertie G, en mouvement par rapport
repère R.

2.1. DÉFINITION

**Le torseur cinétique de l'ensemble matér
dans son mouvement par rapport au repère
en un point A quelconque, le torseur suiv**

$$\boxed{\{\mathcal{C}(\mathrm{E/R})\} = {}_{\mathrm{A}}\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{E}} \vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P/R})\,\mathrm{d}m \\ \displaystyle\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{E}} \overrightarrow{\mathrm{AP}} \wedge \vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P/R})\,\mathrm{d}m \end{array}\right.}$$

La résultante générale du torseur cinétiq
appelée *résultante cinétique* (ou quanti
mouvement) et le moment résultant est
moment cinétique.
Le moment cinétique au point A du
$\{\mathcal{C}(\mathrm{E/R})\}$ est noté habituellement : $\vec{\sigma}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E/R}$

2.2. AUTRE EXPRESSION DE LA RÉSULTANTE CINÉTIQUE

Soit O l'origine du repère R. La position du centre d'inertie G de l'ensemble matériel (E) est donnée par la relation (voir *paragraphe 2* du *chapitre 1* de statique)

$$m\overrightarrow{OG} = \int_{P\in E} \overrightarrow{OP}\,dm.$$

Dérivons les deux membres de cette égalité par rapport à t, dans R

$$\left[\frac{d}{dt}(m\overrightarrow{OG})\right]_R = \frac{d}{dt}\left[\int_{P\in E} \overrightarrow{OP}\,dm\right]_R.$$

Compte tenu du principe de conservation de la masse et de la relation (1), on peut écrire :

$$m\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OG}\right]_R = \int_{P\in E}\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_R dm$$

soit

$$\boxed{m\vec{V}(G/R) = \int_{P\in E} \vec{V}(P/R)\,dm.} \qquad (2)$$

Le torseur cinétique s'écrit donc

$$\boxed{\{\mathcal{C}(E/R)\} = {}_A\left\{\begin{matrix} m\vec{V}(G/R) \\ \vec{\sigma}_A(E/R) \end{matrix}\right\}.}$$

2.3. REMARQUES

– Si on suppose la masse de l'ensemble matériel (E) concentrée en son centre d'inertie G, le torseur cinétique s'écrit au point G :

$$\boxed{\{\mathcal{C}(E/R) = {}_G\left\{\begin{matrix} m\vec{V}(G/R) \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}.}$$

Cette hypothèse simplificatrice est acceptable ou non suivant la nature du mouvement de (E). Par exemple, une bille dont on étudie le mouvement de chute libre sera modélisée par un point matériel, ce qui est exclu pour l'étude de son roulement sans glissement sur un plan incliné.

– Vérifions que les deux éléments de réduction du torseur cinétique qui ont été définis en 2.1 constituent bien un torseur.

Pour cela, il suffit de montrer que le moment cinétique vérifie la relation de changement de point du moment d'un torseur.

Soit B un point quelconque. Par définition

$$\vec{\sigma}_B(E/R) = \int_{P\in E} \overrightarrow{BP} \wedge \vec{V}(P/R)\,dm$$

avec $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}$, on obtient

$$\vec{\sigma}_B(E/R) = \int_{P\in E} \overrightarrow{BA} \wedge \vec{V}(P/R)\,dm + \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R)\,dm$$

$\overrightarrow{BA}$ étant indépendant de (E), la première intégrale est égale à :

$$\overrightarrow{BA} \wedge \int_{P\in E} \vec{V}(P/R)\,dm$$

soit avec la relation (2) : $\overrightarrow{BA} \wedge m\vec{V}(G/R)$.

La deuxième intégrale représente le moment cinétique $\vec{\sigma}_A(E/R)$.

D'où la relation :

$$\boxed{\vec{\sigma}_B(E/R) = \vec{\sigma}_A(E/R) + m\vec{V}(G/R) \wedge \overrightarrow{AB}.} \qquad (3)$$

3. TORSEUR DYNAMIQUE

3.1. DÉFINITION

Le torseur dynamique de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport au repère R est, en un point A quelconque, le torseur suivant :

$$\boxed{\{\mathcal{D}(E/R)\} = {}_A\left\{\begin{matrix} \displaystyle\int_{P\in E} \vec{\Gamma}(P/R)\,dm \\ \displaystyle\int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R)\,dm \end{matrix}\right\}}$$

La résultante générale du torseur dynamique est appelée *résultante dynamique* et le moment résultant est appelé *moment dynamique.*

Le moment dynamique au point A du torseur $\{\mathcal{D}(E/R)\}$ est noté habituellement : $\vec{\delta}_A(E/R)$.

3.2. AUTRE EXPRESSION DE LA RÉSULTANTE DYNAMIQUE

Nous avons établi au *paragraphe 2.2* la relation (2) suivante :

$$m\vec{V}(G/R) = \int_{P\in E} \vec{V}(P/R)\,dm$$

dérivons les deux membres de cette égalité par rapport à t, dans R.

$$\left[\frac{d}{dt}\, m\vec{V}(G/R)\right]_R = \frac{d}{dt}\left[\int_{P\in E} \vec{V}(P/R)\,dm\right]_R$$

compte tenu du principe de conservation de la masse et de la relation (1), on peut écrire :

$$m\left[\frac{d}{dt}\,\vec{V}(G/R)\right]_R = \int_{P\in E}\left[\frac{d}{dt}\,\vec{V}(P/R)\right]_R dm$$

soit

$$\boxed{m\vec{\Gamma}(G/R) = \int_{P\in E} \vec{\Gamma}(P/R)\,dm.}$$

Le torseur dynamique s'écrit donc :

$$\boxed{\{\mathcal{D}(E/R)\} = {}_A\left\{\begin{matrix} m\vec{\Gamma}(G/R) \\ \vec{\delta}_A(E/R) \end{matrix}\right\}.}$$

3.3. REMARQUES

Si on suppose la masse de l'ensemble matériel (E) *concentrée en son centre d'inertie* G, *le torseur dynamique s'écrit au point* G :

$$\boxed{\{\mathcal{D}(E/R)\} = {}_{G}\begin{Bmatrix} m\vec{\Gamma}(G/R) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.}$$

— Comme pour le torseur cinétique on vérifie facilement que les deux éléments de réduction du torseur dynamique définis en 3.1 constituent bien un torseur. C'est-à-dire que l'on a la relation :

$$\boxed{\vec{\delta}_B(E/R) = \vec{\delta}_A(E/R) + m\vec{\Gamma}(G/R) \wedge \overrightarrow{AB}.} \quad (4)$$

4. RELATION ENTRE LE MOMENT CINÉTIQUE ET LE MOMENT DYNAMIQUE

Plutôt que de conduire un calcul direct du moment dynamique nécessitant la connaissance du champ des accélérations, il est souvent plus simple de déduire le moment dynamique du moment cinétique (le calcul des vitesses est toujours plus simple que celui des accélérations). C'est pourquoi nous allons mettre en évidence la relation qui unit ces deux moments.

Le moment cinétique, en un point A quelconque, de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport au repère R, est par définition :

$$\vec{\sigma}_A(E/R) = \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R)\,dm.$$

Dérivons les deux membres de cette égalité par rapport à t, dans R, en utilisant la relation (1).

$$\left[\frac{d}{dt}\,\vec{\sigma}_A(E/R)\right]_R = \int_{P\in E}\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R)\right)\right]_R dm \quad (5)$$

or

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R)\right)\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{AP}\right]_R \wedge \vec{V}(P/R) + \overrightarrow{AP} \wedge \left[\frac{d}{dt}\,\vec{V}(P/R)\right]_R$$

et

$$\left[\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{AP}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{OP}\right]_R - \left[\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{OA}\right]_R$$

$$\left[\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{AP}\right]_R = \vec{V}(P/R) - \vec{V}(A/R)$$

alors

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R)\right)\right]_R = -\vec{V}(A/R) \wedge \vec{V}(P/R) + \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R).$$

Par conséquent, la relation (5) devient

$$\left[\frac{d}{dt}\,\vec{\sigma}_A(E/R)\right]_R = -\int_{P\in E} \vec{V}(A/R) \wedge \vec{V}(P/R)\,d$$

$$+ \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/$$

La première intégrale s'écrit :

$$-\vec{V}(A/R) \wedge \int_{P\in E} \vec{V}(P/R)\,dm$$

soit

$$-\vec{V}(A/R) \wedge m\vec{V}(G/R).$$

La deuxième intégrale représente le momen mique $\vec{\delta}_A(E/R)$.

En définitive, on obtient la relation suivant

$$\vec{\delta}_A(E/R) = \left[\frac{d}{dt}\,\vec{\sigma}_A(E/R)\right]_R + m\vec{V}(A/R) \wedge \vec{V}(G/$$

REMARQUE

Cette relation est valable pour un point . ensemble matériel (E) *quelconques. Par quent le vecteur vitesse* $\vec{V}(A/R)$ *est* uniq *égal à* $\left[\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{OA}\right]_R$.

Cas particuliers

Distinguons deux cas particuliers où le vectoriel de la relation précédente est n

Premier cas : A est fixe dans R, alors :

$$\boxed{\vec{\delta}_A(E/R) = \left[\frac{d}{dt}\,\vec{\sigma}_A(E/R)\right]_R.}$$

Deuxième cas : A est confondu avec G,

$$\boxed{\vec{\delta}_G(E/R) = \left[\frac{d}{dt}\,\vec{\sigma}_G(E/R)\right]_R.}$$

5. ÉNERGIE CINÉTIQUE

Définition

L'énergie cinétique de l'ensemble maté dans son mouvement par rapport au repè le scalaire positif suivant :

$$\mathbf{T(E/R) = \frac{1}{2}\int_{P\in E} \left[\vec{V}(P/R)\right]^2 dm.}$$

6. APPLICATION

Considérons un pendule simple constitué d' rectiligne (S) de longueur l, d'épaisseur né homogène, de masse m et de centre d'inertie G

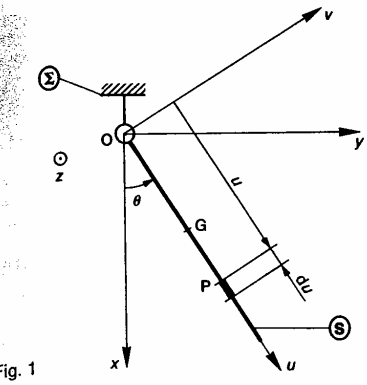


Fig. 1

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à un bati (Σ). La tige (S) a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$ avec (Σ).
Soit $R_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ un repère lié à la tige (S) tel que : $\overrightarrow{OG} = \frac{l}{2}\vec{u}$.
On pose : $\theta = (\vec{x}, \vec{u})$.

QUESTION 1

Déterminer le torseur cinétique, au point O, de la tige (S) dans son mouvement par rapport au repère R.

RÉPONSE

Le torseur cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à R s'écrit au point O :

$$\{\mathcal{C}(S/R)\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} m\vec{V}(G/R) \\ \vec{\sigma}_0(S/R) \end{Bmatrix}$$

Calcul de la résultante cinétique

Le vecteur vitesse $\vec{V}(G/R)$ est égal à $\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OG}\right]_R$ soit $\left[\frac{d}{dt}\frac{l}{2}\vec{u}\right]_R$.

Pour effectuer ce calcul passons par l'intermédiaire de la base de R_1 :

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{l}{2}\vec{u}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\frac{l}{2}\vec{u}\right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \frac{l}{2}\vec{u}$$

$\vec{u}$ étant un vecteur unitaire de la base de R_1 :

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{l}{2}\vec{u}\right]_R = \vec{0} + \theta'\vec{z} \wedge \frac{l}{2}\vec{u}$$

par suite $\vec{V}(G/R) = \frac{l}{2}\theta'\vec{v}$

et

$$\boxed{m\vec{V}(G/R) = \frac{ml}{2}\theta'\vec{v}.}$$

Calcul du moment cinétique au point O

$$\vec{\sigma}_O(S/R) = \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{V}(P/R)\,dm$$

Posons $\overrightarrow{OP} = u\vec{u}$.

Par un calcul analogue à celui de $\vec{V}(G/R)$ on montre que $\vec{V}(P/R) = u\theta'\vec{v}$, alors

$$\vec{\sigma}_O(S/R) = \int_{P \in S} u\vec{u} \wedge u\theta'\vec{v}\;dm$$

avec $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{z}$

$$\vec{\sigma}_O(S/R) = \theta'\vec{z}\int_{P \in S} u^2\,dm$$

sachant que $dm = \frac{m}{l}du$ $\left(\frac{m}{l}\text{ : masse linéique de tige}\right)$:

$$\vec{\sigma}_O(S/R) = \frac{m}{l}\theta'\vec{z}\int_0^l u^2\,du$$

soit

$$\boxed{\vec{\sigma}_O(S/R) = \frac{ml^2}{3}\theta'\vec{z}.}$$

REMARQUE

> *Dans l'expression de $\vec{\sigma}_O(S/R)$ apparaît le terme $\frac{ml^2}{3}$ qui représente le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe $(O, \vec{z})$ (voir cours de terminale).*

QUESTION 2

Déterminer le torseur dynamique, au point O, de la tige (S) dans son mouvement par rapport au repère R.

RÉPONSE

Le torseur dynamique de (S) dans son mouvement par rapport à R s'écrit au point O.

$$\boxed{\{\mathcal{D}(S/R)\} = {}_{0}\begin{Bmatrix} m\vec{\Gamma}(G/R) \\ \vec{\delta}_0(S/R) \end{Bmatrix}.}$$

Calcul de la résultante dynamique

Le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(G/R)$ est égal à $\left[\frac{d}{dt}\vec{V}(G/R)\right]_R$ soit $\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{l}{2}\theta'\vec{v}\right)\right]_R$.

Pour effectuer ce calcul passons par l'intermédiaire de la base de R_1.

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{l}{2}\theta'\vec{v}\right)\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{l}{2}\theta'\vec{v}\right)\right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \frac{l}{2}\theta'\vec{v}$$

$\vec{v}$ étant un vecteur unitaire de la base de R_1 :

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{l}{2}\theta'\vec{v}\right)\right]_R = \frac{l}{2}\theta''\vec{v} + \theta'\vec{z} \wedge \frac{l}{2}\theta'\vec{v}$$

par suite $\vec{\Gamma}(G/R) = \frac{l}{2}\theta''\vec{v} - \frac{l}{2}\theta'^2\vec{u}$ et

$$\boxed{m\vec{\Gamma}(G/R) = \frac{ml}{2}(\theta''\vec{v} - \theta'^2\vec{u}).}$$

Calcul du moment dynamique au point O

La relation (6) du *paragraphe 4* entre le moment cinétique et le moment dynamique s'écrit au point O, fixe dans R :

$$\vec{\delta}_O(S/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_0(S/R)\right]_R$$

sachant que : $\vec{\sigma}_O(S/R)=\dfrac{ml^2}{3}\,\theta'\vec{z}$

$$\boxed{\vec{\delta}_O(S/R)=\frac{ml^2}{3}\,\theta''\vec{z}.}$$

QUESTION 3

Déterminer l'énergie cinétique de la tige (S) dans son mouvement par rapport à R.

RÉPONSE

Par définition l'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à R est :

$$T(S/R)=\frac{1}{2}\int_{P\in S}[\vec{V}(P/R)]^2\,dm$$

avec $\vec{V}(P/R)=u\theta'\vec{v}$ et en remarquant que $\vec{v}\cdot\vec{v}=\vec{v}^{\,2}=1$

$$T(S/R)=\frac{\theta'^2}{2}\int_{P\in S}u^2\,dm$$

sachant que $dm=\dfrac{m}{l}\,du$

$$T(S/R)=\frac{m\theta'^2}{2l}\int_0^l u^2\,du$$

soit
$$\boxed{T(S/R)=\frac{ml^2}{6}\,\theta'^2.}$$

REMARQUE

> *Dans l'expression de* T(S/R) *apparaît le moment d'inertie* $\dfrac{ml^2}{3}$ *de* (S) *par rapport à l'axe* $(O,\vec{z})$.

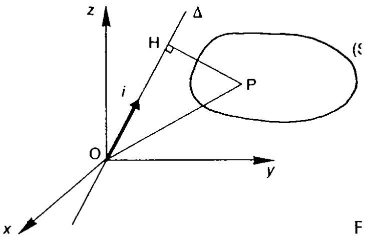
7. REMARQUES

> *— Les définitions et les relations mises en place jusqu'à présent sont applicables à un ensemble matériel quelconque (solide, ensemble de solides, liquide, gaz, etc.).*
>
> *— L'exercice précédent (paragraphe 6) montre que dans le calcul du moment cinétique et de l'énergie cinétique du solide* (S), *dans son mouvement particulier par rapport au repère* R, *apparaît le moment d'inertie de ce solide par rapport à l'axe* $(O,\vec{z})$.
>
> *Lorsqu'un solide a un mouvement quelconque par rapport à un repère, d'autres termes d'inertie apparaissent dans le calcul du moment cinétique et de l'énergie cinétique. C'est pourquoi nous allons maintenant définir complètement les caractéristiques d'inertie d'un solide, et établir ensuite des relations particulières pour déterminer le moment cinétique et l'énergie cinétique d'un solide.*

8. MOMENT D'INERTIE D'UN SOLIDE PAR RAPPORT A UN AXE

Soient un repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ et un axe Δ(O
d'origine O et de vecteur unitaire $\vec{i}$. Posons :

$$\vec{i}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}+\gamma\vec{z}.$$



F

Soit (S) un solide de masse m. Notons P un
quelconque de (S) et H le pied de la perpendic
abaissée de P sur Δ. Posons :

$$\overrightarrow{OP}=x\vec{x}+y\vec{y}+z\vec{z}.$$

8.1. DÉFINITION

Le moment d'inertie du solide (S) par rapp l'axe Δ est le scalaire positif suivant :

$$\boxed{I(S/\Delta)=\int_{P\in S}[\overrightarrow{PH}]^2\,dm}$$

8.2. CALCUL DE I (S/Δ)

Pour calculer ce moment d'inertie remarquons

$$\|\vec{i}\wedge\overrightarrow{OP}\|=\|\vec{i}\|\,.\,\|\overrightarrow{OP}\|\,.\,|\sin(\vec{i},\overrightarrow{OP})|$$

comme $\vec{i}$ est un vecteur unitaire, et que da
triangle rectangle OPH :

$$\|\overrightarrow{PH}\|=\|\overrightarrow{OP}\|\,.\,|\sin(\vec{i},\overrightarrow{OP})|.$$

Alors $$\|\overrightarrow{PH}\|=\|\vec{i}\wedge\overrightarrow{OP}\|.$$

Déterminons dans la base de R les composant
vecteur $\vec{i}\wedge\overrightarrow{OP}$, en utilisant une notation class

$$\vec{i}\wedge\overrightarrow{OP}=\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}x\\ y\\ z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\beta z-\gamma y\\ \gamma x-\alpha z\\ \alpha y-\beta x\end{vmatrix}.$$

Alors

$$[\overrightarrow{PH}]^2=(\beta z-\gamma y)^2+(\gamma x-\alpha z)^2+(\alpha y-\beta x)$$

Soit

$$[\overrightarrow{PH}]^2=\alpha^2(y^2+z^2)+\beta^2(z^2+x^2)+\gamma^2(x^2+y^2)$$
$$-2\beta\gamma yz-2\gamma\alpha zx-2$$

Par conséquent, le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe Δ s'écrit, en remarquant que α, β, γ sont indépendants des points P de (S) :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(\mathrm{S}/\Delta)=\alpha^2\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}}(y^2+z^2)\mathrm{d}m+\beta^2\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}}(z^2+x^2)\mathrm{d}m\\ +\gamma^2\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}}(x^2+y^2)\mathrm{d}m-2\beta\gamma\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}}yz\,\mathrm{d}m\\ -2\gamma\alpha\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}}zx\,\mathrm{d}m-2\alpha\beta\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}}xy\,\mathrm{d}m.\end{aligned}$$

On pose habituellement :

$$\mathrm{A}=\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}}(y^2+z^2)\mathrm{d}m \qquad \mathrm{B}=\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}}(z^2+x^2)\mathrm{d}m$$

$$\mathrm{C}=\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}}(x^2+y^2)\mathrm{d}m \qquad \mathrm{D}=\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}}yz\,\mathrm{d}m$$

$$\mathrm{E}=\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}}zx\,\mathrm{d}m \qquad \mathrm{F}=\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}}xy\,\mathrm{d}m.$$

Alors

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{I}(\mathrm{S}/\Delta)=\alpha^2\mathrm{A}+\beta^2\mathrm{B}+\gamma^2\mathrm{C}-2\beta\gamma\mathrm{D}\\ -2\gamma\alpha\mathrm{E}-2\alpha\beta\mathrm{F}.\end{aligned}}$$

8.3. DÉFINITIONS

On appelle :

A : moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe $(\mathrm{O},\vec{x})$.

B : moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe $(\mathrm{O},\vec{y})$.

C : moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe $(\mathrm{O},\vec{z})$.

D : produit d'inertie de (S) par rapport aux axes $(\mathrm{O},\vec{y})$ et $(\mathrm{O},\vec{z})$.

E : produit d'inertie de (S) par rapport aux axes $(\mathrm{O},\vec{z})$ et $(\mathrm{O},\vec{x})$.

F : produit d'inertie de (S) par rapport aux axes $(\mathrm{O},\vec{x})$ et $(\mathrm{O},\vec{y})$.

REMARQUE

Si le point O *et la base* $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ *sont fixes par rapport au solide* (S), *les quantités* A, B, C, D, E, F *sont constantes au cours du temps.*

*9. OPÉRATEUR D'INERTIE D'UN SOLIDE

Dans ce paragraphe nous allons définir un opérateur qui va nous permettre de rassembler les 6 quantités A, B, C, D, E, F dans une matrice symétrique 3 × 3.

9.1. DÉFINITION

L'opérateur d'inertie d'un solide (S) en un point O, est l'opérateur qui à tout vecteur $\vec{u}$ fait correspondre le vecteur :

$$\boxed{\mathcal{J}_{\mathrm{O}}(\mathrm{S},\vec{u})=\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{\mathrm{OP}})\mathrm{d}m.}$$

Cet opérateur est linéaire, donc représentable par une matrice.

9.2. MATRICE D'INERTIE

La matrice d'inertie du solide (S) au point O, relativement à la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, s'obtient en disposant en colonnes les composantes des vecteurs transformés des vecteurs de base par l'opérateur d'inertie.

$$[\mathrm{I}_{\mathrm{O}}(\mathrm{S})]=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}\\ \begin{array}{ccc}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ \mathcal{J}_{\mathrm{O}}(\mathrm{S},\vec{x})&\mathcal{J}_{\mathrm{O}}(\mathrm{S},\vec{y})&\mathcal{J}_{\mathrm{O}}(\mathrm{S},\vec{z})\end{array}\end{array}$$

Déterminons la première colonne de la matrice d'inertie. Ses trois termes sont les composantes du vecteur :

$$\mathcal{J}_{\mathrm{O}}(\mathrm{S},\vec{x})=\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\wedge(\vec{x}\wedge\overrightarrow{\mathrm{OP}})\mathrm{d}m.$$

Posons $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\vec{x}+y\vec{y}+z\vec{z}$

alors

$$\vec{x}\wedge\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\-z\\y\end{vmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\wedge(\vec{x}\wedge\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}0\\-z\\y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y^2+z^2\\-xy\\-zx\end{vmatrix}.$$

La première colonne est donc constituée des termes :

$$\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}}(y^2+z^2)\mathrm{d}m,\quad -\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}}xy\,\mathrm{d}m,\quad -\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}}zx\,\mathrm{d}m.$$

Après un calcul identique pour déterminer les deux autres colonnes, la matrice d'inertie s'écrit avec les notations du paragraphe 8 :

$$\boxed{[\mathrm{I}_{\mathrm{O}}(\mathrm{S})]=\begin{bmatrix}\mathrm{A}&-\mathrm{F}&-\mathrm{E}\\ -\mathrm{F}&\mathrm{B}&-\mathrm{D}\\ -\mathrm{E}&-\mathrm{D}&\mathrm{C}\end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

REMARQUES

— Les moments d'inertie du solide (S) par rapport aux axes $(O, \vec{x})$, $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$ apparaissent sur la diagonale de la matrice.
— L'opérateur d'inertie est symétrique.

9.3. EXPRESSION DU MOMENT D'INERTIE D'UN SOLIDE PAR RAPPORT A UN AXE

Nous avons vu au *paragraphe 8* que le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe $\Delta(O, \vec{i})$ était (relation 9) :

$$I(S/\Delta)=\int_{P\in S}[\overline{PH}]^2\,dm.$$

Soit avec $\|\overline{PH}\| = \|\vec{i}\wedge\overline{OP}\|$ (relation 10)

$$I(S/\Delta)=\int_{P\in S}[\vec{i}\wedge\overline{OP}]^2\,dm.$$

En écrivant que le carré scalaire $[\vec{i}\wedge\overline{OP}]^2$ est égal au produit scalaire du vecteur $(\vec{i}\wedge\overline{OP})$ par lui-même, on obtient :

$$I(S/\Delta)=\int_{P\in S}(\vec{i}\wedge\overline{OP})\cdot(\vec{i}\wedge\overline{OP})\,dm.$$

En considérant que l'expression à intégrer est un produit mixte constitué des trois vecteurs $\vec{i}$, $\overline{OP}$ et $\vec{i}\wedge\overline{OP}$, on peut écrire en permuttant les signes scalaire et vectoriel de ce produit mixte :

$$I(S/\Delta)=\vec{i}\cdot\int_{P\in S}\overline{OP}\wedge(\vec{i}\wedge\overline{OP})\,dm.$$

Ce qui fait apparaître l'opérateur d'inertie du solide (S), au point O, appliqué au vecteur $\vec{i}$. D'où :

$$\boxed{I(S/\Delta)=\vec{i}\cdot\vec{\mathcal{J}}_O(S,\vec{i}).} \qquad (11)$$

9.4. APPLICATION

Soit une tige rectiligne (S) de longueur *l*, de dimensions transversales négligeables, homogène, de masse *m* et de centre d'inertie G.

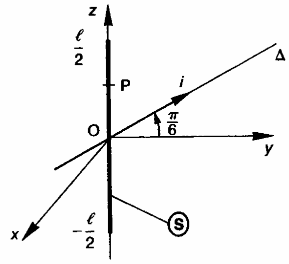


Fig. 3

$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est un repère dont l'origine O est en
dont l'axe $(O, \vec{z})$ est confondu avec l'axe de la ti
Soit $\Delta(O, \vec{i})$ l'axe d'origine O et de vecteur unitair
que $\vec{i}=\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{y}+\frac{1}{2}\vec{z}$.

QUESTION 1

Déterminer l'opérateur d'inertie de la tige (S) au p

RÉPONSE

Déterminons l'opérateur d'inertie de (S) au point O
matrice d'inertie au point O, relativement à l
$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
Cette matrice est de la forme :

$$[I_O(S)]=\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Sachant qu'un point P quelconque de la tige (S) coordonnées cartésiennes (0, 0, z) dans R :

$$A=\int_{P\in S}(y^2+z^2)\,dm=\int_{P\in S}z^2\,dm$$

$$B=\int_{P\in S}(z^2+x^2)\,dm=\int_{P\in S}z^2\,dm=A$$

$$C=\int_{P\in S}(x^2+y^2)\,dm=0$$

$$D=\int_{P\in S}yz\,dm=0$$

$$E=\int_{P\in S}zx\,dm=0$$

$$F=\int_{P\in S}xy\,dm=0.$$

Calculons A :

$$A=\int_{P\in S}z^2\,dm$$

avec $dm=\frac{m}{l}\,dz$ $\left(\frac{m}{l}\text{ : masse linéique de S}\right)$

$$A=\frac{m}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}z^2\,dz,$$

soit $A=\frac{ml^2}{12}$

la matrice d'inertie est donc :

$$[I_0(S)]=\begin{bmatrix} \frac{ml^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

QUESTION 2

Déterminer le moment d'inertie de la tige (S) par à l'axe $\Delta(O, \vec{i})$.

RÉPONSE

Ce moment d'inertie est donné par la relation (1

$$I(S/\Delta)=\vec{i}\cdot\vec{\mathcal{J}}_0(S,\vec{i}).$$

La matrice colonne associée au vecteur $\vec{\mathcal{J}}_0(S, \vec{i})$ s'obtient en effectuant la multiplication de la matrice d'inertie par la matrice colonne associée au vecteur unitaire $\vec{i}$:

$$[\vec{\mathcal{J}}_0(S, \vec{i})] = \begin{bmatrix} \frac{ml^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{ml^2\sqrt{3}}{24} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe $\Delta(O, \vec{i})$ est égal au produit scalaire du vecteur unitaire $\vec{i}$ par le vecteur $\vec{\mathcal{J}}_0(S, \vec{i})$.

D'où $$\boxed{I(S/\Delta) = \frac{ml^2}{16}.}$$

10. BASE PRINCIPALE D'INERTIE

L'opérateur d'inertie étant symétrique possède un système de trois vecteurs propres orthogonaux deux à deux.

Par conséquent, il existe toujours, en tout point, au moins une base orthonormée directe, appelée *base principale d'inertie,* dans laquelle la matrice d'inertie est diagonale (produits d'inertie nuls).

REMARQUE

Chaque vecteur unitaire de la base principale d'inertie a même direction qu'un des vecteurs propres.

Soit, par exemple, $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ la base principale d'inertie de l'opérateur d'inertie du solide (S) au point O. Dans cette base la matrice d'inertie est de la forme :

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

10.1. DÉFINITIONS

— Les axes $(O, \vec{x}_1)$, $(O, \vec{y}_1)$ et $(O, \vec{z}_1)$ sont appelés *axes principaux d'inertie* du solide (S) au point O.

— Les moments d'inertie A_1, B_1 et C_1 sont appelés *moments principaux d'inertie* du solide (S) au point O.

REMARQUE

Les moments principaux d'inertie sont les valeurs propres de l'opérateur d'inertie.

10.2. SYMÉTRIES MATÉRIELLES DU SOLIDE

Pour mettre en évidence à priori une base principale d'inertie, ou tout au moins avoir une matrice d'inertie la plus simple possible, il faut choisir le point et orienter la base où l'on exprimera la matrice d'inertie, en tenant compte des plans, axes ou centres de symétrie matérielle que peut avoir le solide. (Il y a symétrie matérielle s'il y a, à la fois, symétrie géométrique et symétrie de répartition de masse.)

Déterminons pour les deux exemples qui suivent les particularités de la matrice d'inertie du solide (S), au point O, relativement à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

EXEMPLE 1

Le solide (S) admet le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ comme plan de symétrie matérielle.

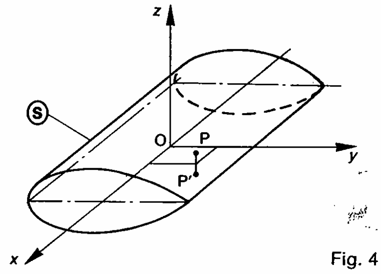


Fig. 4

A tout point $P(x, y, z)$ de masse dm, on peut associer le point $P'(x, y, -z)$ également de masse dm.

Par conséquent, le produit d'inertie $\int_{P\in S} zx \, dm$ est nul, car l'intégrale $\int_{P\in S} zx \, dm$ pour $z \geqslant 0$ est opposée à l'intégrale $\int_{P\in S} zx \, dm$ pour $z \leqslant 0$. De la même façon le produit d'inertie $\int_{P\in S} yz \, dm$ est nul. Par suite la matrice d'inertie est de la forme :

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

l'axe $(O, \vec{z})$ est donc principal d'inertie.

EXEMPLE 2

Le solide (S) admet l'axe $(O, \vec{z})$ comme axe de symétrie matérielle.

Par un raisonnement analogue au précédent on montre que la matrice d'inertie est de la forme :

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(-, -, \vec{z})}$$

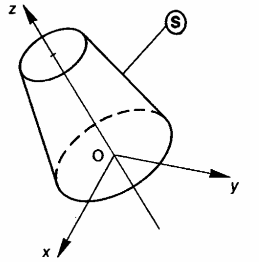


Fig. 5

La notation $(-,-,\vec{z})$ indique que la matrice d'inertie est de cette forme dans toute base orthonormée admettant pour troisième vecteur unitaire $\vec{z}$. Les deux autres vecteurs unitaires seront déterminés lorsqu'il s'agira de choisir une base commune pour multiplier la matrice d'inertie par la matrice colonne associée à un vecteur.

11. LES DIFFÉRENTS MOMENTS D'INERTIE

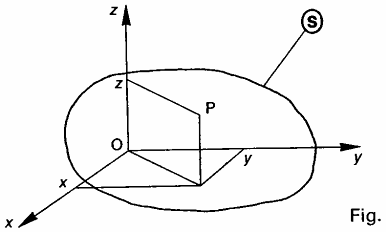


Fig. 6

Pour faciliter les calculs des moments d'inertie du solide (S) par rapport aux axes $(O, \vec{x})$, $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$ on est amené à définir les moments d'inertie de ce solide par rapport au point O, par rapport aux plans $(O, \vec{x}, \vec{y})$, $(O, \vec{y}, \vec{z})$ et $(O, \vec{z}, \vec{x})$, et à établir les relations existant entre ces moments d'inertie.

11.1. DÉFINITIONS

— Le moment d'inertie du solide (S) par rapport au point O est :

$$\boxed{I_O = \int_{P \in S} (x^2 + y^2 + z^2)\,dm = \int_{P \in S} [\overrightarrow{OP}]^2\,dm.}$$

— Le moment d'inertie du solide (S) par rapport au plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ est :

$$\boxed{I_{Oxy} = \int_{P \in S} z^2\,dm}$$

et par permutation circulaire :

$$\boxed{I_{Oyz} = \int_{P \in S} x^2\,dm}$$

$$\boxed{I_{Ozx} = \int_{P \in S} y^2\,dm.}$$

11.2. RELATIONS ENTRE LES DIFFÉRENTS MOMENTS D'INERTIE

On vérifie facilement les relations suivantes

$$\boxed{I_0 = I_{Oxy} + I_{Oyz} + I_{Ozx}}$$

$$\boxed{I_0 = \frac{1}{2}(A + B + C)}$$

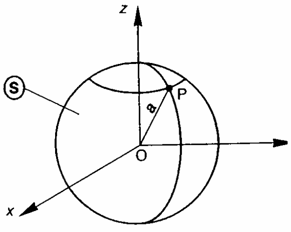
$$\boxed{A = I_{Oxy} + I_{Ozx}}$$

$$\boxed{B = I_{Oyz} + I_{Oxy}}$$

$$\boxed{C = I_{Ozx} + I_{Oyz}.}$$

11.3. APPLICATION

Soit une enveloppe sphérique (S) de centre O, de r
a, d'épaisseur négligeable, homogène et de mass



QUESTION

**Déterminer le moment d'inertie de (S) par rap
de ses diamètres.**

RÉPONSE

Vu la symétrie matérielle de (S) par rapport
O, les moments d'inertie A, B et C par ra
trois axes $(O, \vec{x})$, $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$ sont égaux
A s'exprime en fonction du moment d'inert
par rapport au point O par (relation 12) :

$$A = \frac{2}{3} I_0$$

comme $$I_0 = \int_{P \in S} [\overrightarrow{OP}]^2\,dm = ma^2$$

$$\boxed{A = \frac{2}{3} ma^2.}$$

12. THÉORÈME DE HUYGHENS

Soit O un point quelconque d'un solide (S) de masse m et de centre d'inertie G.
Déterminons les relations entre les moments d'inertie, puis entre les produits d'inertie de (S), par rapport aux axes des repères $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et $R_1(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

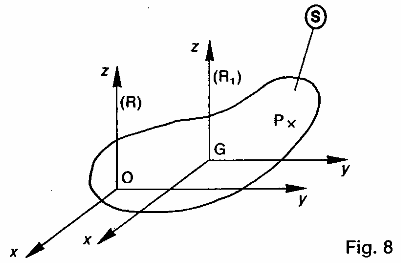


Fig. 8

Posons dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, P étant un point quelconque de (S) :

$$\overrightarrow{OP}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{OG}\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{GP}\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}$$

Sachant que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}$, nous avons les relations suivantes :

$$\begin{cases} x = a + x_1 \\ y = b + y_1 \\ z = c + z_1 \end{cases} \qquad (13)$$

Cherchons tout d'abord la relation entre les moments d'inertie de (S) par rapport aux axes $(O, \vec{x})$ et $(G, \vec{x})$, notés respectivement A et A_G.
Par définition

$$A = \int_{P \in S} (y^2 + z^2) dm$$

compte tenu des relations (13) :

$$A = \int_{P \in S} [(b + y_1)^2 + (c + z_1)^2] dm$$

soit

$$A = \int_{P \in S} [(y_1^2 + z_1^2) + 2by_1 + 2cz_1 + (b^2 + c^2)] dm$$

ou encore en séparant en quatre intégrales, puis en remarquant que b et c sont indépendants de la sommation :

$$A = \int_{P \in S} (y_1^2 + z_1^2) dm + 2b \int_{P \in S} y_1 dm$$
$$+ 2c \int_{P \in S} z_1 dm + m(b^2 + c^2) \quad (14)$$

Par définition, $\int_{P \in S} (y_1^2 + z_1^2) dm = A_G$ de plus, le centre d'inertie G de (S) est tel que (*paragraphe 2.1* du *chapitre 1* de statique) :

$$\int_{P \in S} \overrightarrow{GP} dm = \vec{0}$$

soit en projection sur $\vec{y}$ et $\vec{z}$:

$$\int_{P \in S} y_1 dm = 0 \quad \text{et} \quad \int_{P \in S} z_1 dm = 0 \qquad (15)$$

Par conséquent la relation (14) s'écrit :

$$A = A_G + m(b^2 + c^2).$$

De la même façon, nous obtenons entre les moments d'inertie par rapport aux autres axes, les relations suivantes (notations évidentes) :

$$B = B_G + m(c^2 + a^2)$$
et
$$C = C_G + m(a^2 + b^2)$$

REMARQUE

La quantité $(b^2 + c^2)$, par exemple, représente le carré de la distance entre les axes $(O, \vec{x})$ et $(G, \vec{x})$.

Cherchons ensuite la relation entre le produit d'inertie de (S) par rapport aux axes $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$ et le produit d'inertie de (S) par rapport aux axes $(G, \vec{y})$ et $(G, \vec{z})$, notés respectivement D et D_G.
Par définition :

$$D = \int_{P \in S} yz\, dm$$

compte tenu des relations (13) :

$$D = \int_{P \in S} (b + y_1)(c + z_1) dm$$

soit

$$D = \int_{P \in S} (y_1 z_1 + bz_1 + cy_1 + bc) dm$$

ou encore en séparant en quatre intégrales, puis en remarquant que b et c sont indépendants de la sommation :

$$D = \int_{P \in S} y_1 z_1 dm + b \int_{P \in S} z_1 dm$$
$$+ c \int_{P \in S} y_1 dm + mbc. \quad (16)$$

Par définition :

$$\int_{P \in S} y_1 z_1 dm = D_G.$$

Par conséquent la relation (16) s'écrit, compte tenu des relations (15) :

$$D = D_G + mbc.$$

De la même façon, nous obtenons entre les produits d'inertie par rapport aux autres axes, les relations suivantes (notations évidentes) :

$$E = E_G + mca \qquad F = F_G + mab.$$

En résumé :

$$\boxed{\begin{aligned} A &= A_G + m(b^2 + c^2) \\ B &= B_G + m(c^2 + a^2) \\ C &= C_G + m(a^2 + b^2) \\ D &= D_G + mbc \\ E &= E_G + mca \\ F &= F_G + mab. \end{aligned}} \qquad (17)$$

Application

Soit un cylindre de révolution (S), de rayon r, de hauteur h, plein et homogène, de masse m et de centre d'inertie G.

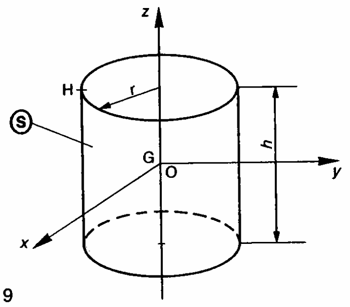


Fig. 9

R(O, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) est un repère tel que son origine O coïncide avec le point G, et l'axe (G, $\vec{z}$) soit confondu avec l'axe de révolution matérielle de (S). Notons (x, y, z) les coordonnées cartésiennes d'un point P quelconque de (S), dans le repère R.

QUESTION 1

Déterminer le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe (G, $\vec{z}$).

RÉPONSE

Par définition ce moment d'inertie est égal à :

$$C=\int_{P\in S}(x^2+y^2)\mathrm{d}m.$$

Posons $x^2+y^2=\rho^2$ et considérons comme éléments d'intégration des cylindres de révolution de hauteur h, de rayon ρ et d'épaisseur $\mathrm{d}\rho$.

Alors $$\mathrm{d}m=\frac{m}{\pi r^2 h}\,2\pi\rho h\,\mathrm{d}\rho$$

$\left(\dfrac{m}{\pi r^2 h}\right.$: masse volumique de $\left.(S)\right)$, d'où

$$\mathrm{d}m=\frac{2m}{r^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho.$$

Par suite $$C=\frac{2m}{r^2}\int_0^r \rho^3\,\mathrm{d}\rho$$

soit $$\boxed{C=\frac{mr^2}{2}.}$$

QUESTION 2

Déterminer le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe (G, $\vec{x}$), ou (G, $\vec{y}$).

RÉPONSE

Par définition ce moment d'inertie est égal à :

$$A=\int_{P\in S}(y^2+z^2)\mathrm{d}m$$

(S) étant de révolution autour de l'axe (G, $\vec{z}$) :

$$A=B=\int_{P\in S}(z^2+x^2)\mathrm{d}m$$

additionnons membre à membre ces deux relations

$$2A=\int_{P\in S}(x^2+y^2)\mathrm{d}m+2\int_{P\in S}z^2\,\mathrm{d}m$$

ce qui fait apparaître C. D'où

$$A=\frac{C}{2}+\int_{P\in S}z^2\,\mathrm{d}m.$$

Pour calculer l'intégrale $\int_{P\in S}z^2\,\mathrm{d}m$ considérons c éléments d'intégration des disques d'axe (G, d'épaisseur $\mathrm{d}z$.
Alors :

$$\int_{P\in S}z^2\,\mathrm{d}m=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}z^2\,\frac{m}{h}\,\mathrm{d}z$$

soit

$$\int_{P\in S}z^2\,\mathrm{d}m=\frac{mh^2}{12}.$$

Par suite :

$$\boxed{A=\frac{mr^2}{4}+\frac{mh^2}{12}.}$$

Remarquons que $A=C$ si $h=r\sqrt{3}$.

*QUESTION 3

En déduire la matrice d'inertie de (S) au point G, base ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$).

RÉPONSE

Cette matrice s'écrit :

$$\boxed{[I_G(S)]=\begin{bmatrix}\frac{mr^2}{4}+\frac{mh^2}{12} & 0 & 0\\ 0 & \frac{mr^2}{4}+\frac{mh^2}{12} & 0\\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{2}\end{bmatrix}_{(\vec{x},\,\vec{y}}}$$

QUESTION 4

Déterminer les moments d'inertie et les produits de (S) au point H, tel que $\overrightarrow{GH}=-r\vec{y}+\frac{h}{2}\vec{z}$, relativ la base ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$).

RÉPONSE

En appliquant les relations (17) avec $a=0$, $b=r$ et (composantes de $\overrightarrow{HG}$), on trouve :

$$\boxed{\begin{aligned}A_H&=m\left(\frac{5r^2}{4}+\frac{h^2}{3}\right)\\ B_H&=m\left(\frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{3}\right)\\ C_H&=\frac{3}{2}\,mr^2\\ D_H&=-m\,\frac{rh}{2}\\ E_H&=F_H=0.\end{aligned}}$$

*QUESTION 5

En déduire la matrice d'inertie de (S) au point H, dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

RÉPONSE

Cette matrice s'écrit :

$$[\mathrm{I_H(S)}]=\begin{bmatrix} m\left(\frac{5r^2}{4}+\frac{h^2}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{3}\right) & m\frac{rh}{2} \\ 0 & m\frac{rh}{2} & \frac{3}{2}mr^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

13. MOMENT CINÉTIQUE D'UN SOLIDE

Soit un solide (S) de masse m, de centre d'inertie G, en mouvement par rapport à un repère $\mathrm{R}(\mathrm{O}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Soit A un *point lié au solide* (S). Par définition le moment cinétique au point A du solide (S) dans son mouvement par rapport au repère R est :

$$\vec{\sigma}_{\mathrm{A}}(\mathrm{S/R})=\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}} \overrightarrow{\mathrm{AP}}\wedge\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P/R})\,\mathrm{d}m$$

si le point A est lié au solide (S), il existe entre les vecteurs vitesse $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P/R})$ et $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{A/R})$ la relation suivante :

$$\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P/R})=\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{A/R})+\vec{\Omega}(\mathrm{S/R})\wedge\overrightarrow{\mathrm{AP}}.$$

Pour bien préciser que le point A est lié au solide (S) nous noterons le vecteur vitesse du point A par rapport au repère R : $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{A}\in\mathrm{S/R})$.

Par suite :

$$\vec{\sigma}_{\mathrm{A}}(\mathrm{S/R})=\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}} \overrightarrow{\mathrm{AP}}\wedge[\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{A}\in\mathrm{S/R})+\vec{\Omega}(\mathrm{S/R})\wedge\overrightarrow{\mathrm{AP}}]\,\mathrm{d}m$$

soit

$$\vec{\sigma}_{\mathrm{A}}(\mathrm{S/R})=\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}} \overrightarrow{\mathrm{AP}}\wedge\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{A}\in\mathrm{S/R})\,\mathrm{d}m + \int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}} \overrightarrow{\mathrm{AP}}\wedge[\vec{\Omega}(\mathrm{S/R})\wedge\overrightarrow{\mathrm{AP}}]\,\mathrm{d}m$$

la première intégrale s'écrit :

$$\left(\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}} \overrightarrow{\mathrm{AP}}\,\mathrm{d}m\right)\wedge\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{A}\in\mathrm{S/R}).$$

Sachant que la position du centre d'inertie G de (S) est définie par $m\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}} \overrightarrow{\mathrm{AP}}\,\mathrm{d}m$, cette intégrale est égale à $m\overrightarrow{\mathrm{AG}}\wedge\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{A}\in\mathrm{S/R})$.

Par conséquent :

$$\vec{\sigma}_{\mathrm{A}}(\mathrm{S/R})=m\overrightarrow{\mathrm{AG}}\wedge\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{A}\in\mathrm{S/R}) + \int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}} \overrightarrow{\mathrm{AP}}\wedge[\vec{\Omega}(\mathrm{S/R})\wedge\overrightarrow{\mathrm{AP}}]\,\mathrm{d}m. \quad (18)$$

Donnons l'expression définitive du moment cinétique $\vec{\sigma}_{\mathrm{A}}(\mathrm{S/R})$ dans les deux cas suivants :

13.1. PREMIER CAS

Le mouvement de (S) par rapport à R est tel que $\vec{\Omega}(\mathrm{S/R})$ soit de la forme $\theta'\vec{z}$ (c'est le cas lorsque (S) a un mouvement plan sur plan dans le plan $(\mathrm{O}, \vec{x}, \vec{y})$ ou un mouvement hélicoïdal de direction $\vec{z}$).

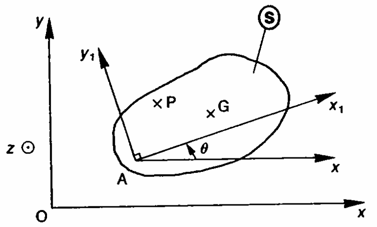


Fig. 10

Soit $\mathrm{R}_1(\mathrm{A}, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à (S).
Posons $\theta=(\vec{x}, \vec{x}_1)$, alors $\vec{\Omega}(\mathrm{S/R})=\theta'\vec{z}$ et

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x_1\vec{x}_1+y_1\vec{y}_1+z\vec{z}.$$

Dans ces conditions l'intégrale

$$\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}} \overrightarrow{\mathrm{AP}}\wedge[\vec{\Omega}(\mathrm{S/R})\wedge\overrightarrow{\mathrm{AP}}]\,\mathrm{d}m$$

est égale à :

$$\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}} (x_1\vec{x}_1+y_1\vec{y}_1+z\vec{z})\wedge[\theta'\vec{z}\wedge(x_1\vec{x}_1+y_1\vec{y}_1+z\vec{z})]\,\mathrm{d}m.$$

Soit après avoir effectué les produits vectoriels :

$$\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}} \theta'[-zx_1\vec{x}_1-y_1z\vec{y}_1+(x_1^2+y_1^2)\vec{z}\,]\,\mathrm{d}m$$

ou :

$$-\theta'\vec{x}_1\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}} zx_1\,\mathrm{d}m-\theta'\vec{y}_1\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}} y_1z\,\mathrm{d}m + \theta'\vec{z}\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}} (x_1^2+y_1^2)\,\mathrm{d}m.$$

Ce qui fait apparaître deux produits d'inertie et un moment d'inertie de (S) par rapport aux axes du repère R_1.

Posons : $\mathrm{E}_1=\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}} zx_1\,\mathrm{d}m$

$\mathrm{D}_1=\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}} y_1z\,\mathrm{d}m$

$\mathrm{C}\;=\mathrm{I}_{\mathrm{A}_z}=\int_{\mathrm{P}\in\mathrm{S}} (x_1^2+y_1^2)\,\mathrm{d}m.$

Par suite l'expression du moment cinétique $\vec{\sigma}_{\mathrm{A}}(\mathrm{S/R})$ écrite en (18) devient :

$$\boxed{\vec{\sigma}_{\mathrm{A}}(\mathrm{S/R})=m\overrightarrow{\mathrm{AG}}\wedge\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{A}\in\mathrm{S/R}) -\mathrm{E}_1\theta'\vec{x}_1-\mathrm{D}_1\theta'\vec{y}_1+\mathrm{I}_{\mathrm{A}_z}\theta'\vec{z}.} \quad (19)$$

Cas particuliers

Distinguons les deux cas particuliers suivants :

- A fixe dans R et $E_1 = 0$, $D_1 = 0$ (le plan $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ est plan de symétrie matérielle pour (S))

alors : $\boxed{\vec{\sigma}_A(S/R) = I_{Az}\theta'\vec{z}.}$

- A confondu avec G et $E_1 = 0$, $D_1 = 0$

alors : $\boxed{\vec{\sigma}_G(S/R) = I_{Gz}\theta'\vec{z}}$ (20)

Application

Considérons un cylindre de révolution (S) roulant sans glisser sur un plan incliné (Π), en supposant que l'axe du cylindre reste constamment orthogonal à la ligne de plus grande pente du plan, de façon à schématiser cette étude par un problème plan.

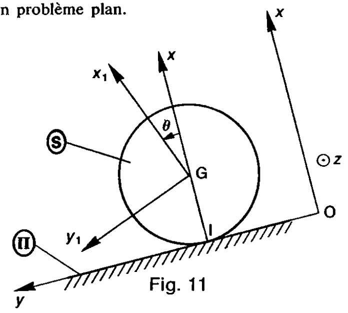


Fig. 11

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au plan (Π), l'axe $(O, \vec{y})$ étant dirigé suivant la ligne de plus grande pente.

Le cylindre de révolution (S), homogène, de masse *m*, de rayon *a* et de centre d'inertie G, a pour axe de révolution $(G, \vec{z})$.

(S) est en contact avec le plan (Π) suivant l'axe $(I, \vec{z})$ et roule sans glisser sur ce plan.

$R_1(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ est un repère lié à (S). On pose : $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.

Soit $I_{Gz} = \dfrac{ma^2}{2}$ le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe $(G, \vec{z})$. Les produits d'inertie de (S) par rapport aux axes du repère R_1 sont nuls ($E_1 = 0$, $D_1 = 0$).

QUESTION 1

Déterminer le moment cinétique au point G de (S) dans son mouvement par rapport à R.

RÉPONSE

Par application de la relation (20), on trouve :

$$\boxed{\vec{\sigma}_G(S/R) = \frac{ma^2}{2}\,\theta'\vec{z}.}$$

QUESTION 2

Déterminer le moment dynamique au point I de (S) dans son mouvement par rapport à R.

RÉPONSE

Deux méthodes sont possibles : on peut passer dı G au point I au niveau du moment cinétique ou au du moment dynamique.

Première méthode :

Les moments cinétiques $\vec{\sigma}_I(S/R)$ et $\vec{\sigma}_G(S/R)$ sont l la relation (3) :

$$\vec{\sigma}_I(S/R) = \vec{\sigma}_G(S/R) + m\vec{V}(G/R) \wedge \overrightarrow{GI}$$

sachant que :

$$\vec{V}(G/R) = \vec{V}(I \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{IG}$$

et que (S) roule sans glisser sur le plan (Π) :

$$\vec{V}(G/R) = \vec{0} + \theta'\vec{z} \wedge a\vec{x}$$

soit $$\vec{V}(G/R) = a\theta'\vec{y}$$

$$\vec{\sigma}_I(S/R) = \frac{ma^2}{2}\,\theta'\vec{z} + ma\theta'\vec{y} \wedge (-a\vec{x})$$

d'où $$\vec{\sigma}_I(S/R) = \frac{3}{2}\,ma^2\theta'\vec{z}.$$

Le moment dynamique $\vec{\delta}_I(S/R)$ s'obtient à pa moment cinétique $\vec{\sigma}_I(S/R)$ par la relation suivant tion 6) :

$$\vec{\delta}_I(S/R) = \left[\frac{d}{dt}\,\vec{\sigma}_I(S/R)\right]_R + m\vec{V}(I/R) \wedge \vec{V}(G/R$$

Comme cela a été signalé au *paragraphe 4*, le vitesse $\vec{V}(I/R)$ est uniquement égal à $\left[\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{OI}\right]_R$. C'e le point géométrique de contact entre (S) et (Π) qı considérer dans ce calcul, point qui n'appartient n ni à (Π).

Les points I et G ayant même vecteur vitesse par au repère R (l'axe $(I, \vec{x})$ a un mouvement de trai par rapport à R) le produit vectoriel $\vec{V}(I/R) \wedge \vec{V}(G$ nul. Alors :

$$\vec{\delta}_I(S/R) = \left[\frac{d}{dt}\,\vec{\sigma}_I(S/R)\right]_R$$

d'où $$\boxed{\vec{\delta}_I(S/R) = \frac{3}{2}\,ma^2\theta''\vec{z}.}$$

Deuxième méthode

Le moment dynamique $\vec{\delta}_G(S/R)$ s'obtient à pa moment cinétique $\vec{\sigma}_G(S/R)$ par la relation s (relation 8) :

$$\vec{\delta}_G(S/R) = \left[\frac{d}{dt}\,\vec{\sigma}_G(S/R)\right]_R$$

soit $$\boxed{\vec{\delta}_G(S/R) = \frac{ma^2}{2}\,\theta''\vec{z}}$$

les moments dynamique $\vec{\delta}_I(S/R)$ et $\vec{\delta}_G(S/R)$ sont la relation (relation 4) :

$$\vec{\delta}_I(S/R) = \vec{\delta}_G(S/R) + m\vec{\Gamma}(G/R) \wedge \overrightarrow{GI}$$

sachant que

$$\vec{\Gamma}(G/R) = \left[\frac{d}{dt}\,\vec{V}(G/R)\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\,a\theta'\vec{y}\right]_R$$

soit $$\vec{\Gamma}(G/R) = a\theta''\vec{y}$$

$$\vec{\delta}_I(S/R) = \frac{ma^2}{2}\,\theta''\vec{z} + ma\theta''\vec{y} \wedge -a\vec{x}$$

d'où $$\boxed{\vec{\delta}_I(S/R) = \frac{3}{2}\,ma^2\theta''\vec{z}}$$

REMARQUE

La décision d'écrire le moment dynamique au point I *sera expliquée au chapitre 2.*

13.2. DEUXIÈME CAS

Cas général

Le mouvement de (S) par rapport à R est quelconque.

L'intégrale $\int_{P\in S} \overrightarrow{AP}\wedge[\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP}]\mathrm{d}m$ de la relation (18) représente l'opérateur d'inertie de (S) au point A appliqué au vecteur $\vec{\Omega}(S/R)$.

Par conséquent l'expression du moment cinétique $\vec{\sigma}_A(S/R)$ écrite en (18) devient :

$$\boxed{\vec{\sigma}_A(S/R)=m\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(A\in S/R)+\vec{J}_A(S,\vec{\Omega}(S/R)).} \quad (21)$$

Cas particuliers

Distinguons deux cas particuliers ou le produit vectoriel est nul.

- A fixe dans R

alors $$\boxed{\vec{\sigma}_A(S/R)=\vec{J}_A(S,\vec{\Omega}(S/R)).} \quad (22)$$

- A confondu avec G

alors $$\boxed{\vec{\sigma}_G(S/R)=\vec{J}_G(S,\vec{\Omega}(S/R)).} \quad (23)$$

Application

Considérons une toupie (S) d'axe de symétrie matérielle $(O,\vec{z}_1)$ dont la pointe O reste immobile sur un plan (Π).

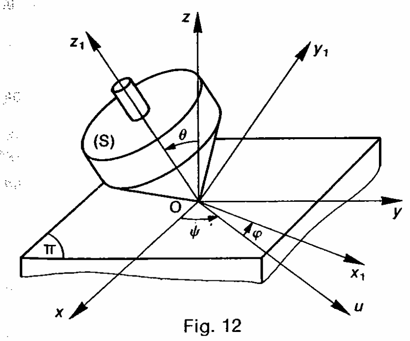


Fig. 12

Soit $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère lié au plan (Π), l'axe $(O,\vec{z})$ étant dirigé suivant la verticale ascendante.

Soit $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ un repère lié à (S). La matrice d'inertie de (S) au point O est :

$$[I_O(S)]=\begin{bmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & A & 0\\ 0 & 0 & C\end{bmatrix}_{(-,\,-,\,\vec{z}_1)}$$

La position de la base de R_1 par rapport à la base de R est définie par les trois angles d'Euler ψ, θ, φ. (Première base intermédiaire : $(\vec{u},\vec{v},\vec{z})$, deuxième base intermédiaire : $(\vec{u},\vec{w},\vec{z}_1)$).

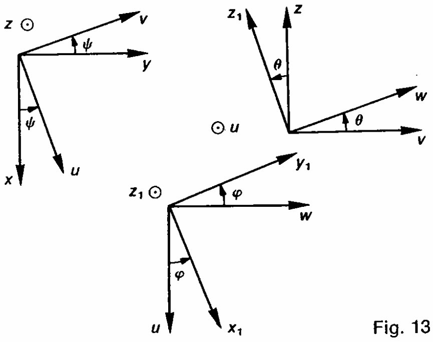


Fig. 13

QUESTION 1

Déterminer le moment cinétique au point O de (S) dans son mouvement par rapport à R.

RÉPONSE

D'après la relation (22) :

$$\vec{\sigma}_0(S/R)=\vec{J}_0(S,\vec{\Omega}(S/R)).$$

Le vecteur $\vec{\Omega}(S/R)$ a pour expression :

$$\vec{\Omega}(S/R)=\psi'\vec{z}+\theta'\vec{u}+\varphi'\vec{z}_1.$$

La multiplication de la matrice d'inertie par la matrice colonne associée au vecteur $\vec{\Omega}(S/R)$ donnera un résultat simple si on exprime ces deux matrices dans la base $(\vec{u},\vec{w},\vec{z}_1)$, avec

$$\vec{\Omega}(S/R)=\psi'(\cos\theta\vec{z}_1+\sin\theta\vec{w})+\theta'\vec{u}+\varphi'\vec{z}_1$$

soit

$$\vec{\Omega}(S/R)=\theta'\vec{u}+\psi'\sin\theta\vec{w}+(\varphi'+\psi'\cos\theta)\vec{z}_1$$

$$[\vec{\sigma}_0(S/R)]=\begin{bmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & A & 0\\ 0 & 0 & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta'\\ \psi'\sin\theta\\ \varphi'+\psi'\cos\theta\end{bmatrix}_{(\vec{u},\,\vec{w},\,\vec{z}_1)}$$

Par conséquent :

$$\boxed{\vec{\sigma}_0(S/R)=A(\theta'\vec{u}+\psi'\sin\theta\vec{w})+C(\varphi'+\psi'\cos\theta)\vec{z}_1.}$$

QUESTION 2

Déterminer le moment dynamique au point O de (S) dans son mouvement par rapport à R :

a) **en projection sur $\vec{z}$, soit $\vec{z}\cdot\vec{\delta}_0(S/R)$;**

b) **en projection sur $\vec{z}_1$, soit $\vec{z}_1\cdot\vec{\delta}_0(S/R)$;**

c) **en projection sur $\vec{u}$, soit $\vec{u}\cdot\vec{\delta}_0(S/R)$;**

(ce choix sera expliqué au *chapitre 2*).

RÉPONSE

Le point O étant fixe dans R, le moment dynamique se déduit du moment cinétique par la relation :

$$\vec{\delta}_0(S/R)=\left[\frac{d}{dt}\,\vec{\sigma}_0(S/R)\right]_R.$$

a) Pour déterminer la projection du moment dynamique sur $\vec{z}$ il ne faut pas dériver au préalable l'expression du moment cinétique (calculs fastidieux) mais procéder comme suit :

$$\vec{z}\cdot\vec{\delta}_0(S/R)=\vec{z}\cdot\left[\frac{d}{dt}\,\vec{\sigma}_0(S/R)\right]_R. \tag{24}$$

En remarquant que :

$$\left[\frac{d}{dt}\,\vec{z}\cdot\vec{\sigma}_0(S/R)\right]=\left[\frac{d\vec{z}}{dt}\right]_R\cdot\vec{\sigma}_0(S/R)+\vec{z}\cdot\left[\frac{d}{dt}\,\vec{\sigma}_0(S/R)\right]_R$$

le deuxième membre de la relation (24) s'écrit :

$$\vec{z}\cdot\left[\frac{d}{dt}\,\vec{\sigma}_0(S/R)\right]_R=\left[\frac{d}{dt}\,\vec{z}\cdot\vec{\sigma}_0(S/R)\right]-\left[\frac{d\vec{z}}{dt}\right]_R\cdot\vec{\sigma}_0(S/R),$$

le vecteur unitaire $\vec{z}$ étant fixe dans R, on a $\left[\frac{d\vec{z}}{dt}\right]_R=\vec{0}$

d'où $\quad \vec{z}\cdot\left[\frac{d}{dt}\,\vec{\sigma}_0(S/R)\right]_R=\left[\frac{d}{dt}\,\vec{z}\cdot\vec{\sigma}_0(S/R)\right]$

la relation (24) s'écrit donc :

$$\vec{z}\cdot\vec{\delta}_0(S/R)=\left[\frac{d}{dt}\,\vec{z}\cdot\vec{\sigma}_0(S/R)\right]$$

sachant que :

$$\vec{\sigma}_0(S/R)=A\left(\theta'\vec{u}+\psi'\sin\theta\vec{w}\right)+C(\varphi'+\psi'\cos\theta)\vec{z}_1$$

$$\vec{z}\cdot\vec{\sigma}_0(S/R)=A\psi'\sin^2\theta+C(\varphi'+\psi'\cos\theta)\cos\theta$$

alors

$$\boxed{\vec{z}\cdot\vec{\delta}_0(S/R)=\frac{d}{dt}\left[A\psi'\sin^2\theta+C(\varphi'+\psi'\cos\theta)\cos\theta\right].}$$

Expression qu'il faut bien se garder de dériver prématurément.

b) $\quad \vec{z}_1\cdot\vec{\delta}_0(S/R)=\vec{z}_1\cdot\left[\frac{d}{dt}\,\vec{\sigma}_0(S/R)\right]_R.$

Par le même raisonnement que précédemment on a la relation :

$$\vec{z}_1\cdot\vec{\delta}_0(S/R)=\left[\frac{d}{dt}\,\vec{z}_1\cdot\vec{\sigma}_0(S/R)\right]-\left[\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right]_R\cdot\vec{\sigma}_0(S/R).$$

Calculons $\left[\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right]_R$ en utilisant la base intermédiaire $(\vec{u},\vec{w},\vec{z}_1)$ dans laquelle $\vec{z}_1$ est constant.

$$\left[\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right]_R=\left[\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right]_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z}_1)}+\vec{\Omega}\big((\vec{u},\vec{w},\vec{z}_1)/R\big)\wedge\vec{z}_1$$

$$=\vec{0}+\left(\psi'\vec{z}+\theta'\vec{u}\right)\wedge\vec{z}_1$$

soit $\quad \left[\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right]_R=\psi'\sin\theta\vec{u}-\theta'\vec{w}.$

Par suite, on constate que le produit scalaire de $\left[\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right]_R$ avec $\vec{\sigma}_0(S/R)$ est nul, si bien que

$$\vec{z}_1\cdot\vec{\delta}_0(S/R)=\left[\frac{d}{dt}\,\vec{z}_1\cdot\vec{\sigma}_0(S/R)\right]$$

soit

$$\boxed{\vec{z}_1\cdot\vec{\delta}_0(S/R)=C\,\frac{d}{dt}\,(\varphi'+\psi'\cos\theta).}$$

c) $\vec{u}\cdot\vec{\delta}_0(S/R)=\vec{u}\cdot\left[\frac{d}{dt}\,\vec{\sigma}_0(S/R)\right]_R$

toujours par le même raisonnement :

$$\vec{u}\cdot\vec{\delta}_0(S/R)=\left[\frac{d}{dt}\,\vec{u}\cdot\vec{\sigma}_0(S/R)\right]-\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_R\cdot\vec{\sigma}_0(S/R)$$

$$\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_R=\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_{(\vec{u},\vec{v},\vec{z})}+\vec{\Omega}\big((\vec{u},\vec{v},\vec{z})/R\big)\wedge\vec{u}=\vec{0}+\big(\psi'\vec{z}\wedge\vec{u}$$

soit $\quad \left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_R=\psi'\vec{v},$

$$\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_R\cdot\vec{\sigma}_0(S/R)=A\psi'^2\sin\theta\cos\theta$$
$$-C\left(\varphi'+\psi'\cos\theta\right)\psi'\sin$$

Par suite :

$$\vec{u}\cdot\vec{\delta}_0(S/R)=A\theta''+\psi'\sin\theta\big[C(\varphi'+\psi'\cos\theta)-A\psi'\cos\theta$$

14. ÉNERGIE CINÉTIQUE D'UN SOLIDE

Soit un solide (S) de masse *m*, de centre d'inertie en mouvement par rapport à un repère R(O, $\vec{x}$, $\vec{y}$, Soit A *un point lié au solide* (S).
Par définition, l'énergie cinétique du solide (S) d son mouvement par rapport au repère R est :

$$T(S/R)=\frac{1}{2}\int_{P\in S}\left[\vec{V}(P/R)\right]^2 dm.$$

Si le point A est lié au solide (S), il existe er les vecteurs vitesse $\vec{V}(P/R)$ et $\vec{V}(A/R)$ la relatic

$$\vec{V}(P/R)=\vec{V}(A/R)+\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP}.$$

REMARQUES

— Pour bien préciser que le point A *est lié solide* (S) *nous noterons le vecteur vitesse point* A *par rapport au repère* R : $\vec{V}(A\in S/$
— Par commodité nous calculerons le doubl l'énergie cinétique.

Mettons le double de l'énergie cinétique sous forme :

$$2T(S/R)=\int_{P\in S}\vec{V}(P/R)\cdot\vec{V}(P/R)\,dm$$

et remplaçons le premier vecteur $\vec{V}(P/R)$ par expression en fonction de $\vec{V}(A\in S/R)$:

$$2T(S/R)=\int_{P\in S}\left[\vec{V}(A\in S/R)+\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP}\right]\cdot\vec{V}(P/R)$$

soit

$$2T(S/R)=\int_{P\in S}\vec{V}(A\in S/R)\cdot\vec{V}(P/R)\,dm+\int_{P\in S}\left[\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP}\right]\cdot\vec{V}(P/R)$$

la première intégrale s'écrit

$$\vec{V}(A\in S/R)\cdot\int_{P\in S}\vec{V}(P/R)\,dm$$

la deuxième intégrale s'écrit en inversant au préalable les signes scalaire et vectoriel du produit mixte situé sous le signe somme :

$$\vec{\Omega}(S/R)\cdot\int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R)\,dm$$

par suite :

$$2T(S/R)=\vec{V}(A\in S/R)\cdot\int_{P\in S}\vec{V}(P/R)\,\mathrm{d}m$$
$$+\vec{\Omega}(S/R)\cdot\int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R)\,dm.$$

Dans cette expression apparaissent les deux éléments de réduction au point A du *torseur cinétique* de (S) dans son mouvement par rapport à R, ainsi que les deux éléments de réduction au point A du *torseur cinématique* du mouvement de (S) par rapport à R.

Rappel

Soient deux torseurs

$$\{\mathcal{C}_1\}=\left.{}_A\middle\{\begin{matrix}\vec{R}(\mathcal{C}_1)\\ \vec{M}_A(\mathcal{C}_1)\end{matrix}\right\}\quad \text{et}\quad \{\mathcal{C}_2\}=\left.{}_A\middle\{\begin{matrix}\vec{R}(\mathcal{C}_2)\\ \vec{M}_A(\mathcal{C}_2)\end{matrix}\right\}.$$

***exprimés au même point* A.**
On appelle *produit des deux torseurs* $\{\mathcal{C}_1\}$ et $\{\mathcal{C}_2\}$ le scalaire suivant :

$$\boxed{\{\mathcal{C}_1\}\cdot\{\mathcal{C}_2\}=\vec{R}(\mathcal{C}_1)\cdot\vec{M}_A(\mathcal{C}_2)+\vec{R}(\mathcal{C}_2)\cdot\vec{M}_A(\mathcal{C}_1).}$$

Le produit des deux torseurs est indépendant du point choisi pour exprimer les torseurs.

Par conséquent, le double de l'énergie cinétique du solide (S) dans son mouvement par rapport au repère R est égal au produit de son torseur cinétique par son torseur cinématique

$$\boxed{2T(S/R)=\{\mathcal{C}(S/R)\}\cdot\{\mathcal{V}(S/R)\}}$$

ce qui correspond à :

$$\boxed{\begin{aligned}&2T(S/R)=\\ &\quad m\vec{V}(G/R)\cdot\vec{V}(A\in S/R)+\vec{\Omega}(S/R)\cdot\vec{\sigma}_A(S/R).\end{aligned}}$$

Cas particuliers

Distinguons les deux cas particuliers suivants :
Premier cas : A *fixe dans* R. Alors

$$\boxed{2T(S/R)=\vec{\Omega}(S/R)\cdot\vec{\sigma}_A(S/R)}$$

considérons les deux sous-cas suivants :

a) $\vec{\Omega}(S/R)$ *de la forme* $\theta'\vec{z}$ (voir *paragraphe 13*) d'après la relation 19 :

$$\vec{\sigma}_A(S/R)=-E_1\theta'\vec{x}_1-D_1\theta'\vec{y}_1+I_{Az}\theta'\vec{z}$$

par suite :

$$\boxed{2T(S/R)=I_{Az}\theta'^2.}$$

* *b*) $\vec{\Omega}(S/R)$ *quelconque* alors

$$\vec{\sigma}_A(S/R)=\vec{\mathcal{J}}_A\big(S,\vec{\Omega}(S/R)\big)\ \text{(relation 22)}$$

et $$\boxed{2T(S/R)=\vec{\Omega}(S/R)\cdot\vec{\mathcal{J}}_A\big(S,\vec{\Omega}(S/R)\big).}$$

Deuxième cas : A *confondu avec* G : Alors

$$2T(S/R)=m\big[\vec{V}(G/R)\big]^2+\vec{\Omega}(S/R)\cdot\vec{\sigma}_G(S/R)$$

Considérons les deux sous-cas précédents.

a) $\vec{\Omega}(S/R)$ *de la forme* $\theta'\vec{z}$ (voir *paragraphe 13*) d'après la relation 19 :

$$\vec{\sigma}_G(S/R)=-E_1\theta'\vec{x}_1-D_1\theta'\vec{y}_1+I_{Gz}\theta'\vec{z}$$

par suite :

$$\boxed{2T(S/R)=m\big[\vec{V}(G/R)\big]^2+I_{Gz}\theta'^2.}$$

* *b*) $\vec{\Omega}(S/R)$ *quelconque* alors

$$\vec{\sigma}_G(S/R)=\vec{\mathcal{J}}_G\big(S,\vec{\Omega}(S/R)\big)$$
(relation 23)

et

$$\boxed{2T(S/R)=m\big[\vec{V}(G/R)\big]^2+\vec{\Omega}(S/R)\cdot\vec{\mathcal{J}}_G\big(S,\vec{\Omega}(S/R)\big).}$$

Application 1

Complétons la première application du *paragraphe 13* (cylindre de révolution sur un plan incliné) par la question suivante.

QUESTION 3

Déterminer l'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à R.

RÉPONSE

(S) roulant sans glisser sur (Π) : $\vec{V}(I\in S/R)=\vec{0}$, par suite :

$$2T(S/R)=\vec{\Omega}(S/R)\cdot\vec{\sigma}_I(S/R)$$

soit avec

$$\vec{\Omega}(S/R)=\theta'\vec{z}\ \text{ et }\ \vec{\sigma}_I(S/R)=\frac{3}{2}\,ma^2\theta'\vec{z}$$

$$\boxed{2T(S/R)=\frac{3}{2}\,ma^2\theta'^2.}$$

* Application 2

Complétons la deuxième application du *paragraphe 13* (toupie) par la question suivante :

QUESTION 3

Déterminer l'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à R.

RÉPONSE

Le point O étant fixe dans R :

$$2T(S/R) = \vec{\Omega}(S/R)\cdot\vec{\sigma}_0(S/R)$$

avec $\vec{\Omega}(S/R) = \psi'\vec{z} + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{z}_1$

ou $\vec{\Omega}(S/R) = \theta'\vec{u} + \psi' \sin\theta\vec{w} + (\varphi' + \psi' \cos\theta)\vec{z}_1$

et $\vec{\sigma}_0(S/R) = A(\theta'\vec{u} + \psi' \sin\theta\vec{w}) + C(\varphi' + \psi' \cos\theta)\vec{z}_1$

Le double de l'énergie cinétique de (S) dans mouvement par rapport à R est :

$$\boxed{2T(S/R) = A(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta) + C(\varphi' + \psi' \cos\theta)^2.}$$

A SAVOIR

1. Les éléments de réduction du *torseur cinétique* d'un ensemble matériel (E) de masse *m*, de centre d'inertie G, dans son mouvement par rapport à un repère R :

$$\{\mathcal{C}(E/R)\} = {}_{A}\left\{\begin{array}{l} \int_{P\in E} \vec{V}(P/R)\,dm = m\vec{V}(G/R) \\ \int_{P\in E} \overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R)\,dm = \vec{\sigma}_A(E/R) \end{array}\right\}$$

2. Les éléments de réduction du *torseur dynamique* de cet ensemble matériel (E) :

$$\{\mathcal{D}(E/R)\} = {}_{A}\left\{\begin{array}{l} \int_{P\in E} \vec{\Gamma}(P/R)\,dm = m\vec{\Gamma}(G/R) \\ \int_{P\in E} \overrightarrow{AP}\wedge\vec{\Gamma}(P/R)\,dm = \vec{\delta}_A(E/R) \end{array}\right\}$$

3. La relation entre le *moment dynamique* et le *moment cinétique* de l'ensemble matériel (E) :

$$\vec{\delta}_A(E/R) = \left[\frac{d}{dt}\,\vec{\sigma}_A(E/R)\right]_R + m\vec{V}(A/R)\wedge\vec{V}(G/R)$$

si A est fixe dans R :

$$\vec{\delta}_A(E/R) = \left[\frac{d}{dt}\,\vec{\sigma}_A(E/R)\right]_R.$$

Si A est confondu avec G :

$$\vec{\delta}_G(E/R) = \left[\frac{d}{dt}\,\vec{\sigma}_G(E/R)\right]_R.$$

4. L'*énergie cinétique* de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport au repère R :

$$T(E/R) = \frac{1}{2}\int_{P\in S}\left[\vec{V}(P/R)\right]^2 dm$$

∗ 5. L'*opérateur d'inertie* d'un solide (S), au point O, est l'opérateur qui, à tout vecteur $\vec{u}$ fait correspondre le vecteur :

$$\vec{\mathcal{J}}_0(S, \vec{u}) = \int_{P\in S} \overrightarrow{OP}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP})\,dm.$$

∗ 6. La *matrice d'inertie* du solide (S) au point O, relativement à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

avec

$$A = \int_{P\in S}(y^2+z^2)\,dm \qquad B = \int_{P\in S}(z^2+x^2)\,dm$$

$$C = \int_{P\in S}(x^2+y^2)\,dm \qquad D = \int_{P\in S} yz\,dm$$

$$E = \int_{P\in S} zx\,dm \qquad F = \int_{P\in S} xy\,dm.$$

∗ 7. Le *moment d'inertie* du solide (S) par rapp à l'axe $\Delta(O, \vec{i})$:

$$I(S/\Delta) = \vec{i}\cdot\vec{\mathcal{J}}_0(S, \vec{i}).$$

8. *Théorème de Huyghens*

(S) : solide de masse *m*, de centre d'inertie
Relations entre les moments d'inertie au point et au point G :

$$A = A_G + m(b^2+c^2)$$

$$B = B_G + m(c^2+a^2)$$

$$C = C_G + m(a^2+b^2).$$

Relations entre les produits d'inertie au point et au point G :

$$D = D_G + mbc$$

$$E = E_G + mca$$

$$F = F_G + mab.$$

Sachant que $\overrightarrow{OG} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$ dans la b. $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ considérée.

9. Le *moment cinétique* du solide (S), au point dans son mouvement par rapport au repère

Premier cas : $\vec{\Omega}(S/R)$ de la forme $\theta'\vec{z}$

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = m\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(A\in S/R) - E_1\theta'\vec{x}_1 - D_1\theta'\vec{y}_1 + I_{A}$$

si A est fixe dans R et $E_1 = 0$, $D_1 = 0$:

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = I_{Az}\theta'\vec{z}\,;$$

si A est confondu avec G et $E_1 = 0$, $D_1 = 0$:

$$\vec{\sigma}_G(S/R) = I_{Gz}\theta'\vec{z}.$$

∗ *Deuxième cas :* $\vec{\Omega}(S/R)$ quelconque

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = m\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(A\in S/R) + \vec{\mathcal{J}}_A(S, \vec{\Omega}(S/R)$$

10. Le double de l'*énergie cinétique* du solide est égal au produit de son torseur cinétique son torseur cinématique. Soit :

$$2T(S/R) = \{\mathcal{C}(S/R)\}\{\mathcal{V}(S/R)\}$$

Premier cas particulier : $\vec{\Omega}(S/R)$ de la forme

si A est fixe dans R :

$$2T(S/R) = I_{Az}\theta'^2$$

si A est confondu avec G :

$$2T(S/R) = m\left[\vec{V}(G/R)\right]^2 + I_{Gz}\theta'^2.$$

∗ *Deuxième cas particulier :* $\vec{\Omega}(S/R)$ quelcon

si A est fixe dans R :

$$2T(S/R) = \vec{\Omega}(S/R)\cdot\vec{\mathcal{J}}_A(S, \vec{\Omega}(S/R))$$

si A est confondu avec G :

$$2T(S/R) = m\left[\vec{V}(G/R)\right]^2 + \vec{\Omega}(S/R)\cdot\vec{\mathcal{J}}_G(S, \vec{\Omega}(S/$$

PROBLÈME RÉSOLU

Le régulateur de la vitesse de rotation d'une machine thermique est représenté *figure 14.*
Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au corps (S_0) du régulateur.

La pièce (S_1) supportant les masselottes (S_2) et (S'_2) (symétrique de (S_2)) a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$ avec (S_0). Soit $R_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à (S_1). Posons : $\alpha = (\vec{y}, \vec{y}_1)$.

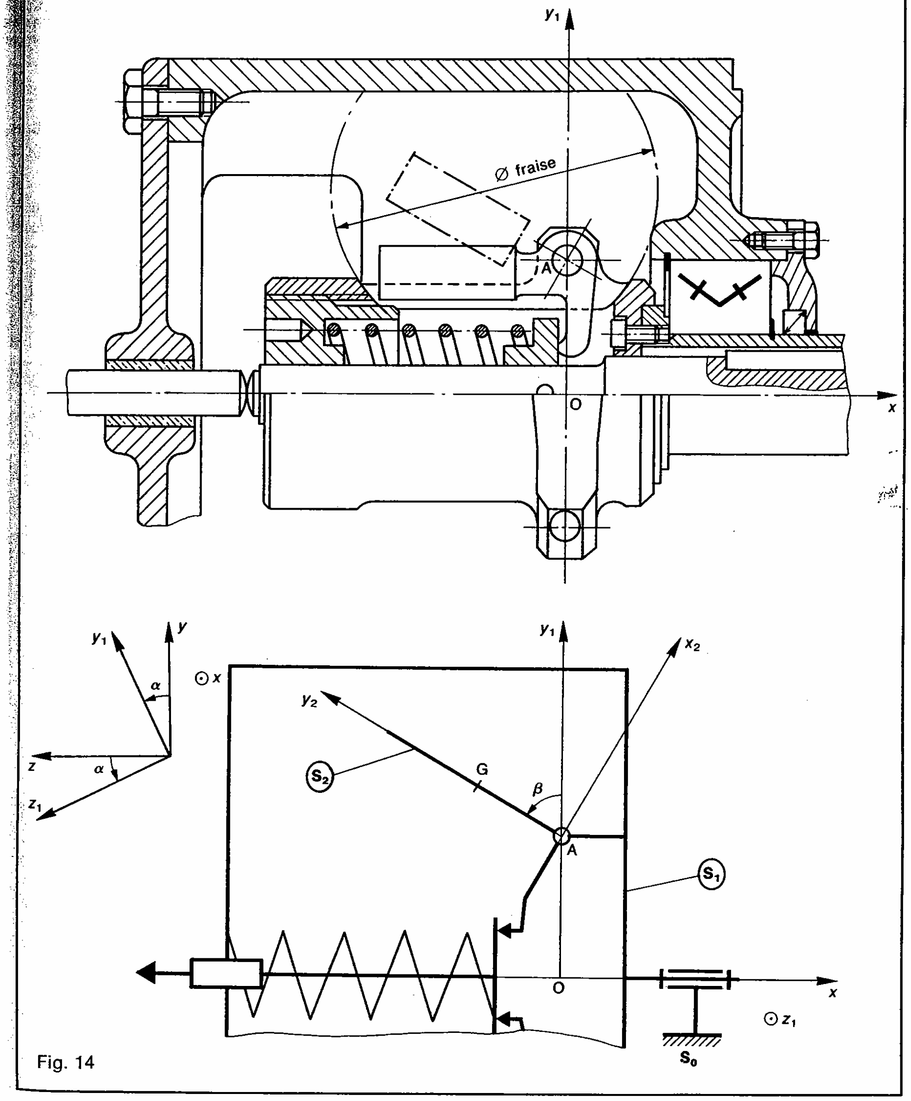

y₁
Ø fraise
A
O
x
y₁
y
⊙x
α
z
α
z₁
y₁
x₂
y₂
S₂
G
β
A
S₁
O
x
⊙z₁
S₀

Fig. 14

La masselotte (S_2) de masse m, de centre d'inertie G, a une liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_1)$ avec (S_1), telle que : $\overrightarrow{OA} = a\vec{y}_1$ $(a > 0)$.
Soit $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ un repère lié à (S_2), tel que $\overrightarrow{AG} = b\vec{y}_2$ $(b > 0)$.
Posons : $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$. On admet que β est constant pendant la phase de mouvement étudié.

Première partie

Calcul approché : on suppose la masse de (S_2) concentrée en son centre d'inertie.

QUESTION

Déterminer la projection sur $\vec{z}_1$ du moment dynamique, au point A, de (S_2) dans son mouvement par rapport à R : $\vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_A(S_2/R)$.

RÉPONSE

Le torseur dynamique du mouvement de (S_2) par rapport à R s'écrit au point G (voir *paragraphe 3.3*) :

$$\{\mathcal{D}(S_2/R)\} = {}_G\begin{Bmatrix} m\vec{\Gamma}(G/R) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

par conséquent (relation 4) :

$$\vec{\delta}_A(S_2/R) = m\vec{\Gamma}(G/R) \wedge \overrightarrow{GA}$$

ou :

$$\vec{\delta}_A(S_2/R) = m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{\Gamma}(G/R) \qquad (25)$$

pour obtenir $\vec{\Gamma}(G/R)$ calculons au préalable $\vec{V}(G/R)$ en utilisant la relation entre les vecteurs vitesse des deux points A et G du solide (S_2) :

$$\vec{V}(G/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S_2/R) \wedge \overrightarrow{AG} \qquad (26)$$

par définition $\vec{V}(A/R) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}\right]_R$, soit

$$\vec{V}(A/R) = \left[\frac{d}{dt}a\vec{y}_1\right]_R$$

en utilisant la base de R_1 :

$$\vec{V}(A/R) = \left[\frac{d}{dt}a\vec{y}_1\right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge a\vec{y}_1$$

$a\vec{y}_1$ est un vecteur constant dans la base de R_1 et $\vec{\Omega}(R_1/R) = \alpha'\vec{x}$. Par conséquent :

$$\vec{V}(A/R) = \alpha'\vec{x} \wedge a\vec{y}_1$$

soit $\qquad \vec{V}(A/R) = a\alpha'\vec{z}_1.$

Par suite la relation (26) s'écrit, sachant que $\vec{\Omega}(S_2/R) = \alpha'\vec{x}$ et $\overrightarrow{AG} = b\vec{y}_2$

$$\vec{V}(G/R) = a\alpha'\vec{z}_1 + \alpha'\vec{x} \wedge b\vec{y}_2$$

comme $\vec{x} \wedge \vec{y}_2 = \cos\beta\,\vec{z}_1$

$$\vec{V}(G/R) = (a + b\cos\beta)\,\alpha'\vec{z}_1.$$

Calculons ensuite $\vec{\Gamma}(G/R)$. Par définition $\vec{\Gamma}(G/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}(G/R)\right]_R$, soit

$$\vec{\Gamma}(G/R) = \left[\frac{d}{dt}(a + b\cos\beta)\,\alpha'\vec{z}_1\right]_R$$

$(a + b\cos\beta)$ étant constant :

$$\vec{\Gamma}(G/R) = (a + b\cos\beta)\left[\frac{d}{dt}\alpha'\vec{z}_1\right]_R$$

en utilisant la base de R_1, on peut écrire qu

$$\left[\frac{d}{dt}\alpha'\vec{z}_1\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\alpha'\vec{z}_1\right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \alpha'\vec{z}_1$$

soit

$$\left[\frac{d}{dt}\alpha'\vec{z}_1\right]_R = \alpha''\vec{z}_1 + \alpha'\vec{x} \wedge \alpha'\vec{z}_1$$

ou

$$\left[\frac{d}{dt}\alpha'\vec{z}_1\right]_R = \alpha''\vec{z}_1 - \alpha'^2\vec{y}_1$$

par suite :

$$\vec{\Gamma}(G/R) = (a + b\cos\beta)(\alpha''\vec{z}_1 - \alpha'^2\vec{y}_1)$$

le moment dynamique $\vec{\delta}_A(S_2/R)$ défini en (2 s'écrit donc :

$$\vec{\delta}_A(S_2/R) = mb\vec{y}_2 \wedge (a + b\cos\beta)(\alpha''\vec{z}_1 - \alpha'^2\vec{y}_1$$

soit avec $\qquad \vec{y}_2 \wedge \vec{z}_1 = \vec{x}_2$

et $\qquad \vec{y}_2 \wedge \vec{y}_1 = -\sin\beta\,\vec{z}_1$

$$\vec{\delta}_A(S_2/R) = mb\,(a + b\cos\beta)(\alpha''\vec{x}_2 + \alpha'^2\sin\beta$$

par suite, la projection sur $\vec{z}_1$ de ce mom dynamique est égale à :

$$\boxed{\vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_A(S_2/R) = mb\,(a + b\cos\beta)\,\alpha'^2\sin\beta.}$$

* **Deuxième partie** *(indépendante de la p mière partie).*
La matrice d'inertie de (S_2) au point A dans base de R_2 est la suivante :

$$[I_A(S_2)] = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)}$$

((S_2) a pour plan de symétrie matérielle le p $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$).

QUESTION 1

Déterminer le moment cinétique au point A de (dans son mouvement par rapport à R : $\vec{\sigma}_A(S_2/$

RÉPONSE

L'expression de $\vec{\sigma}_A(S_2/R)$ est donnée par relation (21) du *paragraphe 13.2.*

$$\vec{\sigma}_A(S_2/R) = m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A \in S_2/R) + \vec{J}_A(S_2, \vec{\Omega}(S_2/R)) \qquad ($$

sachant que $\overrightarrow{AG} = b\,\vec{y}_2$ et $\vec{V}(A \in S_2/R) = a\alpha'\vec{z}_1$ premier terme s'écrit :

$$m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A \in S_2/R) = mb\,\vec{y}_2 \wedge a\alpha'\vec{z}_1$$

soit

$$m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A \in S_2/R) = mab\alpha'\,\vec{x}_2 \qquad ($$

le deuxième terme de la relation (27) s'obti par le produit de la matrice d'inertie de (S_2)

la matrice colonne associée au vecteur $\vec{\Omega}(S_2/R)$. Comme

$$\vec{\Omega}(S_2/R)=\alpha'\vec{x}$$

soit dans la base de R_2 :

$$\vec{\Omega}(S_2/R)=\alpha'\cos\beta\,\vec{x}_2-\alpha'\sin\beta\,\vec{y}_2$$

la matrice colonne associée au vecteur $\vec{J}_A(S_2,\vec{\Omega}(S_2/R))$ est égale à :

$$[\vec{J}_A(S_2,\vec{\Omega}(S_2/R))]=\begin{bmatrix}A & -F & 0\\ -F & B & 0\\ 0 & 0 & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha'\cos\beta\\ -\alpha'\sin\beta\\ 0\end{bmatrix}_{(\vec{x}_2,\,\vec{y}_2,\,\vec{z}_1)}$$

d'où

$$\vec{J}_A(S_2,\vec{\Omega}(S_2/R))=(A\cos\beta+F\sin\beta)\alpha'\vec{x}_2-(F\cos\beta+B\sin\beta)\alpha'\vec{y}_2$$

avec le résultat obtenu en (28) le moment cinétique $\vec{\sigma}_A(S_2/R)$ défini en (27) s'écrit :

$$\boxed{\vec{\sigma}_A(S_2/R)=(mab+A\cos\beta+F\sin\beta)\alpha'\vec{x}_2-(F\cos\beta+B\sin\beta)\alpha'\vec{y}_2.}$$

QUESTION 2

Déterminer la projection sur $\vec{z}_1$ du moment dynamique au point A, de (S_2) dans son mouvement par rapport à R : $\vec{z}_1\cdot\vec{\delta}_A(S_2/R)$.

RÉPONSE

L'expression de $\vec{\delta}_A(S_2/R)$ en fonction de $\vec{\sigma}_A(S_2/R)$ est donnée par la relation (6) du *paragraphe 4.*

$$\vec{\delta}_A(S_2/R)=\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_A(S_2/R)\right]_R+m\vec{V}(A/R)\wedge\vec{V}(G/R)$$

soit en projection sur $\vec{z}_1$:

$$\vec{z}_1\cdot\vec{\delta}_A(S_2/R)=\vec{z}_1\cdot\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_A(S_2/R)\right]_R+m(\vec{z}_1,\vec{V}(A/R),\vec{V}(G/R))$$

remarquons tout de suite que le deuxième terme est nul, car le produit mixte

$$(\vec{z}_1,\vec{V}(A/R),\vec{V}(G/R))$$

a deux vecteurs de même direction : $\vec{z}_1$ et $\vec{V}(A/R)=a\alpha'\vec{z}_1$.

Pour calculer le premier terme écrivons que :

$$\vec{z}_1\cdot\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_A(S_2/R)\right]_R=\left[\frac{d}{dt}\vec{z}_1\cdot\vec{\sigma}_A(S_2/R)\right]-\left[\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right]_R\cdot\vec{\sigma}_A(S_2/R)$$

$\vec{z}_1\cdot\vec{\sigma}_A(S_2/R)=0$ et que $\left[\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right]_R=-\alpha'\vec{y}_1$

$$\vec{z}_1\cdot\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_A(S_2/R)\right]_R=(mab+A\cos\beta+F\sin\beta)\alpha'^2\sin\beta-(F\cos\beta+B\sin\beta)\alpha'^2\cos\beta$$

soit

$$\vec{z}_1\cdot\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_A(S_2/R)\right]_R=[mab\sin\beta+(A-B)\sin\beta\cos\beta+F(\sin^2\beta-\cos^2\beta)]\alpha'^2.$$

Par conséquent le moment dynamique $\vec{\delta}_A(S_2/R)$ s'écrit en projection sur $\vec{z}_1$.

$$\boxed{\vec{z}_1\cdot\vec{\delta}_A(S_2/R)=[mab\sin\beta+(A-B)\sin\beta\cos\beta+F(\sin^2\beta-\cos^2\beta)]\alpha'^2.}$$

REMARQUE

> *Le calcul de $\vec{z}_1\cdot\vec{\delta}_A(S_2/R)$ est celui qu'il faut faire pour déterminer l'action mécanique de la masselotte (S_2) sur la tige du régulateur.*

CONSEILS POUR LA RÉSOLUTION

Le calcul du moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe se ramène très souvent au calcul d'une intégrale simple si l'on met en évidence les relations entre les différents moments d'inertie au point considéré (moments d'inertie par rapport à un point, un axe, un plan).

Les expressions du moment cinétique et de l'énergie cinétique en fonction des moments et des produits d'inertie sont applicables uniquement à *un seul solide*. Par contre, la relation (6) entre le moment dynamique et le moment cinétique est valable pour un *ensemble matériel quelconque*.

* 3. Choisir soigneusement le point et la base où l'on exprimera la matrice d'inertie d'un solide pour qu'elle soit la plus simple possible.

* 4. Pour calculer par exemple $\vec{z}\cdot\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_A(S/R)\right]_R$ il est pratiquement toujours plus simple de calculer

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{z}\cdot\vec{\sigma}_A(S/R)\right]_R-\left[\frac{d\vec{z}}{dt}\right]_R\cdot\vec{\sigma}_A(S/R)$$

* 5. Avant de multiplier deux matrices, vérifier qu'elles sont bien exprimées dans la même base.

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 — Déterminer les moments d'inertie par rapport aux axes du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié aux solides (S) suivants, homogènes et de masse m :

a) (S) est un disque de centre O, de rayon a, d'axe $(O, \vec{z})$, supposé d'épaisseur négligeable.

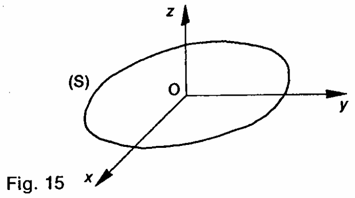


Fig. 15

b) (S) est un demi-disque de centre O, de rayon a, d'axe $(O, \vec{z})$, d'axe de symétrie $(O, \vec{x})$, supposé d'épaisseur négligeable.

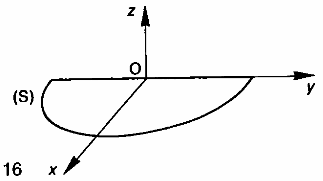


Fig. 16

c) (S) est une sphère pleine de centre O, de rayon a.

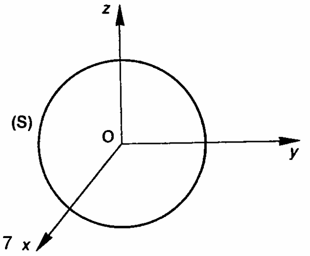


Fig. 17

d) (S) est une demi-sphère pleine de centre O, de rayon a, d'axe de symétrie $(O, \vec{z})$.

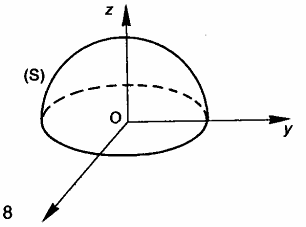


Fig. 18

RÉPONSES

a) $I_{Oz} = \frac{ma^2}{2}$ et $I_{Ox} = I_{Oy} = \frac{1}{2} I_{Oz} = \frac{ma^2}{4}$.

b) Les moments d'inertie sont la moitié de c calculés précédemment, mais la masse surfacique demi-disque est le double de celle du disque d question *a*). Par conséquent les résultats sont mêmes.

c) $I_{Ox} = I_{Oy} = I_{Oz} = \frac{2}{5} ma^2$.

d) Mêmes résultats qu'à la question précédente.

2 — Une pale d'hélicoptère est schématisée par plaque rectangulaire (S) de largeur a, de longueur d'épaisseur négligeable.

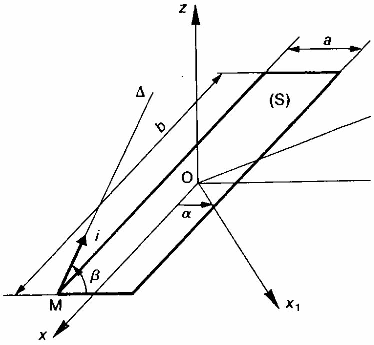


Fig. 19

(S) est homogène, de masse m et de centre d'iner Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à (S) tel que $(O, \vec{x})$ soit parallèle au plus grand côté du rect et l'axe $(O, \vec{z})$ perpendiculaire au plan du rect

QUESTIONS

1° Déterminer les moments d'inertie de (S) par ra aux axes du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

2° Déterminer les moments et les produits d'iner (S) par rapport aux axes du repère $(M, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, t $\overrightarrow{OM} = \frac{b}{2}\vec{x} - \frac{a}{2}\vec{y}$.

$*$ 3° Déterminer la matrice d'inertie de (S) au po dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

$*$ 4° Déterminer la matrice d'inertie de (S) au po dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ telle que $(\vec{x}, \vec{x}_1) = \alpha$.

$*$ 5° Déterminer la matrice d'inertie de (S) au $M\left(\frac{b}{2}, -\frac{a}{2}, 0\right)$, dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

*** 6° Déterminer le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe de rotation de la pale $\Delta(M, \vec{i})$, tel que $\vec{i} = \cos\beta\vec{y} + \sin\beta\vec{z}$.**

RÉPONSES

1° $I_{Ox} = \frac{ma^2}{12}$, $I_{Oy} = \frac{mb^2}{12}$, $I_{Oz} = \frac{m}{12}(a^2+b^2)$.

2° $A = \frac{ma^2}{3}$, $B = \frac{mb^2}{3}$, $C = \frac{m}{3}(a^2+b^2)$,

$$D=0,\ E=0,\ F=-\frac{mab}{4}.$$

3°

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mb^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2+b^2) \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

4° La matrice d'inertie est de la forme :

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})}$$

avec $A = \frac{m}{12}(a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha)$

$B = \frac{m}{12}(a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)$

$C = \frac{m}{12}(a^2+b^2)$

$F = \frac{m}{12}(a^2-b^2)\sin\alpha\cos\alpha.$

5°

$$[I_M(S)] = \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{3} & \frac{mab}{4} & 0 \\ \frac{mab}{4} & \frac{mb^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{3}(a^2+b^2) \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

6° $I(S/\Delta) = \frac{m}{3}(b^2 + a^2\sin^2\beta)$.

3 — La *figure 20* représente un bras manipulateur destiné à déplacer, sur une chaîne de moulage, des carters en alliage léger de boîte de vitesses.

Il est constitué du bras principal ③ de longueur $l = 1\,700$ mm, en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$ avec la tourelle d'orientation ②, elle-même en liaison pivot d'axe $(O, \vec{y}_2)$ avec le socle ①. Soit $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ le repère lié à la tourelle ② et $R_3(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z})$ le repère lié au bras ③. Un dispositif de préhension ⑤ est articulé à l'autre extrémité du bras par une liaison pivot d'axe $(M, \vec{z})$. Ce dispositif comporte un tube dont une extrémité est boulonnée sur l'arbre de la liaison pivot. Une pince à commande hydraulique est fixée à l'autre extrémité du tube. Soit $R_5(M, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z})$, le repère lié au dispositif de préhension ⑤. Nous assimilerons l'ensemble {tube-pince-carter} à une masse ponctuelle $m = 45$ kg située au point G, tel que

$$\overrightarrow{MG} = x\vec{x}_5 + y\vec{y}_5 + z\vec{z}.$$

Le but de l'étude est de déterminer la projection sur l'axe $(M, \vec{z})$ du moment dynamique du dispositif de

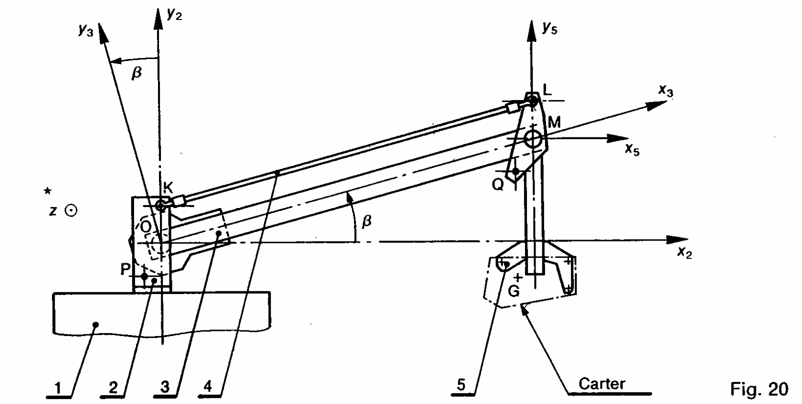


Fig. 20

préhension afin de calculer, par la suite, les actions mécaniques exercées en L par la biellette ④, de même longueur que le bras, et qui assure la verticalité du dispositif quelque soit la position angulaire du bras.

QUESTIONS

1° Déterminer le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(G/2)$ du centre d'inertie G par rapport au socle ②, lorsque l'accélération angulaire du bras ③ est $\beta'' = 2$ rad/s² et sa vitesse de rotation $\beta' = 2{,}5$ rad/s.

2° Déterminer la projection sur $\vec{z}$ du moment dynamique au point M, du dispositif de préhension dans son mouvement par rapport au socle ②, lorsque la position du bras est telle que $\beta = 30°$. On donne :

$$x = -60 \text{ mm}, \quad y = -620 \text{ mm}, \quad z = 30 \text{ mm}.$$

RÉPONSES

1° $\vec{\Gamma}(G/2) = l\beta''\vec{y}_3 - l\beta'^2\vec{x}_3$

$\vec{\Gamma}(G/2) = 3{,}4\vec{y}_3 - 10{,}625\vec{x}_3$ (en m/s²).

2° $\vec{z}\cdot\vec{\delta}_M(5/2) = m\left[x(l\beta''\cos\beta - l\beta'^2\sin\beta) + y(l\beta''\sin\beta + l\beta'^2\cos\beta)\right]$

$\vec{z}\cdot\vec{\delta}_M(5/2) = -6{,}617$ N·m.

***4** — Calculs de cinétique préliminaires à l'étude d'une roue présentant un balourd.

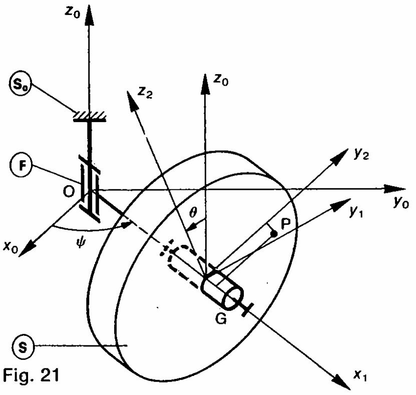


Fig. 21

Le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au chassis (S_0). L'axe $(O, \vec{z}_0)$ est dirigé suivant la verticale ascendante. La fusée (F) a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec (S_0). Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ un repère lié à (F), l'axe $(O, \vec{x}_1)$ étant dirigé suivant l'axe de la fusée. On pose : $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$.

Notons I le moment d'inertie de (F) par rapport à l'. $(O, \vec{z}_0)$.
La roue (S) a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x}_1)$ avec fusée (F).
(S) est assimilée à un solide de révolution d'. $(O, \vec{x}_1)$, de masse M et de centre d'inertie G. $R_2(G, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère lié à (S). On pose $\overrightarrow{OG} =$ et $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$.
On désigne par A, B, B les moments princip d'inertie de (S) au point G.
Le point P schématisant le balourd, est un p matériel de masse m lié à (S). La position de P d (S) est définie par $\overrightarrow{OP} = d\vec{x}_1 + r\vec{y}_2$.

QUESTIONS

1° Déterminer en projection sur $\vec{z}_0$ le moment cinéti au point O de la fusée (F) dans son mouvement rapport à R_0 : $\vec{z}_0\cdot\vec{\sigma}_0(F/R_0)$.

2° Déterminer le moment cinétique au point O de roue (S) dans son mouvement par rapport à $\vec{\sigma}_0(S/R_0)$.

3° Déterminer le moment cinétique au point O balourd P dans son mouvement par rapport à $\vec{\sigma}_0(P/R_0)$.

4° Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble const par (F), (S) et P dans leur mouvement par rappo R_0 : $T(F, S, P/R_0)$.

RÉPONSES

1° $\vec{z}_0\cdot\vec{\sigma}_0(F/R_0) = I\psi'$.

2° $\vec{\sigma}_0(S/R_0) = A\theta'\vec{x}_1 + (B + Ml^2)\psi'\vec{z}_0$.

3° $\vec{\sigma}_0(P/R_0) = m\left[d^2\psi'\vec{z}_0 - rd\,\theta'\vec{y}_2 + r(r\theta' - d\psi'\sin\theta)\,\vec{x}_1 + r^2\psi'\cos\theta\right.$

4° $2T(F, S, P/R_0)$

$= \left[I + B + Ml^2 + m(d^2 + r^2\cos^2\theta)\right]\psi'^2 + (A + mr^2)$
$- 2mrd\,\psi'\theta'$ si

*5 — Calcul du moment cinétique et de l'éne cinétique d'un rouleau conique (S), d'un roulem dont les deux bagues (S_1) et (S_2) tournent par rap au bâti (S_0) (non représenté) *(figure 22).*

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti (S_0). La ba intérieure (S_1) et la bague extérieure (S_2) ont une liai pivot d'axe $(O, \vec{x})$ avec (S_0). On pose :

$$\begin{cases} \vec{\Omega}(S_1/R) = \omega_1\vec{x} \\ \vec{\Omega}(S_2/R) = \omega_2\vec{x}. \end{cases}$$

Le rouleau conique (S), de centre d'inertie G et masse m, roule sans glisser sur (S_1) et (S_2). $R_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère tel que :

$$\overrightarrow{OG} = r\vec{y}_1 \qquad (r > 0).$$

Posons $\theta = (\vec{y}, \vec{y}_1)$.
(S) est de révolution matérielle autour de l'axe (G, . Définissons le repère $R_2(G, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ et pos $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_2)$ (α est constant) et

$$\vec{\Omega}(S/R_2) = \omega\vec{x}_2.$$

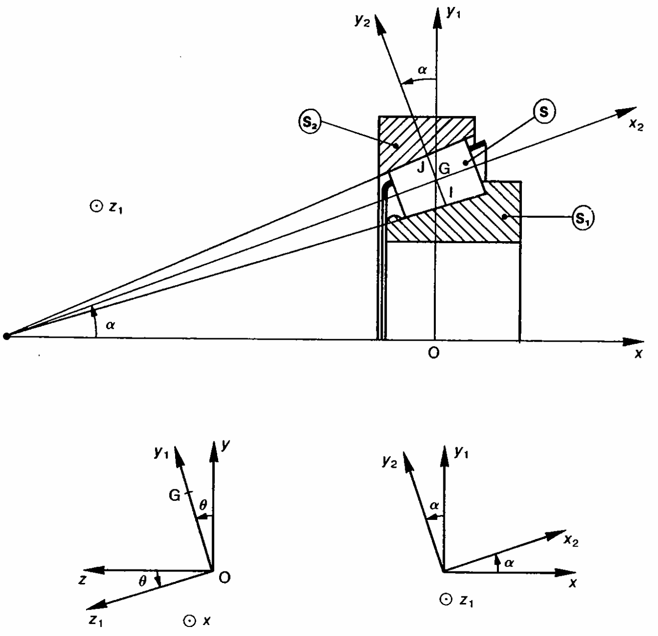


Fig. 22

(R_1 et R_2 sont deux repères liés à la cage du roulement.)
La matrice d'inertie de (S) est la suivante :

$$[I_G(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2,\, -,\, -)}.$$

Considérons le cercle de section droite du rouleau conique (S) situé dans le plan $(G, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$.
Notons I et J les points de contact de ce cercle avec (S_1) et (S_2), et a son rayon.
Pour simplifier les calculs on posera :

$$\begin{cases} r_1 = r - a \cos \alpha \\ r_2 = r + a \cos \alpha. \end{cases}$$

QUESTIONS

1° Déterminer le torseur cinématique au point G, de (S) dans son mouvement par rapport à R : $_G\{\mathcal{V}(S/R)\}$, en fonction de ω_1, ω_2, r_1, r_2 et a.

2° Déterminer le moment cinétique au point G, de (S) dans son mouvement par rapport à R :

$$\vec{\sigma}_G(S/R).$$

3° Déterminer l'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à R : T(S/R).

RÉPONSES

1° $\{\mathcal{V}(S/R)\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(G/R) \end{Bmatrix}$

avec

$$\vec{\Omega}(S/R) = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{r_1 + r_2}\,\vec{x} + \frac{r_1 r_2(\omega_2 - \omega_1)}{a(r_1 + r_2)}\,\vec{x}_2$$

$$\vec{V}(G/R) = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{2}\,\vec{z}_1.$$

2° $\vec{\sigma}_G(S/R) = A(\omega + \theta' \cos \alpha)\vec{x}_2 - B\theta' \sin \alpha \vec{y}_2$.

3° $2T(S/R) = (mr^2 + B \sin^2 \alpha)\theta'^2 + A(\omega + \theta' \cos \alpha)^2$.

EXERCICES SANS RÉPONSE

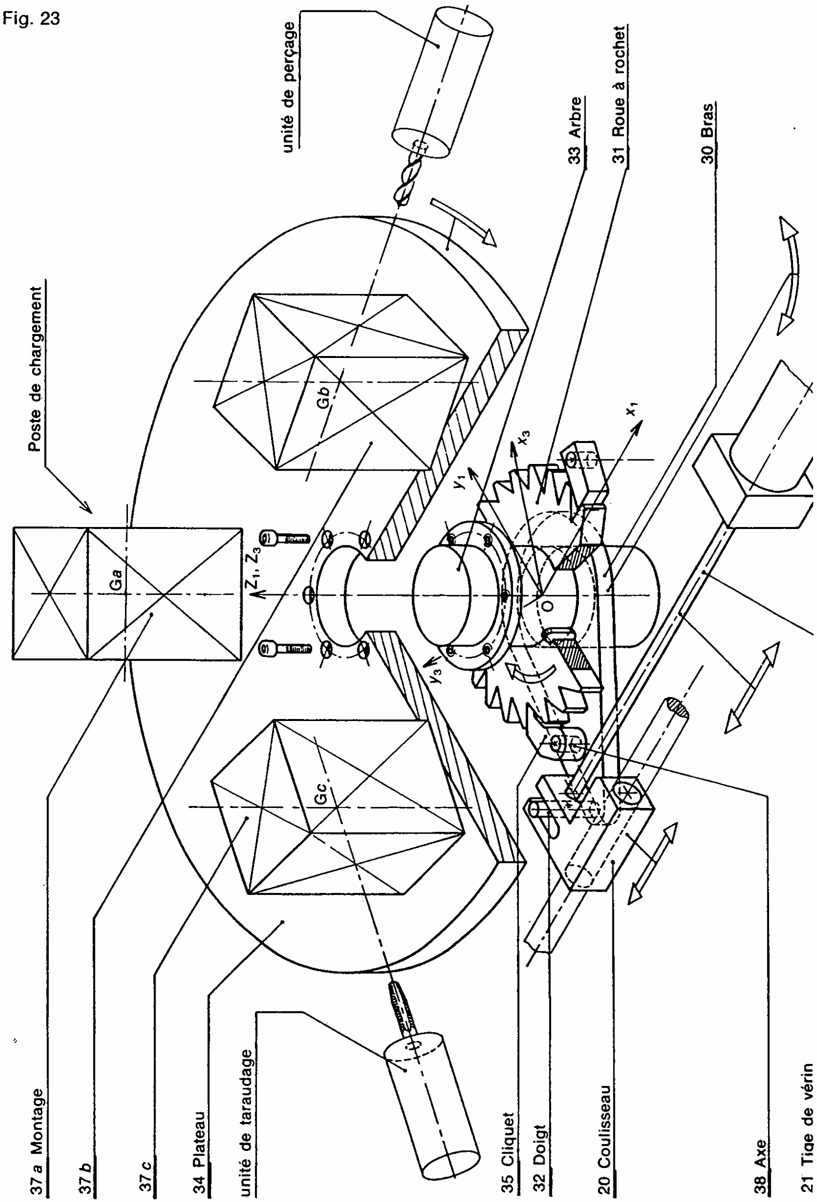

unité de perçage
Poste de chargement
33 Arbre
31 Roue à rochet
30 Bras
Ga
Gb
Gc
z_1, z_3
y_1
x_3
x_1
y_3
O
37 *a* Montage
37 *b*
37 *c*
34 Plateau
unité de taraudage
35 Cliquet
32 Doigt
20 Coulisseau
38 Axe
21 Tige de vérin

Fig. 23

6 — Un plateau tournant à commande pneumatique, équipé de trois montages identiques, permet un transfert rotatif de la pièce à usiner vers les postes de travail suivants *(figure 23)* :

— chargement et déchargement de la pièce
— perçage ∅4,8
— taraudage M6.

Le coulisseau (20) guidé en translation sur le bâti (1), solidaire de la tige du vérin (21), déplace par sa rainure, un doigt (32) encastré dans le bras (30). Ce bras, libre en rotation autour de l'arbre (33) du plateau, entraîne, par l'intermédiaire du cliquet (35), une roue à rochet (31), solidaire de l'arbre. La rotation de 120°, nécessaire lors du transfert de la pièce est obtenue par deux rotations successives de 60° du plateau tournant.

Caractéristiques géométriques et d'inertie des solides de (3)

	FORME	MASSE	J_{OZ}	Nbre
Montage d'usinage	Parallélépipède 70 × 70 mm, hauteur 100 mm	3,8 kg		3
Plateau	Disque ∅ 400 mm épaisseur 18 mm	17,7 kg		1
Arbre	Cylindre ∅ 50 mm hauteur 100 mm	1,5 kg		1
Mécanisme « rochet-cliquet »	Quelconque	1,4 kg	1 570 kg/mm²	1

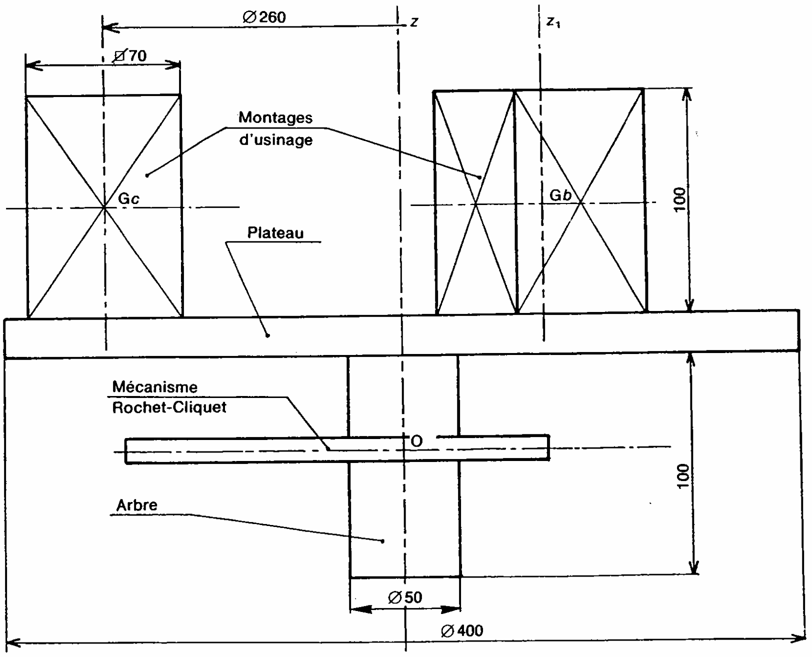


Fig. 24

Le repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié au bâti (1). Dans notre étude, toutes les pièces ayant le même mouvement (cinématiquement liées) sont repérées par des numéros de la même dizaine :

(1) : sous-ensemble des pièces liées au bâti : (10, 11, 12, ...)
(2) : sous-ensemble des pièces liées au coulisseau : (20, 21, ...)
(3) : sous-ensemble des pièces en mouvement de rotation autour de l'axe $(O, \vec{z}_1)$: (30, 31, 32, ...).

Le but de l'étude est de déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe $(O, \vec{z}_1)$ du sous-ensemble (3).
La *figure 24* définit les caractéristiques géométriques et d'inertie des solides de (3).

QUESTIONS

1° Déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe $(G, \vec{z}_1)$ d'un montage d'usinage.

2° En déduire le moment d'inertie par rapport à l'axe $(O, \vec{z}_1)$ d'un montage d'usinage.

3° Déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe $(O, \vec{z}_1)$ du sous-ensemble (3).

7 — On considère le problème plan suivant : Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti (S_0) d'un système bielle-manivelle d'un compresseur pneumatique *(figure 25)*.

La manivelle (S_1) a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$ avec (S_0). Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à (S_1). On pose : $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.
Le coulisseau (S_3) a une liaison pivot glissant d'axe $(O, \vec{x})$ avec (S_0).
La bielle (S_2) est assimilée à une tige rectiligne homogène d'extrémités A et B, de longueur $2l$, de dimensions transversales négligeables, de masse m et de centre d'inertie G.
(S_2) a une liaison rotule de centre A avec (S_1), telle que $\overrightarrow{OA} = a\vec{x}_1$ $(a > 0)$.
(S_2) a également une liaison rotule de centre B avec (S_3). Le point B est situé sur l'axe $(O, \vec{x})$. Soit $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ un repère lié à (S_2) (on ne tient pas compte d'une rotation éventuelle de la tige sur elle-même) tel que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AG} = 2l\vec{x}_2$.
On pose $\beta = (\vec{x}, \vec{x}_2)$ (attention : β est négatif sur la figure).

QUESTIONS

1° Quelle relation y-a-t-il en α et β?

2° Déterminer le moment cinétique au point A de dans son mouvement par rapport à R : $\vec{\sigma}_A(S_2/R)$.

3° Déterminer le moment dynamique au point A de dans son mouvement par rapport à R : $\vec{\delta}_A(S_2/R)$.

4° Déterminer l'énergie cinétique de (S_2) dans mouvement par rapport à R : $T(S_2/R)$.

***8** — La transmission de puissance de l'arbre mo (S_4) aux arbres (S_1) et (S_2) des roues motrices d véhicule, est faite par l'intermédiaire d'un différer schématisé *figure 26*.
On pose :

$$\vec{\Omega}(S_1/R) = \omega_1\vec{x}$$
$$\vec{\Omega}(S_2/R) = \omega_2\vec{x}.$$

$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est un repère lié au carter (S_0) différentiel.
Les arbres (S_1) et (S_2), supposés identiques, ont liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$ avec (S_0). Soit I leur mon d'inertie par rapport à l'axe $(O, \vec{x})$.

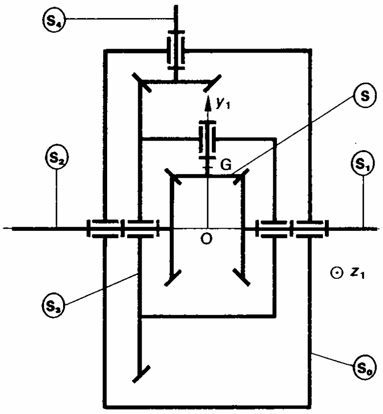


Fig. 26

Le porte satellite (S_3) a une liaison pivot d'axe (O, avec (S_0). Notons I_3 son moment d'inertie par rap à l'axe $(O, \vec{x})$.

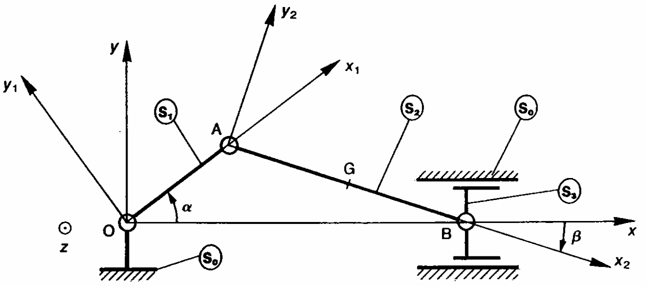


Fig. 25

On pose :

$$\vec{\Omega}(S_3/R) = \omega_3 \vec{x}.$$

Soit $R_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à (S_3). Le satellite (S) a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{y}_1)$ avec (S_3). (S) de révolution matérielle autour de $(O, \vec{y}_1)$, a pour masse m et centre d'inertie G. On pose :

$$\overrightarrow{OG} = d\,\vec{y}_1 \quad (d > 0).$$

La matrice d'inertie de (S) au point G est la suivante :

$$[I_G(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{(-,\, \vec{y}_1,\, -)}$$

On pose :

$$\vec{\Omega}(S/R_1) = \omega\,\vec{y}_1.$$

Soit N le nombre de dents des roues coniques liées aux arbres (S_1) et (S_2), et n le nombre de dents de la roue conique liée à (S), engrénant avec les roues précédentes.

QUESTIONS

1° Quelle relation y a-t-il entre les vitesses angulaires :

***a)* ω_1, ω_3 et ω;**

***b)* ω_2, ω_3 et ω?**

2° Déterminer en projection sur $\vec{x}$, les moments cinétiques au point O, dans leur mouvement par rapport à R :

***a)* de (S_1) : $\vec{x} \cdot \vec{\sigma}_O(S_1/R)$;**

***b)* de (S_2) : $\vec{x} \cdot \vec{\sigma}_O(S_2/R)$;**

***c)* de (S_3) : $\vec{x} \cdot \vec{\sigma}_O(S_3/R)$.**

3° Déterminer le moment cinétique au point O de (S) dans son mouvement par rapport à R : $\vec{\sigma}_O(S/R)$.

4° Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble matériel (E) constitué par (S_1), (S_2), (S_3) et (S) dans leur mouvement par rapport à R.

5° En déduire l'énergie cinétique de (E) dans son mouvement par rapport à R, en fonction de ω_3, dans les deux cas suivants :

***a)* $\omega_1 = \omega_2$;**

***b)* $\omega_1 = 0$.**

***9** — Un régulateur à boules, symétrique par rapport à son axe de rotation est représenté *figure 27*.

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti (S_0).
L'axe (S_1) a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$ avec (S_0).

Soit $R_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à (S_1). On pose $\alpha = (\vec{y}, \vec{y}_1)$.

Le bras (S_2) a une liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_1)$ avec (S_1) telle que $\overrightarrow{OA} = a\vec{y}_1$ $(a > 0)$.
Soit $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ un repère lié à (S_2), l'axe $(A, \vec{x}_2)$ étant dirigé suivant l'axe du bras. On pose : $\beta = (\vec{x}, \vec{x}_2)$.
A l'extrémité du bras (S_2) est fixée une sphère (S), pleine et homogène, de masse m, de rayon r et de centre d'inertie G.
On pose : $\overrightarrow{AG} = l\vec{x}_2$ $(l > 0)$.

Le bras (S_3) a une liaison pivot d'axe $(B, \vec{z}_1)$ avec (S_2) telle que $\overrightarrow{AB} = b\vec{x}_2$ $(b > 0)$, et une autre liaison pivot d'axe $(C, \vec{z}_1)$ avec le coulisseau (S_4), telle que le point C soit symétrique du point A par rapport à l'axe $(B, \vec{y}_1)$.

(S_4) a une liaison pivot glissant d'axe $(O, \vec{x})$ avec (S_1), et pour axe de symétrie matérielle $(O, \vec{x})$. Notons G_4 son centre d'inertie, M sa masse et I son moment d'inertie par rapport à $(O, \vec{x})$.

QUESTIONS

1° Déterminer le moment cinétique au point G_4 de (S_4) dans son mouvement par rapport à R : $\vec{\sigma}_{G_4}(S_4/R)$.

2° Déterminer le moment cinétique au point G de (S) dans son mouvement par rapport à R : $\vec{\sigma}_G(S/R)$.

3° Déterminer la projection sur $\vec{z}_1$ du moment dynamique au point A de (S) dans son mouvement par rapport à R : $\vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_A(S/R)$.

4° Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble constitué par (S_4), (S) et (S') (symétrique de (S)) dans leur mouvement par rapport à R : $T(S_4, S, S'/R)$.

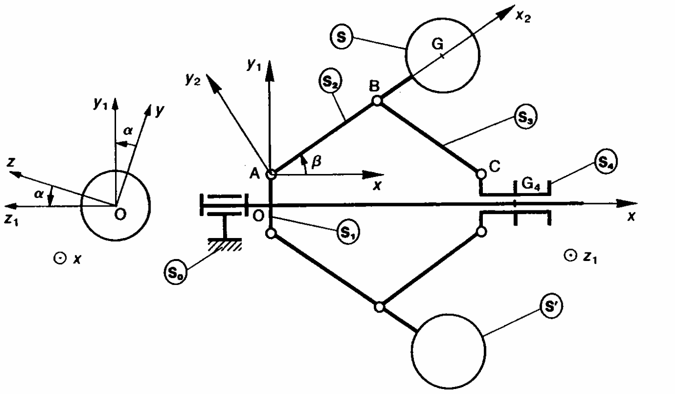


Fig. 27

10 — La *figure 29* représente le vilebrequin d'un moteur Flat-Twin équipant un deux roues.

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à cette pièce, tel que l'axe $(O, \vec{x})$ soit confondu avec l'axe de rotation, et l'axe $(O, \vec{y})$ soit situé dans le plan contenant les axes des manetons. Le but de l'exercice est de déterminer les moments et les produits d'inertie du vilebrequin par rapport aux axes du repère R.

On suppose que le vilebrequin est exclusivement constitué de cylindres de révolution, homogènes, de masse volumique $\rho = 7{,}8\ \text{kg/dm}^3$. On néglige les usinages particuliers tels que le filetage, la rainure de clavette, le dégagement des portées et la gorge de segment d'arrêt.

Pour généraliser le calcul, nous adopterons le paramétrage de la *figure 28*.

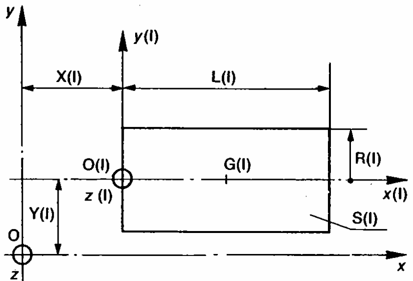


Fig. 28

Soient pour le cylindre S(I) :

- L(I) la longueur,
- R(I) le rayon,
- $(O(I), \vec{x}(I), \vec{y}(I), \vec{z}(I))$ un repère lié au cylindre, placé comme l'indique la figure,
- X(I) l'abscisse de l'origine O(I),
- Y(I) l'ordonnée de l'origine O(I),
- G(I) le centre d'inertie du cylindre S(I).

QUESTIONS

1° Déterminer les moments d'inertie du cylindre S(I) par rapport aux axes du repère $(G(I), \vec{x}(I), \vec{y}(I), \vec{z}(I))$.

2° En appliquant le théorème de Huyghens, déterminer les moments et les produits d'inertie du cylindre S(I) par rapport aux axes du repère R.

3° Déterminer, en utilisant de préférence un logiciel de calcul, les valeurs numériques des moments et des produits d'inertie du vilebrequin par rapport aux axes du repère R.

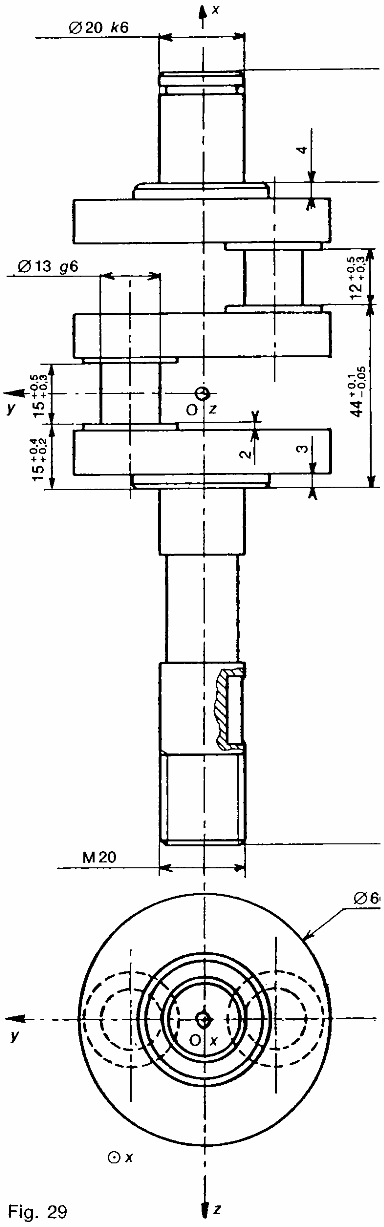


Fig. 29

2 principe fondamental de la dynamique

Le principe fondamental de la dynamique est la clef de voûte de la mécanique classique. Après des siècles d'études et de réflexion ce principe fut énoncé pour la première fois par NEWTON vers la fin du XVII^e siècle.
Ce principe établit une relation entre le mouvement d'un ensemble matériel et les actions mécaniques qui lui sont appliquées. Il permet d'expliquer et de prévoir avec une excellente précision les phénomènes mécaniques « classiques ».

1. PRINCIPE FONDAMENTAL

1.1. ÉNONCÉ

Il existe au moins un repère R_g, appelé repère galiléen, et au moins une chronologie, appelée chronologie galiléenne, tels que pour tout sous-ensemble matériel (e) d'un ensemble matériel (E), le torseur dynamique de (e) dans son mouvement par rapport à R_g soit égal au torseur des actions mécaniques extérieures à (e).

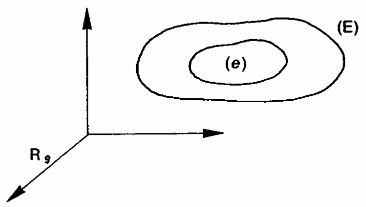


Fig. 1

Notons $(\bar{e})$ l'extérieur de (e).

Le principe fondamental de la dynamique formule l'existence d'au moins un repère R_g et d'au moins une chronologie (une façon de mesurer le temps) tels que l'on puisse écrire :

$$\boxed{\{\mathcal{D}(e/R_g)\}=\{\mathcal{T}(\bar{e}\longrightarrow e)\} \quad \forall (e)\subset(E).}$$

1.2. REPÈRE GALILÉEN

Pour la plupart des mécanismes étudiés en laboratoire, un repère lié à la Terre constitue une très bonne approximation d'un repère galiléen. Exceptions : mouvements que l'on peut suivre pendant un temps assez long (pendule de Foucault) et mouvements très rapides (gyroscope tournant à grande vitesse).

1.3. CHRONOLOGIE GALILÉENNE

Une chronologie galiléenne est obtenue par les horloges classiques (oscillation d'un quartz, mouvement de certains astres, ...).
Un sablier ne constitue pas une horloge galiléenne car la masse de sable écoulée n'est pas proportionnelle au temps mesuré par les horloges classiques.

REMARQUE

> *En mécanique classique les deux repères d'espace et de temps sont supposés indépendants, ce qui n'est pas le cas en mécanique relativiste.*

1.4. THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE LA DYNAMIQUE

En exprimant que les deux torseurs intervenant dans le principe fondamental ont même résultante générale et même moment résultant en tout point, on obtient deux théorèmes appelés théorèmes généraux de la dynamique.

Soient m la masse et G le centre d'inertie du sous-ensemble matériel (e) de l'ensemble matériel (E) en mouvement par rapport au repère galiléen R_g. Posons, en un point A quelconque :

$$\{\mathcal{D}(e/R_g)\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} m\vec{\Gamma}(G/R_g) \\ \vec{\delta}_A(e/R_g) \end{Bmatrix}$$

et

$$\{\mathcal{T}(\bar{e} \longrightarrow e)\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} \vec{R}(\bar{e} \longrightarrow e) \\ \vec{M}_A(\bar{e} \longrightarrow e) \end{Bmatrix}$$

Théorème de la résultante dynamique

Pour tout sous-ensemble matériel (e) de l'ensemble matériel (E) en mouvement par rapport au repère galiléen R_g, la résultante dynamique de (e) dans son mouvement par rapport à R_g est égale à la résultante générale du torseur associé aux actions mécaniques extérieures à (e).

Soit $\boxed{m\vec{\Gamma}(G/R_g) = \vec{R}(\bar{e} \longrightarrow e).}$

REMARQUE

Une force d'un newton est la force qui provoque une accélération de 1 m/s² au centre d'inertie d'un ensemble matériel ayant une masse de 1 kilogramme.

Théorème du moment dynamique

Pour tout sous-ensemble matériel (e) de l'ensemble matériel (E) en mouvement par rapport au repère galiléen R_g, le moment dynamique de (e) dans son mouvement par rapport à R_g est égal au moment résultant du torseur associé aux actions mécaniques extérieures à (e)

Soit $\boxed{\vec{\delta}_A(e/R_g) = \vec{M}_A(\bar{e} \longrightarrow e) \quad \forall A.}$

1.5. ÉQUATIONS DE MOUVEMENT

Soit un ensemble matériel (E) dont la position par rapport au repère galiléen R_g dépend de n paramètres $q_i(t)$ ($i = 1$ à n).

La projection sur un axe d'une équation vectorielle traduisant l'un des théorèmes généraux appliqué à un sous-ensemble matériel (e) de (E), donne une équation scalaire, qui est une *équation différentielle du second ordre*, non linéaire en général.

Dans cette équation scalaire peuvent figurer :

— des paramètres $q_i(t)$,

— des dérivées premières et secondes des paramètres par rapport à la date t : $q'_i(t)$ et $q''_i(t)$,

— la date t,

— des données du problème (données géométriques, d'inertie, composantes connues d'actions mécaniques, ...),

— des composantes inconnues d'actions mécaniques.

Définition

Une équation de mouvement est une éq différentielle du second ordre traduisai théorèmes généraux, dans laquelle ne aucune composante inconnue d'action méca

REMARQUE

Une équation de mouvement peut être obte éliminant, entre plusieurs équations, des c santes inconnues d'actions mécaniques.

L'ensemble des équations de mouvement qu peut écrire pour un ensemble matériel (E) co un système d'équations différentielles, dont souvent difficile de trouver la ou les solutio fonction de conditions initiales données.

Les *conditions initiales* du mouvement de (rapport à R_g, à la date t_0, sont consitutées donnée des n paramètres $q_i(t_0)$ et de le dérivées premières $q'_i(t_0)$.

Intégrale première du mouvement

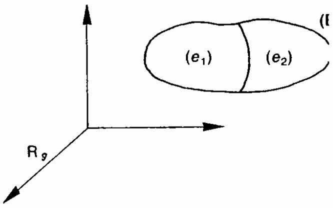
Une intégrale première du mouvement e équation différentielle du premier ordre forme : $f(q_i(t), q'_i(t), t)$ = constante, obten intégration d'une équation de mouvement.

Dans la pratique il est très utile de met évidence, avant tout calcul, des intégrales pre du mouvement (voir la deuxième applicat *paragraphe 4*).

2. THÉORÈME DES ACTIONS MUTUELLES

Ce théorème a été démontré dans le cas par de la statique. Démontrons-le en dynamique Soit (E) un ensemble matériel en mouvem rapport au repère galiléen R_g.

Soit une partition de (E) en deux sous-ens matériels (e_1) et (e_2) *(figure 2).*



Appliquons le principe fondamental de la dyn à (e_1) :

$$\{\mathcal{D}(e_1/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\bar{e}_1 \longrightarrow e_1)\}$$

($\bar{e}_1$), l'extérieur de (e_1) est constitué par l'e de (E) et (e_2). Alors :

$$\{\mathcal{D}(e_1/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\bar{E} \longrightarrow e_1)\} + \{\mathcal{T}(e_2 \longrightarrow e_1)$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à (e_2) :

$$\{\mathcal{D}(e_2/R_g)\}=\{\mathcal{T}(\bar{e}_2 \longrightarrow e_2)\}$$

$(\bar{e}_2)$, l'extérieur de (e_2) est constitué par l'extérieur de (E) et (e_1). Alors :

$$\{\mathcal{D}(e_2/R_g)\}=\{\mathcal{T}(\overline{E} \longrightarrow e_2)\} + \{\mathcal{T}(e_1 \longrightarrow e_2)\}. \quad (2)$$

Ajoutons membre à membre les relations (1) et (2) :

$$\{\mathcal{D}(e_1/R_g)\}+\{\mathcal{D}(e_2/R_g)\} =\{\mathcal{T}(\overline{E} \longrightarrow e_1)\}+\{\mathcal{T}(\overline{E} \longrightarrow e_2)\} +\{\mathcal{T}(e_2 \longrightarrow e_1)\}+\{\mathcal{T}(e_1 \longrightarrow e_2)\}. \quad (3)$$

La somme des deux torseurs dynamiques de (e_1) et (e_2) dans leur mouvement par rapport à R_g, est égale au torseur dynamique de (E) dans son mouvement par rapport à R_g. En effet, comme $(e_1)\cap(e_2)=\varnothing$, on a, par exemple, entre les résultantes dynamiques la relation :

$$\int_{P\in(e_1)\cup(e_2)} \vec{\Gamma}(P/R_g)\,dm = \int_{P\in(e_1)} \vec{\Gamma}(P/R_g)\,dm + \int_{P\in(e_2)} \vec{\Gamma}(P/R_g)\,dm.$$

La somme des deux torseurs $\{\mathcal{T}(\overline{E} \longrightarrow e_1)\}$ et $\{\mathcal{T}(\overline{E} \longrightarrow e_2)\}$ représente l'action mécanique de l'extérieur de (E) sur (e_1) et (e_2), c'est-à-dire sur (E).

Par conséquent la relation (3) s'écrit :

$$\{\mathcal{D}(E/R_g)\}=\{\mathcal{T}(\overline{E} \longrightarrow E)\}+\{\mathcal{T}(e_2 \longrightarrow e_1)\} +\{\mathcal{T}(e_1 \longrightarrow e_2)\} \quad (4)$$

or l'application du principe fondamental de la dynamique à (E) dans son mouvement par rapport à R_g permet d'écrire que :

$$\{\mathcal{D}(E/R_g)\}=\{\mathcal{T}(\overline{E} \longrightarrow E)\}.$$

Par suite la relation (4) devient :

$$\boxed{\{\mathcal{T}(e_2 \longrightarrow e_1)\}=-\{\mathcal{T}(e_1 \longrightarrow e_2)\}.}$$

Théorème

L'action mécanique du sous ensemble matériel (e_2) sur le sous ensemble matériel (e_1) est opposée à l'action mécanique de (e_1) sur (e_2).

3. CAS PARTICULIERS

L'écriture du principe fondamental de la dynamique se ramène à celle du principe fondamental de la statique, lorsque le torseur dynamique du sous ensemble matériel (e) de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport au repère galiléen R_g est nul.

Ce torseur est nul, en particulier, dans les trois cas suivants :

Premier cas :

(e) est en équilibre par rapport à R_g. Le principe fondamental de la statique énoncé au *chapitre 2* de statique n'est qu'un cas particulier du principe fondamental de la dynamique.

Deuxième cas :

(e) est de masse nulle.

Cette hypothèse lorsqu'elle est acceptable simplifie beaucoup l'étude.

EXEMPLE 1

L'objectif du *chapitre 3* de statique (hyperstatisme et mobilité des mécanismes) n'étant ni une étude de mouvement, ni un calcul d'action mécanique de contact, nous avons supposé, pour simplifier l'étude, que toutes les pièces étaient de masse nulle.

EXEMPLE 2

Deux pièces (S_1) et (S_2) ont une liaison pivot glissant d'axe $(O, \vec{x})$.

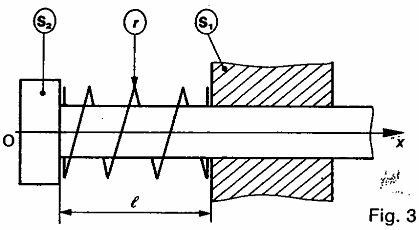


Fig. 3

Un ressort linéaire (r) de traction compression d'axe $(O, \vec{x})$, supposé de masse nulle, est intercalé entre (S_1) et (S_2). (r) a pour raideur K et pour longueur à vide l_0.

Supposons l'action mécanique du ressort sur (S_1) représentée par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(r \longrightarrow S_1)\}= {}_{O}\begin{Bmatrix} -K(l-l_0)\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

(l : longueur sous charge du ressort).

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au ressort (r) de masse nulle, s'écrit :

$$\{\mathcal{T}(\bar{r} \longrightarrow r)\}=\{\vec{0}\}$$

soit $\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow r)\}+\{\mathcal{T}(S_2 \longrightarrow r)\}=\{\vec{0}\}$.

Par suite, compte tenu du théorème des actions mutuelles, l'action mécanique du ressort sur (S_2) est représentée par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(r \longrightarrow S_2)\}= {}_{O}\begin{Bmatrix} K(l-l_0)\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

*** Troisième cas :**

Supposons que (e) soit un solide (S) de masse m, ayant une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_g)$ avec un bâti (S_0), auquel est lié le repère galiléen $R_g(O, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$.

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_g)$ un repère lié à (S). On pose $\theta=(\vec{x}_g, \vec{x})$.

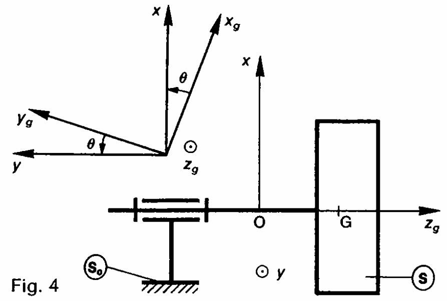


Fig. 4

Supposons également que :

- (S) soit animé d'un mouvement de rotation uniforme par rapport à R_g (θ' = constante),
- le centre d'inertie G de (S) soit sur l'axe $(O, \vec{z}_g)$ et que cet axe soit principal d'inertie pour (S) (conditions d'équilibrage dynamique, voir *paragraphe 6*).

La matrice d'inertie de (S) au point O, dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_g)$, est donc de la forme :

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z}_g)}$$

Montrons dans ces conditions que le torseur dynamique de (S) dans son mouvement par rapport à R_g est nul.

Ce torseur dynamique s'écrit au point O :

$$\{\mathcal{D}(S/R_g)\} = {}_O\begin{Bmatrix} m\vec{\Gamma}(G/R_g) \\ \vec{\delta}_O(S/R_g) \end{Bmatrix}.$$

Le point G étant fixe par rapport à R_g, le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(G/R_g)$ est nul.

Le point O étant fixe par rapport à R_g, la relation entre le moment dynamique $\vec{\delta}_O(S/R_g)$ et le moment cinétique $\vec{\sigma}_O(S/R_g)$ s'écrit :

$$\vec{\delta}_O(S/R_g) = \left[\frac{d}{dt}\,\vec{\sigma}_O(S/R_g)\right]_{R_g} \tag{5}$$

et le moment cinétique se calcule à partir de l'opérateur d'inertie par la relation :

$$\vec{\sigma}_O(S/R_g) = \vec{J}_O(S, \vec{\Omega}(S/R_g)).$$

Avec $\vec{\Omega}(S/R_g) = \theta'\vec{z}_g$, la matrice colonne associée au vecteur $\vec{\sigma}_O(S/R_g)$ est obtenue par la multiplication matricielle suivante :

$$[\vec{\sigma}_O(S/R_g)] = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta' \end{bmatrix}_{(\vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z}_g)}$$

d'où $\vec{\sigma}_O(S/R_g) = C\theta'\vec{z}_g$.

θ' étant constant, le moment cinétique $\vec{\sigma}_O(S/R_g)$ est constant dans la base de R_g.

Par suite (relation 5) : $\vec{\delta}_O(S/R_g) = \vec{0}$.

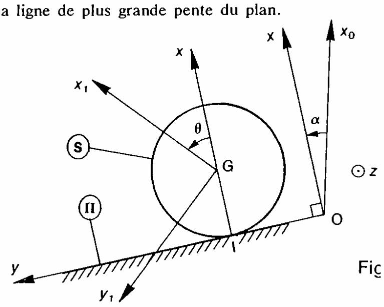
Le torseur dynamique de (S) dans son mouvement par rapport à R_g est donc nul.

4. APPLICATIONS

Poursuivons deux applications (cylindre sur un p incliné et toupie) commencées dans le cours cinétique du chapitre précédent.

4.1. APPLICATION 1

Un cylindre de révolution (S) roule sans glisser sur plan incliné (Π), son axe restant constamment orthog à la ligne de plus grande pente du plan.



Fig

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au plan (Π), l' $(O, \vec{y})$ étant dirigé suivant la ligne de plus grande pe Soit $\vec{g} = -g\vec{x}_0$ l'accélération de la pesanteur, $\vec{x}_0$ étant di suivant la verticale ascendante.

On pose : $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x})$ $\left(0 \leqslant \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(S) est homogène, de masse m, de rayon a, de ce d'inertie G, et a pour axe de révolution $(G, \vec{z})$.

(S) est en contact avec le plan (Π) suivant l'axe $(I, \vec{z})$ que $\vec{IG} = a\vec{x}$. Soit f le coefficient de frottement entre deux solides en contact.

L'action mécanique de contact de (Π) sur (S) est défi par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(\Pi \longrightarrow S)\} = {}_I\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

avec $\vec{R}$ de la forme : $\vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y}$. Soit $R_1(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ repère lié à (S). On pose : $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.

QUESTION 1

Déterminer l'équation de mouvement de (S) par rappor (Π).

RÉPONSE

Pour choisir l'équation scalaire traduisant les théorè généraux, qui soit équation de mouvement, examinons torseurs des deux actions mécaniques s'exerçant sur (

— Action mécanique de la pesanteur (connue)

$$\{\mathcal{T}(g \longrightarrow S)\} = {}_G\begin{Bmatrix} -mg\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

— Action mécanique du plan (Π) (inconnue)

$$\{\mathcal{T}(\Pi \longrightarrow S)\} = {}_I\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \; (\vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y}).$$

Pour obtenir directement une équation scalaire ne fais pas intervenir d'inconnue de liaison (X ou Y) il f

appliquer à (S), dans son mouvement par rapport à R, le théorème du moment dynamique au point I, en projection sur $\vec{z}$.
Soit $\vec{z}\cdot\vec{\delta}_I(S/R)=\vec{z}\cdot\vec{M}_I(\overline{S}\longrightarrow S)$
le moment résultant par rapport à l'axe $(I, \vec{z})$ des actions mécaniques extérieures à (S) est égal à :

$$\vec{z}\cdot\vec{M}_I(\overline{S}\longrightarrow S)=\vec{z}\cdot(\overrightarrow{IG}\wedge -mg\vec{x}_0),$$

soit avec $\overrightarrow{IG}=a\vec{x}$

$$\vec{z}\cdot\vec{M}_I(\overline{S}\longrightarrow S)=mga\sin\alpha$$

le moment dynamique $\vec{\delta}_I(S/R)$ a été calculé au *paragraphe 13.1* du *chapitre 2.*

$$\vec{\delta}_I(S/R)=\frac{3}{2}ma^2\theta''\vec{z}.$$

Par conséquent l'équation de mouvement de (S) par rapport à (Π) s'écrit :

$$\frac{3}{2}ma^2\theta''=mga\sin\alpha$$

ou

$$\boxed{\theta''=\frac{2}{3}\ \frac{g}{a}\sin\alpha}$$

équation différentielle du second ordre, très simple, de la forme $\theta''=$ constante.

QUESTION 2

Soit y l'abscisse du centre d'inertie G de (S) sur l'axe $(O, \vec{y})$. On suppose que $y=0$ lorsque $\theta=0$. Exprimer l'équation de mouvement de (S) par rapport à (Π) en fonction de y''.

RÉPONSE

(S) roule sans glisser sur (Π). Alors : $y=a\theta$ et $y''=a\theta''$. Par suite l'équation de mouvement s'écrit :

$$\boxed{y''=\frac{2}{3}g\sin\alpha.} \qquad (6)$$

QUESTION 3

Sachant qu'à la date $t=0$, $y(0)=0$ et $y'(0)=0$, déterminer, à tout instant, le paramètre $y(t)$ définissant la position du centre d'inertie G de (S) dans R.

RÉPONSE

Intégrons la relation (6) :

une première fois : $y'=\frac{2}{3}gt\sin\alpha+C$

une seconde fois : $y=\frac{1}{3}gt^2\sin\alpha+Ct+D$

Avec les conditions initiales données, les deux constantes C et D sont nulles.
Par suite :

$$\boxed{y=\frac{1}{3}gt^2\sin\alpha.}$$

QUESTION 4

Déterminer la valeur minimale de l'angle α pour que (S) roule sans glisser sur (Π).

RÉPONSE

(S) roule sans glisser sur (Π) si à chaque instant : $|Y|\leqslant f|X|$.
Les composantes X et Y de la résultante générale $\vec{R}$ de l'action mécanique de (Π) sur (S) seront obtenues en appliquant le théorème de la résultante dynamique à (S), dans son mouvement par rapport à R, en projection sur $\vec{x}$ et $\vec{y}$.
Ce théorème s'écrit :

$$m\vec{\Gamma}(G/R)=\vec{R}(\overline{S}\longrightarrow S)$$

soit

$$m\vec{\Gamma}(G/R)=-mg\vec{x}_0+\vec{R}$$

sachant que

$$\vec{\Gamma}(G/R)=y''\vec{y}=\frac{2}{3}g\sin\alpha\vec{y}$$
$$\vec{R}=X\vec{x}+Y\vec{y}.$$

Cette égalité vectorielle devient en projection

— sur $\vec{x}$: $0=-mg\cos\alpha+X$

— sur $\vec{y}$: $\frac{2}{3}mg\sin\alpha=mg\sin\alpha+Y$

$$\text{d'où}\quad\begin{cases}X=mg\cos\alpha\\ Y=-\frac{1}{3}mg\sin\alpha\end{cases}$$

la condition de roulement sans glissement étant :

$$|Y|\leqslant f|X|$$

soit $\frac{1}{3}mg\sin\alpha\leqslant fmg\cos\alpha$ l'angle α doit être tel que :

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha\leqslant 3f.}$$

*4.2. APPLICATION 2

Considérons une toupie (S) de masse m, de centre d'inertie G et d'axe de symétrie matérielle $(O, \vec{z}_1)$, dont la pointe O reste immobile sur un plan (Π).

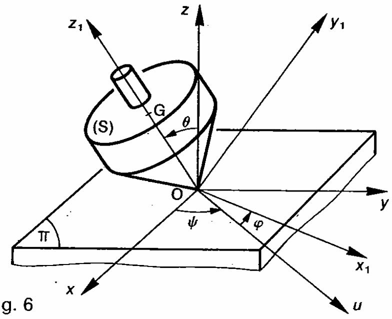


Fig. 6

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au plan (Π), l'axe $(O, \vec{z})$ étant dirigé suivant la verticale ascendante. On note $\vec{g}=-g\vec{z}$ l'accélération de la pesanteur.
La liaison entre (Π) et (S) est une liaison ponctuelle avec frottement de normale $(O, \vec{z})$. On pose :

$$\{\mathcal{T}(\Pi\longrightarrow S)\}=\left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_O.$$

Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à (S). On pose $\overrightarrow{OG} = l\vec{z}_1$ $(l > 0)$.
La matrice d'inertie de (S) au point O est de la forme :

$$[I_0(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(-,\,-,\,\vec{z}_1)}$$

La position de la base de R_1 par rapport à la base de R est définie par les trois angles d'Euler ψ, θ, φ (Première base intermédiaire : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$, deuxième base intermédiaire : $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)$).

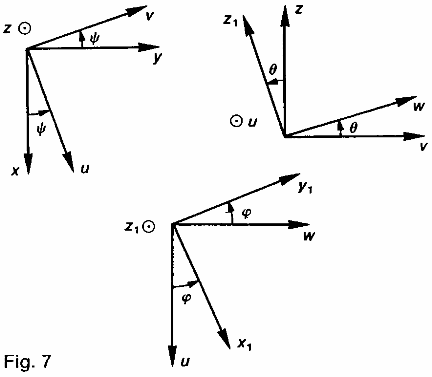


Fig. 7

QUESTION 1

Déterminer les équations de mouvement de (S) par rapport à (Π).

RÉPONSE

La position de (S) par rapport à (Π) étant définie par trois paramètres indépendants ψ, θ, φ, les équations de mouvement sont au nombre de 3.
Pour choisir des équations scalaires traduisant les théorèmes généraux, qui soient équations de mouvement, examinons les torseurs des deux actions mécaniques s'exerçant sur (S).

— Action mécanique de la pesanteur (connue)

$$\{\mathcal{T}(g \longrightarrow S)\} = {}_G\begin{Bmatrix} -mg\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

— Action mécanique du plan (Π) (inconnue)

$$\{\mathcal{T}(\Pi \longrightarrow S)\} = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

Pour obtenir trois équations scalaires ne faisant pas intervenir d'inconnue de liaison (composante de $\vec{R}$), il faut appliquer à (S), dans son mouvement par rapport à R, le théorème du moment dynamique au point O, en projection sur trois vecteurs unitaires indépendants.
Pour choisir ces trois vecteurs unitaires, calculons au préalable le moment résultant au point O des actions mécaniques extérieures à (S).

$$\vec{M}_0(\bar{S} \longrightarrow S) = \overrightarrow{OG} \wedge -mg\vec{z}$$

soit avec $\overrightarrow{OG} = l\vec{z}_1$

$$\vec{M}_0(\bar{S} \longrightarrow S) = mgl \sin\theta\,\vec{u}$$

la projection de ce moment est donc nulle sur des vecteurs unitaires perpendiculaires à $\vec{u}$. Sachant qu'il y a au maximum deux vecteurs unitaires indépendants perpendiculaires à $\vec{u}$, écrivons l'équation vectorielle déduit théorème du moment dynamique en projection

$$\begin{cases} \text{sur } \vec{z}\text{, car } \vec{z} \text{ est fixe dans la base de R,} \\ \text{sur } \vec{z}_1\text{, car } \vec{z}_1 \text{ est l'axe de révolution matérielle de} \\ \text{sur } \vec{u}\text{, car } \vec{M}_0(\bar{S} \longrightarrow S) \text{ a pour direction } \vec{u}. \end{cases}$$

D'où les trois équations de mouvement :

$$\begin{cases} \vec{z} \cdot \vec{\delta}_0(S/R) = 0 \\ \vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_0(S/R) = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{\delta}_0(S/R) = mgl \sin\theta. \end{cases}$$

Compte tenu des résultats acquis au *paragraphe 13. chapitre 2,* les trois équations de mouvement s'écriv

$$\frac{d}{dt}[A\psi' \sin^2\theta + C(\varphi' + \psi' \cos\theta)\cos\theta] = 0$$

$$C\frac{d}{dt}(\varphi' + \psi' \cos\theta) = 0$$

$$A\theta'' + \psi' \sin\theta[C(\varphi' + \psi' \cos\theta) - A\psi' \cos\theta]$$
$$= mgl$$

La deuxième équation donne l'intégrale première mouvement :

$$\boxed{\varphi' + \psi' \cos\theta = \text{constante} = r_0.}$$

La première équation donne l'intégrale première mouvement :

$$\boxed{A\psi' \sin^2\theta + Cr_0 \cos\theta = \text{constante.}}$$

La troisième équation s'écrit :

$$\boxed{A\theta'' + \psi' \sin\theta[Cr_0 - A\psi' \cos\theta] = mgl \sin\theta.}$$

QUESTION 2

A quelles conditions existe-t-il des mouvements tels $\psi' = \text{constante} = \psi'_0$?

RÉPONSE

Si ψ' est constant l'équation (8) impose que

$$\theta = \text{constante} = \theta_0.$$

L'équation (7) indique alors que $\varphi' = \text{constante} = \varphi'_0$.
L'équation (9) établit une relation entre ψ'_0, θ_0 et φ
Si on suppose $\sin\theta_0 \neq 0$ cette équation s'écrit :

$$\boxed{\psi'_0[Cr_0 - A\psi'_0 \cos\theta_0] = mgl.}$$

Dans ce mouvement dit *stationnaire,* l'axe de la t décrit d'un mouvement uniforme, un cône d'axe (de demi-angle au sommet θ_0.

QUESTION 3

Considérons des mouvements où

$$\psi' = \text{constante} = \psi'_0,$$
$$\theta = \text{constante} = \theta_0$$
$$\varphi' = \text{constante} = \varphi'_0.$$

En admettant que la rotation propre φ'_0 est très g devant ψ'_0 et θ_0, déterminer φ'_0 en fonction de ψ'_0. supposera A et C du même ordre de grandeur.)
Application numérique :

$$m = 30 \text{ g}$$
$$g = 10 \text{ m/s}^2$$
$$l = 3 \text{ cm}$$
$$C = 1{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$\psi'_0 = \pi \text{ rad/s.}$$

RÉPONSE

Si φ'_0 est très grand devant ψ'_0 et θ_0, l'équation (7) indique que $\varphi'_0 = r_0$. Par suite, dans l'équation (10) le terme $A\psi'_0 \cos\theta_0$ est négligeable devant $Cr_0 = C\varphi'_0$. Cette équation s'écrit donc :

$$\psi'_0 C\varphi'_0 = mgl$$

d'où

$$\boxed{\varphi'_0 = \frac{mgl}{C\psi'_0}.}$$

Application numérique : $\varphi'_0 = 191{,}11$ rad/s (1 825 tr/min).

5. EXPRESSION DU PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE DANS UN REPÈRE NON GALILÉEN

Il est parfois plus simple d'étudier le mouvement d'un sous-ensemble matériel (e) d'un ensemble matériel (E) par rapport à un repère R qui ne soit pas galiléen. C'est pourquoi nous allons examiner l'influence d'un changement de repère sur l'expression du principe fondamental de la dynamique.

Soient R_g un repère galiléen et R un repère ayant un mouvement quelconque, mais *connu*, par rapport à R_g.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à (e) dans son mouvement par rapport à R_g s'écrit :

$$\{\mathcal{D}(e/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\bar{e} \longrightarrow e)\}. \qquad (11)$$

Le torseur dynamique a pour éléments de réduction en un point A quelconque :

$$\{\mathcal{D}(e/R_g)\} = {}_{A}\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{P\in e} \vec{\Gamma}(P/R_g)\,dm \\ \displaystyle\int_{P\in e} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R_g)\,dm \end{array}\right\}.$$

Pour faire apparaître le repère R dans ces éléments de réduction, utilisons la relation de composition des vecteurs accélération, au point P, entre les repères R et R_g (relation (13) du *paragraphe 6* du *chapitre 4* de cinématique) :

$$\vec{\Gamma}(P/R_g) = \vec{\Gamma}(P/R) + \vec{\Gamma}(P\in R/R_g) + 2\vec{\Omega}(R/R_g) \wedge \vec{V}(P/R).$$

Considérons les trois torseurs suivants :

— Le torseur dynamique de (e) dans son mouvement par rapport à R :

$$\{\mathcal{D}(e/R)\} = {}_{A}\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{P\in e} \vec{\Gamma}(P/R)\,dm \\ \displaystyle\int_{P\in e} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R)\,dm \end{array}\right\}.$$

— Le torseur des *effets d'inertie d'entraînement* sur (e) dans son mouvement par rapport à R et R_g :

$$\{\mathcal{D}_{ie}(e, R/R_g)\} = {}_{A}\left\{\begin{array}{l} \displaystyle -\int_{P\in e} \vec{\Gamma}(P\in R/R_g)\,dm \\ \displaystyle -\int_{P\in e} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P\in R/R_g)\,dm \end{array}\right\}.$$

— Le torseur des *effets d'inertie de Coriolis* sur (e) dans son mouvement par rapport à R et R_g :

$$\{\mathcal{D}_{ic}(e, R/R_g)\} = {}_{A}\left\{\begin{array}{l} \displaystyle -\int_{P\in e} 2\vec{\Omega}(R/R_g) \wedge \vec{V}(P/R)\,dm \\ \displaystyle -\int_{P\in e} \overrightarrow{AP} \wedge [2\vec{\Omega}(R/R_g) \wedge \vec{V}(P/R)]\,dm \end{array}\right\}.$$

Par suite, entre ces trois torseurs et le torseur dynamique de (e) dans son mouvement par rapport à R_g existe la relation :

$$\{\mathcal{D}(e/R)\} = \{\mathcal{D}(e/R_g)\} + \{\mathcal{D}_{ie}(e, R/R_g)\} + \{\mathcal{D}_{ic}(e, R/R_g)\}.$$

Compte tenu de la relation (11) le principe fondamental de la dynamique s'écrit dans le repère R :

$$\boxed{\{\mathcal{D}(e/R)\} = \{\mathcal{T}(\bar{e} \longrightarrow e)\} + \{\mathcal{D}_{ie}(e, R/R_g)\} + \{\mathcal{D}_{ic}(e, R/R_g)\}.} \qquad (12)$$

Par conséquent, le principe fondamental de la dynamique s'applique relativement à tout repère, à condition d'ajouter au torseur des actions mécaniques extérieures, le torseur des effets d'inertie d'entraînement et le torseur des effets d'inertie de Coriolis.

REMARQUE

Si le repère R *est en* translation rectiligne uniforme *par rapport au repère galiléen* R_g :

$$\vec{\Gamma}(P\in R/R_g) = \vec{0} \quad et \quad \vec{\Omega}(R/R_g) = \vec{0}.$$

Par suite les deux torseurs des effets d'inertie d'entraînement et de Coriolis sont nuls, et le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors dans le repère R :

$$\{\mathcal{D}(e/R)\} = \{\mathcal{T}(\bar{e} \longrightarrow e)\}$$

ce qui conduit à la conclusion que tout repère R *en translation rectiligne uniforme par rapport à un repère galiléen, est aussi galiléen.*

Application : Accélération de la pesanteur

Étudions l'équilibre d'un pendule simple à la surface de la terre. Pour cela, considérons le repère galiléen

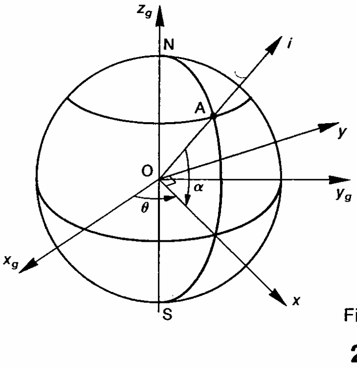


Fig. 8

$R_g(O, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$ ayant pour origine le centre d'inertie de la terre et dont les axes ont des directions fixes par rapport à certaines étoiles. L'axe $(O, \vec{z}_g)$ est orienté du pôle sud vers le pôle nord.

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_g)$ un repère lié à la terre. On pose $\theta = (\vec{x}_g, \vec{x})$. $\theta' = \text{constante} = \omega$, avec $\omega = 1$ tr/24 h.
Soit A un point de la surface de la terre situé dans le plan $(O, \vec{z}_g, \vec{x})$. On pose : $\overline{OA} = r\vec{i}$ (r : rayon de la terre) et $\alpha = (\vec{i}, \vec{x})$ (α représente la latitude du point A).
En ce point A on considère un pendule simple immobile par rapport à la terre.

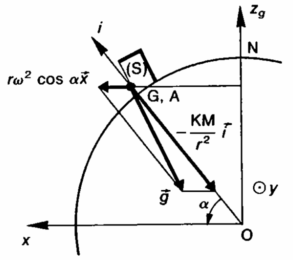


Fig. 9

Ce pendule simple est constitué par une sphère (S) de masse m, de centre d'inertie G, suspendue à un fil.
Sur (S) s'exerçent deux actions mécaniques :

— l'action mécanique du fil, représentée par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(\text{fil} \longrightarrow S)\} = {}_G\begin{Bmatrix}\vec{T} \\ \vec{0}\end{Bmatrix}$$

$\vec{T}$ ayant même direction que le fil.

— L'action mécanique de la terre, représentée par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(\text{terre} \longrightarrow S)\} = {}_G\begin{Bmatrix}\vec{F} \\ \vec{0}\end{Bmatrix}$$

avec $\vec{F}$ (force d'attraction newtonienne) définie par :

$$\vec{F} = -K\frac{mM}{r^2}\vec{i}$$

avec :
- K : constante de gravitation universelle ($K = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ dans le système MKSA)
- m : masse de (S)
- M : masse de la Terre
- r : rayon de la Terre.

La résultante générale des actions mécaniques extérieures à (S) est donc égale à :

$$\vec{R}(\overline{S} \longrightarrow S) = \vec{T} + \vec{F}.$$

Appliquons le théorème de la résultante dynamique à (S) dans son mouvement par rapport à R (repère non galiléen). (S) étant fixe dans R, l'équation vectorielle correspondant à ce théorème s'écrit, d'après la relation (12) :

$$\vec{0} = \vec{R}(\overline{S} \longrightarrow S) - m\vec{\Gamma}(G \in R/R_g)$$

le point G décrivant d'un mouvement uniforme ($\theta = \omega t$), dans R_g, un cercle d'axe $(O, \vec{z}_g)$ de rayon $r \cos \alpha$, le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(G \in R/R_g)$ a pour expression :

$$\vec{\Gamma}(G \in R/R_g) = -r\omega^2 \cos \alpha\vec{x}.$$

Par suite : $\vec{R}(\overline{S} \longrightarrow S) + mr\omega^2 \cos \alpha\vec{x} = \vec{0}$ sachant que

$$\vec{R}(\overline{S} \longrightarrow S) = \vec{T} + \vec{F} \quad \text{et} \quad \vec{F} = -K\frac{mM}{r^2}\vec{i}.$$

On en déduit que :

$$\vec{T} = K\frac{mM}{r^2}\vec{i} - mr\omega^2 \cos \alpha \quad \vec{x} \tag{13}$$

soit $\vec{P}$ le poids de (S). Lorsqu'on considère le repèr galiléen, le pendule est en équilibre sous l'action méc que du fil et de la pesanteur, et l'on a :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}.$$

De plus, le vecteur accélération de la pesanteur est que :

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

Par conséquent, compte tenu de la relation (13), le vec $\vec{g}$ a pour expression :

$$\boxed{\vec{g} = -K\frac{M}{r^2}\vec{i} + r\omega^2 \cos \alpha\vec{x}.}$$

Par conséquent, dans la définition du vecteur accéléra de la pesanteur interviennent les effets d'in d'entraînement dus à la rotation de la terre. C'est pour ce vecteur n'est pas exactement dirigé vers le centr la terre (sauf aux pôles et à l'équateur).
Sachant que $r = 6\,370$ km et $\omega = 1$ tr/j, le terme $r\omega^2$ c est au maximum égal à $r\omega^2 = 0{,}0336$ m/s^2, à l'équat g, la norme du vecteur accélération de la pesanteur, é de l'ordre de 9,8 m/s^2, ce terme reste inférieur à 0,35 de la valeur de g.

REMARQUE

> *Le torseur d'action mécanique de la pesan inclut les effets d'inertie d'entraînement dus rotation de la terre. Par conséquent, un re lié à la terre pourra être considéré co galiléen, si le torseur des effets d'inertie Coriolis dus à la rotation de la terre, négligeable par rapport au torseur d'ac mécanique de la pesanteur.*
> *Ce torseur doit être pris en considération expliquer par exemple :*
> *— la déviation vers l'ouest des fusées ou projectiles lancés du sol,*
> *— la déviation des courants aériens dans ch hémisphère,*
> *— la dérive d'instruments de bord sur les av*
> *— la rotation du plan d'oscillation du pendu Foucault (0,7 tour par jour, dans le sens aiguilles d'une montre, pour une latitude no 45°).*

*6. ÉQUILIBRAGE DYNAMIQU

Un des problèmes essentiels en fabrication l'équilibrage des solides tournant autour d'un Cela, afin d'éviter la naissance de vibra mécaniques pouvant engendrer une détérior rapide des paliers (phénomène de fatigue), ou simplement créer une gêne à l'utilisation matériel, dont le bruit.

6.1. SCHÉMATISATION ADOPTÉ

Soit un bâti (S_0) auquel est lié le repère gal $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Un solide (S) de masse n centre d'inertie G, a une liaison pivot sans f ment d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec (S_0).

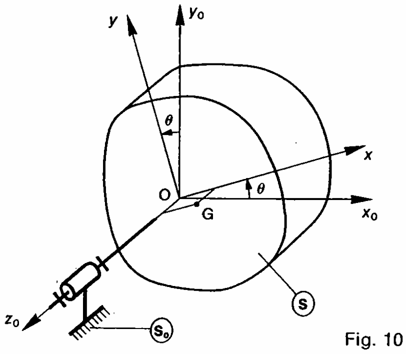


Fig. 10

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$ un repère lié à (S) choisi, pour simplifier les calculs, de telle façon que le plan $(O, \vec{z}_0, \vec{x})$ contienne le point G.
On pose

$$(\vec{x}_0, \vec{x}) = \theta \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OG} = a\vec{x} + c\vec{z}_0.$$

Le solide (S) étant quelconque, la matrice d'inertie de (S) au point O, dans la base de R, est de la forme :

$$[I_0(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)}$$

L'action mécanique (inconnue) exercée par (S_0) sur (S) est représentée, au point O, par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(S_0 \longrightarrow S)\} = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_0 \end{Bmatrix}$$

posons : $\begin{cases} \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}_0 \\ \vec{M}_0 = L\vec{x} + M\vec{y} \end{cases}$.

Sur (S) s'exerce également l'action mécanique, supposée connue, d'un ensemble matériel (E), représentée au point O, par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(E \longrightarrow S)\} = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_{10} \end{Bmatrix}$$

posons : $\begin{cases} \vec{R}_1 = X_1\vec{x} + Y_1\vec{y} + Z_1\vec{z}_0 \\ \vec{M}_{10} = L_1\vec{x} + M_1\vec{y} + N_1\vec{z}_0. \end{cases}$

Lorsque (S) est la roue d'un véhicule (avec son axe), (E) est constitué, par exemple, par la route, la pesanteur, l'arbre de transmission...

6.2. ACTION MÉCANIQUE DE (S_0) SUR (S)

Le torseur d'action mécanique de (S_0) sur (S) s'obtient en appliquant le principe fondamental de la dynamique à (S) dans son mouvement par rapport à R_0.

$$\{\mathcal{D}(S/R_0)\} = \{\mathcal{T}(\bar{S} \longrightarrow S)\}.$$

Sachant que $(\bar{S})$ est constitué par (S_0) et (E), cette égalité s'écrit :

$$\{\mathcal{D}(S/R_0)\} = \{\mathcal{T}(S_0 \longrightarrow S)\} + \{\mathcal{T}(E \longrightarrow S)\}.$$

Exprimons ces torseurs au point O :

$${}_O\begin{Bmatrix} m\vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \vec{\delta}_0(S/R_0) \end{Bmatrix} = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_0 \end{Bmatrix} + {}_O\begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_{10} \end{Bmatrix}.$$

D'où les deux équations vectorielles :

$$m\vec{\Gamma}(G/R_0) = \vec{R} + \vec{R}_1 \qquad (14)$$

$$\vec{\delta}_0(S/R_0) = \vec{M}_0 + \vec{M}_{10}. \qquad (15)$$

Afin d'expliciter ces deux équations, calculons au préalable le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(G/R_0)$ et le moment dynamique $\vec{\delta}_0(S/R_0)$.

$$\vec{\Gamma}(G/R_0) = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}(G/R_0)\right]_{R_0}$$

or $\quad \vec{V}(G/R_0) = a\theta'\vec{y}$

alors

$$\vec{\Gamma}(G/R_0) = a\theta''\vec{y} - a\theta'^2\vec{x}.$$

Le point O étant fixe dans R_0, le moment dynamique $\vec{\delta}_0(S/R_0)$ se calcule à partir du moment cinétique $\vec{\sigma}_0(S/R_0)$ par la relation :

$$\vec{\delta}_0(S/R_0) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_0(S/R_0)\right]_{R_0}. \qquad (16)$$

Le moment cinétique $\vec{\sigma}_0(S/R_0)$ s'exprime en fonction de l'opérateur d'inertie par la relation :

$$\vec{\sigma}_0(S/R_0) = \vec{J}_0(S, \vec{\Omega}(S/R_0))$$

ce qui correspond à la multiplication matricielle suivante, sachant que $\vec{\Omega}(S/R_0) = \theta'\vec{z}_0$:

$$[\vec{\sigma}_0(S/R_0)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta' \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)}$$

d'où

$$\vec{\sigma}_0(S/R_0) = -E\theta'\vec{x} - D\theta'\vec{y} + C\theta'\vec{z}_0. \qquad (17)$$

Pour calculer le moment dynamique $\vec{\delta}_0(S/R_0)$, à partir de la relation (16), utilisons la base de dérivation du repère R.

$$\vec{\delta}_0(S/R_0) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_0(S/R_0)\right]_R + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{\sigma}_0(S/R_0)$$

d'où, avec l'expression de $\vec{\sigma}_0(S/R_0)$ de la relation (17),

$$\vec{\delta}_0(S/R_0) = -E\theta''\vec{x} - D\theta''\vec{y} + C\theta''\vec{z}_0 + \theta'\vec{z}_0 \wedge (-E\theta'\vec{x} - D\theta'\vec{y} + C\theta'\vec{z}_0)$$

soit

$$\vec{\delta}_0(S/R_0) = (-E\theta'' + D\theta'^2)\vec{x} - (D\theta'' + E\theta'^2)\vec{y} + C\theta''\vec{z}_0.$$

En rassemblant les résultats, les équations vectorielles (14) et (15), déduites du principe fondamental de la dynamique, s'écrivent en projection sur la base de R :

(14) en projection sur :

$\vec{x}$: $\quad -ma\theta'^2 = X + X_1$

$\vec{y}$: $\quad ma\theta'' = Y + Y_1$

$\vec{z}$: $\quad 0 = Z + Z_1$

(15) en projection sur :

$$\vec{x} : \quad -E\theta'' + D\theta'^2 = L + L_1$$
$$\vec{y} : \quad -D\theta'' - E\theta'^2 = M + M_1$$
$$\vec{z} : \quad C\theta'' = N_1.$$

Équations à partir desquelles on peut exprimer facilement X, Y, Z, L, M.

6.3. CONDITIONS D'ÉQUILIBRAGE DYNAMIQUE

Pour éviter les vibrations il faut rendre l'action mécanique dans la liaison entre (S) et (S_0) aussi constante que possible. En particulier, indépendante du mouvement de (S) par rapport à (S_0), c'est-à-dire de θ' et θ''.

D'après les équations précédentes les conditions d'équilibrage dynamique sont donc :

- $a = 0$: le centre d'inertie G est sur l'axe de rotation $(O, \vec{z}_0)$ (condition d'équilibrage statique).
- $D = 0$ et $E = 0$: l'axe de rotation $(O, \vec{z}_0)$ est principal d'inertie pour (S).

REMARQUES

> — *Dans un équilibrage statique* ($a = 0$), *seule la résultante générale de l'action mécanique de* (S_0) *sur* (S) *est indépendante du mouvement de* (S) *par rapport à* (S_0).
> — *D'une façon imagée nous pouvons résumer les conditions d'équilibrage par les figures suivantes (figure 11) :*

6.4. RÉALISATION PRATIQUE DE L'ÉQUILIBRAGE DYNAMIQUE

On remplace (S) par un solide (S′) constitué de (S) et de deux solides (S_1) et (S_2), assimilables à des points matériels, tel que (S′) soit dynamiquement équilibré.

Soit m_i la masse du solide (S_i) ($i = 1$ et 2) placé a point M_i de coordonnées cartésiennes x_i, y_i, z_i dar le repère R.

Notons G′ le centre d'inertie de (S′), D′ et E′ le produits d'inertie de (S′) par rapport aux axes d repère R.

(S′) est dynamiquement équilibré si G′ est sur l'ax $(O, \vec{z}_0)$ et si $D' = 0$ et $E' = 0$.

Traduisons ces conditions :

La position du centre d'inertie G′ est donnée par relation (statique, *chapitre 1, paragraphe 2.1*) :

$$\overrightarrow{OG'} = \frac{m\overrightarrow{OG} + m_1\overrightarrow{OM}_1 + m_2\overrightarrow{OM}_2}{m + m_1 + m_2}$$

si G′ est sur l'axe $(O, \vec{z}_0)$ cette équation vectoriel s'écrit en projection sur :

$$\vec{x} : \quad ma + m_1x_1 + m_2x_2 = 0 \qquad (1$$
$$\vec{y} : \quad m_1y_1 + m_2y_2 = 0 \qquad (1$$

Les deux produits d'inertie D′ et E′ ont pour valeu

$$D' = D + m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2$$
$$E' = E + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2$$

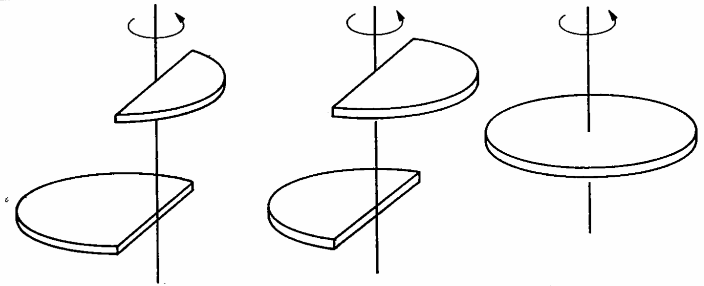
si D′ et E′ sont nuls on obtient les deux relatio supplémentaires suivantes :

$$D + m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2 = 0 \qquad (2$$
$$E + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2 = 0. \qquad (2$$

REMARQUE

> *Si* D *est différent de zéro (cas génér l'équilibrage dynamique ne peut se faire avec u seule masse. En effet, si par exemple* $m_2 =$ *l'équation (19) indique que* $y_1 = 0$, *et l'équati (20) montre alors que* D *doit être nul, ce qui en contradiction avec l'hypothèse de départ.*

On dispose de quatre équations ((18) à (21)) pc déterminer les huit inconnues x_i, y_i, z_i et m_i (i = et 2). Le problème admet une infinité de solutio Il faut donc se fixer quatre conditions. Examinc ces conditions dans le cas de l'équilibrage dy mique d'une roue de véhicule. Dans ce ty d'équilibrage les masses sont fixées sur le bord la jante, de chaque côté de la roue.



(a) (b) (c)

Figure 11 *b* : solide équilibré statiquement mais non dynamiquement.

Figure 11 *a* : solide non équilibré.

Figure 11 *c* : solide équilibré dynamiquemer

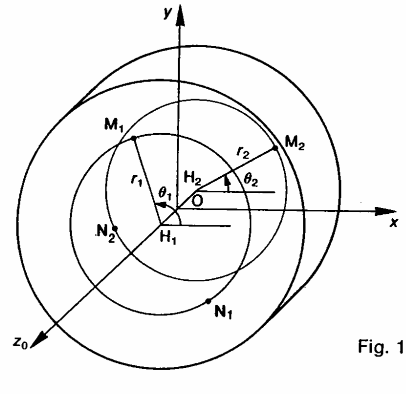


Fig. 12

Notons H_i la projection orthogonale du point M_i sur l'axe $(O, \vec{z}_0)$, et posons :

$$\begin{cases} \theta_i = (\vec{x}, \overrightarrow{H_iM_i}) \\ r_i = \|\overrightarrow{H_iM_i}\|. \end{cases}$$

Remplaçons les coordonnées cartésiennes x_i, y_i, z_i du point M_i par les coordonnées cylindriques r_i, θ_i, z_i. Les quatre conditions imposées sont les valeurs des paramètres z_1, z_2, r_1, r_2 (généralement $r_1 = r_2$) et les quatre inconnues sont m_1, m_2, θ_1, θ_2. Inconnues que l'on détermine avec les quatre équations précédentes.

En éliminant m_2x_2 entre les équations (18) et (21) on obtient la relation :

$$m_1x_1(z_2 - z_1) = E - maz_2. \qquad (22)$$

En éliminant m_2y_2 entre les équations (19) et (20) on obtient la relation :

$$m_1y_1(z_2 - z_1) = D. \qquad (23)$$

REMARQUE

Lorsque D *n'est pas nul, la relation (23) montre que* z_2 *doit être différent de* z_1. *En effet, dans ce cas* m_1 *est différent de zéro, et* y_1 *n'est généralement pas nul. Ce qui veut dire que les deux masses doivent être situées dans deux plans de section droite de la roue, distincts.*

En remplaçant x_1 par $r_1 \cos \theta_1$ dans la relation (22) et y_1 par $r_1 \sin \theta_1$ dans la relation (23), on a à résoudre le système en m_1 et θ_1 suivant :

$$\begin{cases} m_1r_1 \cos \theta_1(z_2 - z_1) = E - maz_2 \\ m_1r_1 \sin \theta_1(z_2 - z_1) = D. \end{cases}$$

En éliminant les membres de gauche de ces deux équations on obtient la relation :

$$(E - maz_2) \sin \theta_1 = D \cos \theta_1$$

si $D \neq 0$:

$$\operatorname{cotg} \theta_1 = \frac{E - maz_2}{D}$$

d'où θ_1, modulo π. La valeur exacte de θ_1 est fixée avec l'une des deux équations.

Connaissant θ_1 on trouve immédiatement m_1. Puis les deux équations (18) et (19) permettent le calcul de m_2 et θ_2.

REMARQUES

— *Au lieu d'ajouter des masses aux points* M_1 *et* M_2 *on peut enlever les mêmes masses aux points* N_1 *et* N_2 *symétriques des points* M_1 *et* M_2 *par rapport à l'axe de rotation* $(O, \vec{z}_0)$. *Cette méthode est couramment utilisée dans l'industrie pour équilibrer des rotors de moteur, des turbines, des vilebrequins, etc.*

— *Dans cette étude nous avons calculé les masses à mettre sur la jante de la roue connaissant* D *et* E, *or dans la réalité ces deux produits d'inertie sont inconnus. D'où l'utilisation d'équilibreuses qui déterminent les caractéristiques de la résonnance engendrée par le mouvement de la roue, montée sur un palier approprié.*

A SAVOIR

1. Le principe fondamental de la dynamique :

Il existe au moins un repère R_g, appelé repère galiléen, et au moins une chronologie, appelée chronologie galiléenne, tels que pour tout sous-ensemble matériel (e) d'un ensemble matériel (E), le torseur dynamique de (e) dans son mouvement par rapport à R_g soit égal au torseur des actions mécaniques extérieures à (e).

soit

$$\{\mathcal{D}(e/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\bar{e} \longrightarrow e)\} \quad \forall (e) \subset (E)$$

2. Une équation de mouvement est une équation différentielle du second ordre traduisant les théorèmes généraux, dans laquelle ne figure aucune composante inconnue d'action mécanique.

3. Le théorème des actions mutuelles

$$\{\mathcal{T}(e_1 \longrightarrow e_2)\} = -\{\mathcal{T}(e_2 \longrightarrow e_1)\}$$

4. Le principe fondamental de la dynamique s'applique relativement à tout repère, à condition d'ajouter au torseur des actions mécaniques extérieures, le torseur des effets d'inertie d'entraînement et le torseur des effets d'inertie de Coriolis.

5. Tout repère en translation rectiligne uniforme par rapport à un repère galiléen, est aussi galiléen.

6. Les conditions d'équilibrage dynamique d'un solide (S) en rotation autour d'un axe par rapport à un bâti :
   - — le centre d'inertie G de (S) est sur l'axe de rotation,
   - — l'axe de rotation est principal d'inertie pour (S).

PROBLÈME RÉSOLU

Le but du problème est de comparer les accélérations maximales qui peuvent être obtenues sur les trois types de véhicules suivants :

- — traction avant (TA),
- — propulsion arrière (PA),
- — quatre roues motrices (4RM).

L'étude est modélisée par le problème plan suivant :

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié à la route axe $(O, \vec{x})$. On désigne par $\vec{g} = -g\vec{y}$ l'accélération de la pesanteur.

Le schéma de la *figure 13* définit certaines dimensions nécessaires à l'étude.

Le véhicule (S) de centre d'inertie G et de masse M est animé par rapport à R d'un mouvement de translation rectiligne, d'accélération $\gamma\vec{x}$ $(\gamma > 0)$.

Les liaisons entre les roues et le châssis du véhicule sont supposées sans frottement.

Les actions mécaniques de la route sur les roues sont définies par les torseurs suivants :

$$\{\mathcal{T}(\text{route} \longrightarrow S_1)\} = {}_{I_1}\!\left\{\begin{matrix} T_1\vec{x} + N_1\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$$

$$\{\mathcal{T}(\text{route} \longrightarrow S_2)\} = {}_{I_2}\!\left\{\begin{matrix} T_2\vec{x} + N_2\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}.$$

Soit f le coefficient de frottement entre les roues et la route.

Considérons les deux coefficients : $\mu_1 = \dfrac{T_1}{N_1}$ et $\mu_2 = \dfrac{T_2}{N_2}$.

On néglige dans cette étude l'action de l'air sur le véhicule et la masse des roues.

On donne : $g = 10$ m/s^2; $L_1 = 1$ m; $L_2 = 1{,}3$ m; $h = 0{,}5$ m; $M = 1\,200$ kg.

QUESTION 1

En supposant qu'il y a équiadhérence des roues pour le véhicule à quatre roues motrices, c'est-à-dire $\mu_1 = \mu_2$:

***a*) déterminer pour chaque type de véhicule les expressions de μ_1 et μ_2 en fonction de γ;**

***b*) tracer les graphes correspondants;**

***c*) interpréter les résultats.**

RÉPONSE

***a*) Véhicule à traction avant :**

Appliquons le principe fondamental de la dynamique au véhicule (S) (dont les roues font partie), dans son mouvement par rapport au repère R :

$$\{\mathcal{D}(S/R)\} = \{\mathcal{T}(\overline{S} \longrightarrow S)\}. \qquad (24)$$

$(\overline{S})$, l'extérieur de (S), est constitué par la pesanteur et la route, au niveau des roues (S_1) et (S_2).

La relation (24) s'écrit donc :

$$\{\mathcal{D}(S/R)\} = \{\mathcal{T}(g \longrightarrow S)\} + \{\mathcal{T}(\text{route} \longrightarrow S_1)\} + \{\mathcal{T}(\text{route} \longrightarrow S_2)\}. \qquad (25)$$

Exprimons ces différents torseurs :

$$\{\mathcal{D}(S/R)\} = {}_{G}\!\left\{\begin{matrix} M\vec{\Gamma}(G/R) \\ \vec{\delta}_G(S/R) \end{matrix}\right\} = {}_{G}\!\left\{\begin{matrix} M\gamma\vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$$

le moment dynamique $\vec{\delta}_G(S/R)$ est nul, car

$$\vec{\delta}_G(S/R) = \left[\frac{d}{dt}\,\vec{\sigma}_G(S/R)\right]_R$$

avec $\vec{\sigma}_G(S/R) = \vec{0}$, le véhicule ayant un mouvement de translation et la masse des roues étant négligée.

$$\{\mathcal{T}(g \longrightarrow S)\} = {}_{G}\!\left\{\begin{matrix} -Mg\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$$

$$\{\mathcal{T}(\text{route} \longrightarrow S_1)\} = {}_{I_1}\!\left\{\begin{matrix} T_1\vec{x} + N_1\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$$

$$\{\mathcal{T}(\text{route} \longrightarrow S_2)\} = {}_{I_2}\!\left\{\begin{matrix} N_2\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}.$$

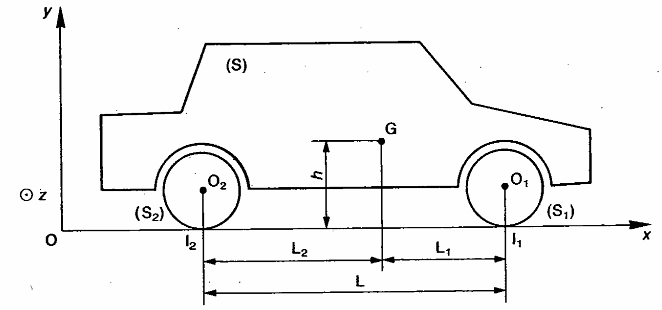


Fig. 13

T_2 est nul. Pour le vérifier il suffit d'appliquer le principe fondamental de la dynamique à la roue (S_2).
Par suite, l'égalité (25) devient :

$$ {}_G\left\{\begin{matrix} M\gamma\vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\} = {}_G\left\{\begin{matrix} -Mg\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\} + {}_{I_1}\left\{\begin{matrix} T_1\vec{x} + N_1\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\} + {}_{I_2}\left\{\begin{matrix} N_2\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\} $$

d'où la première équation vectorielle (théorème de la résultante dynamique) :

$$ M\gamma\vec{x} = -Mg\vec{y} + T_1\vec{x} + N_1\vec{y} + N_2\vec{y} $$

soit en projection

— sur $\vec{x}$: $\quad M\gamma = T_1 \qquad (26)$

— sur $\vec{y}$: $\quad 0 = -Mg + N_1 + N_2$

et la deuxième équation vectorielle (théorème du moment dynamique au point I_2) :

$$ \overrightarrow{I_2G} \wedge M\gamma\vec{x} = \overrightarrow{I_2G} \wedge (-Mg\vec{y}) + \overrightarrow{I_2I_1} \wedge (T_1\vec{x} + N_1\vec{y}) $$

ce qui donne en projection sur $\vec{z}$, avec les dimensions inscrites sur le dessin :

$$ -M\gamma h = -M_g L_2 + N_1 L. \qquad (27) $$

Par conséquent, l'expression $\mu_1 = \dfrac{T_1}{N_1}$ s'écrit, avec la valeur de T_1 donnée par la relation (26), et la valeur de N_1 obtenue à partir de la relation (27) :

$$ \boxed{\mu_1 = \frac{\gamma L}{gL_2 - \gamma h.}} $$

T_2 étant nulle : $\boxed{\mu_2 = 0.}$

Par un raisonnement analogue :

— pour un **véhicule à propulsion arrière** :

$$ \boxed{\mu_1 = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\mu_2 = \frac{\gamma L}{gL_1 + \gamma h}} $$

— pour un **véhicule à quatre roues motrices** :

$$ \boxed{\mu_1 = \mu_2 = \frac{\gamma}{g}.} $$

b) Les graphes correspondants sont tracés *figure 14* (sauf les courbes en pointillés).

Les pentes à l'origine sont :

$$ \left\{\begin{aligned} \mu_1'(\text{TA}) &= \frac{L}{gL_2} = 0{,}176 \\ \mu_2'(\text{PA}) &= \frac{L}{gL_1} = 0{,}23 \\ \mu'(\text{4RM}) &= \frac{1}{g} = 0{,}1. \end{aligned}\right. $$

Remarquons que $\mu_1(\text{TA}) = \mu_2(\text{PA}) = 0{,}6$ pour $\gamma = 3\ \text{m/s}^2$.

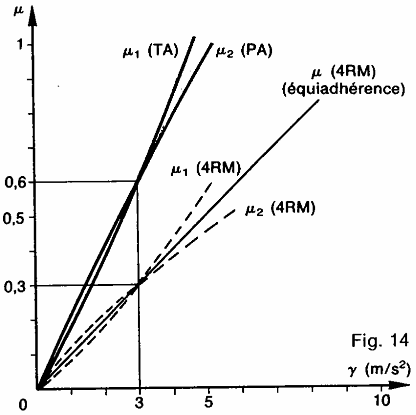


Fig. 14

c) Meilleure motricité du véhicule à quatre roues motrices dans tous les cas.
Si $f < 0{,}6$: meilleure motricité TA/PA.
Si $f > 0{,}6$: meilleure motricité PA/TA.

QUESTION 2

L'hypothèse d'équiadhérence des roues n'est pas conforme à la réalité pour le véhicule de série à quatre roues motrices. Pour ce type de véhicule la puissance transmise par le moteur aux roues avant et arrière est sensiblement identique ($T_1 = T_2$).
En considérant cette nouvelle hypothèse :
***a*) déterminer pour le véhicule à quatre roues motrices les expressions de μ_1 et μ_2 en fonction de γ;**
***b*) tracer les graphes correspondants;**
***c*) interpréter les résultats.**

RÉPONSE

a) En appliquant le principe fondamental de la dynamique au véhicule (S) dans son mouvement par rapport au repère R, on aboutit de la même façon que précédemment, au système de trois équations suivantes :

$$ \left\{\begin{aligned} M\gamma &= T_1 + T_2 \\ 0 &= -Mg + N_1 + N_2 && (28) \\ -M\gamma h &= -MgL_2 + N_1 L. && (29) \end{aligned}\right. $$

Sachant que $T_1 = T_2$, on en déduit que :

$$ \boxed{\mu_1 = \frac{\gamma L}{2(gL_2 - \gamma h)}} $$

et

$$ \boxed{\mu_2 = \frac{\gamma L}{2(gL_1 + \gamma h)}.} $$

b) Les graphes correspondants sont tracés *figure 14 :* courbes en pointillés.

Remarquons que :

$$\mu_{1(4RM)}=\mu_{2(4RM)}=0{,}3 \text{ pour } \gamma=3 \text{ m/s}^2.$$

c) Accélération limitée par μ_2 si $f<0{,}3$.
Accélération limitée par μ_1 si $f>0{,}3$.

QUESTION 3

Pour les véhicules à quatre roues motrices utilisés dans les rallyes on cherche le plus possible à obtenir une équiadhérence des roues en répartissant convenablement la puissance du moteur entre les roues avant et arrière.
Dans l'hypothèse d'équiadhérence des roues :

***a*) déterminer en fonction de γ, le rapport de puissance $\frac{T_1}{T_2}$ qu'il devrait y avoir entre les roues avant et arrière;**

***b*) tracer le graphe correspondant.**

RÉPONSE

a) Les valeurs des composantes normales N_1 et N_2, obtenues à partir des relations (28) et (29) de la question 2, sont les suivantes :

$$N_1=\frac{M}{L}(gL_2-\gamma h)$$

$$N_2=\frac{M}{L}(gL_1+\gamma h)$$

s'il y a équiadhérence des roues : $\mu_1=\mu_2$ comm
$\mu_1=\frac{T_1}{N_1}$ et $\mu_2=\frac{T_2}{N_2}$, on en déduit que :

$$\boxed{\frac{T_1}{T_2}=\frac{gL_2-\gamma h}{gL_1+\gamma h}.}$$

b) Le graphe de $\frac{T_1}{T_2}$ en fonction de γ est trac
figure 15.

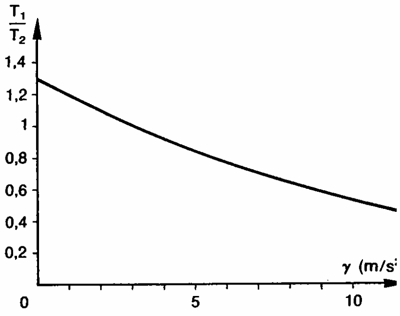


Fig. 15

CONSEILS POUR LA RÉSOLUTION

1. Pour obtenir une équation de mouvement, il faut analyser les torseurs d'action mécanique du mécanisme, pour choisir :
— les sous-ensembles de pièces auxquels on appliquera le principe fondamental,
— le point où l'on écrira le théorème du moment dynamique,
— l'axe sur lequel on projetera les équat vectorielles traduisant les théorèmes généraux.

2. Rechercher les intégrales premières du mou ment pour obtenir des équations simples.

3. Il est déconseillé, sauf cas exception d'utiliser le principe fondamental de la dynami dans un repère non galiléen.

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 — Pour déterminer le moment d'inertie I du rotor (S) d'un gyroscope, autour de son axe de révolution matérielle, on réalise la manipulation suivante, basée sur la mesure de la période d'oscillation d'un pendule de torsion.

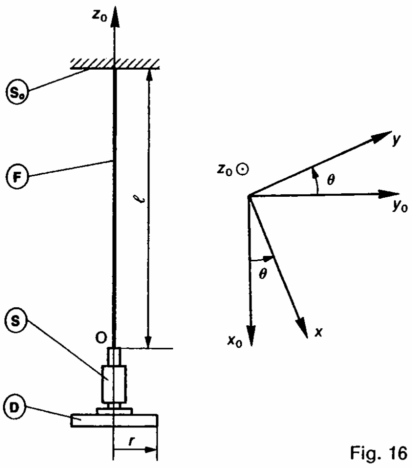


Fig. 16

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère galiléen lié à un bâti (S_0), l'axe $(O, \vec{z}_0)$ étant dirigé suivant la verticale ascendante.
Un fil de torsion (F) de longueur l, de section droite circulaire de diamètre d, disposé suivant l'axe $(O, \vec{z}_0)$, est fixé à l'une de ses extrémités au bâti (S_0).
Le rotor (S) est lié à (F) de telle façon que son axe de révolution matérielle coïncide avec l'axe de (F).
Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à (S). On pose $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x})$, l'angle θ est nul lorsque le système est au repos.
Le moment de torsion exercé par (F) sur (S) est $\overrightarrow{M}_0 = M\vec{z}_0$, avec $M = -K\theta$ et $K = \text{Cte}$ (raideur du fil en torsion).

QUESTIONS

1° Déterminer l'équation de mouvement de (S) par rapport à R_0.

2° Déterminer $\theta(t)$, sachant qu'à la date $t = 0$: $\theta(0) = \theta_0$ et $\theta'(0) = 0$.

3° Déterminer la période T du mouvement.

4° Un disque (D) homogène, de masse m, de rayon r, est fixé à l'extrémité de (S) de telle façon que son axe coïncide avec celui de (S). Déterminer alors la période T_1 du mouvement.

5° En déduire l'expression de I en fonction de T, T_1, m et r.

Application numérique : **$T = 2{,}33$ s; $T_1 = 2{,}96$ s; $m = 600$ g; $r = 5$ cm.**

6° θ_0 ne doit pas être trop grand, pour que le fil reste dans le domaine élastique. Afin de connaître $\theta_{0\,\text{maxi}}$, déterminer :

a) Le module de Coulomb du fil. On rappelle (cours de première) que : $K = \dfrac{GI_0}{l}$, avec G = module de Coulomb du fil; $I_0 = \dfrac{\pi d^4}{32}$ et l = longueur du fil.
Application numérique : **$l = 90$ cm et $d = 1$ mm.**

b) En déduire la valeur de $\theta_{0\,\text{maxi}}$, sachant que la contrainte tangentielle maximale dans la section droite du fil est : $\tau_{\text{maxi}} = 100$ MPa.
On rappelle que $\tau_{\text{maxi}} = \dfrac{M \cdot d}{2I_0}$.

RÉPONSES

1° $\theta'' + \omega^2\theta = 0$, avec $\omega^2 = \dfrac{K}{I}$.

2° L'équation différentielle du second ordre précédente a pour équation caractéristique : $r^2 + \omega^2 = 0$, dont les deux solutions imaginaires conjuguées sont : $r_1 = i\omega$ et $r_2 = -i\omega$.
Dans ce cas, la solution générale est de la forme : $\theta = A \cos \omega t + B \sin \omega t$.
Avec les conditions initiales proposées : $A = \theta_0$ et $B = 0$.
Alors : $\theta = \theta_0 \cos \omega t$.

3° $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

4° $T_1 = 2\pi \sqrt{\dfrac{I + \dfrac{mr^2}{2}}{K}}$.

5° $I = \dfrac{\dfrac{mr^2}{2}}{\left(\dfrac{T_1}{T}\right)^2 - 1}$.

Application numérique : $I = 1{,}22 \cdot 10^{-3}$ kg·m².

6° a) $G = 81\,400$ MPa.

b) $\theta_{0\,\text{maxi}} = 2{,}2$ rad.

2 — La *figure 17* représente une broche multiplicatrice adaptable sur fraiseuse, machine à pointer, perceuse ou aléseuse dont la vitesse de rotation est généralement insuffisante pour donner la vitesse de coupe rationnelle aux fraises couteaux de petit diamètre.
Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère galiléen lié au corps ⓪ de la broche. Les arbres ① et ② ont une liaison pivot sans frottement d'axe $(O, \vec{y}_0)$ avec le corps ⓪.

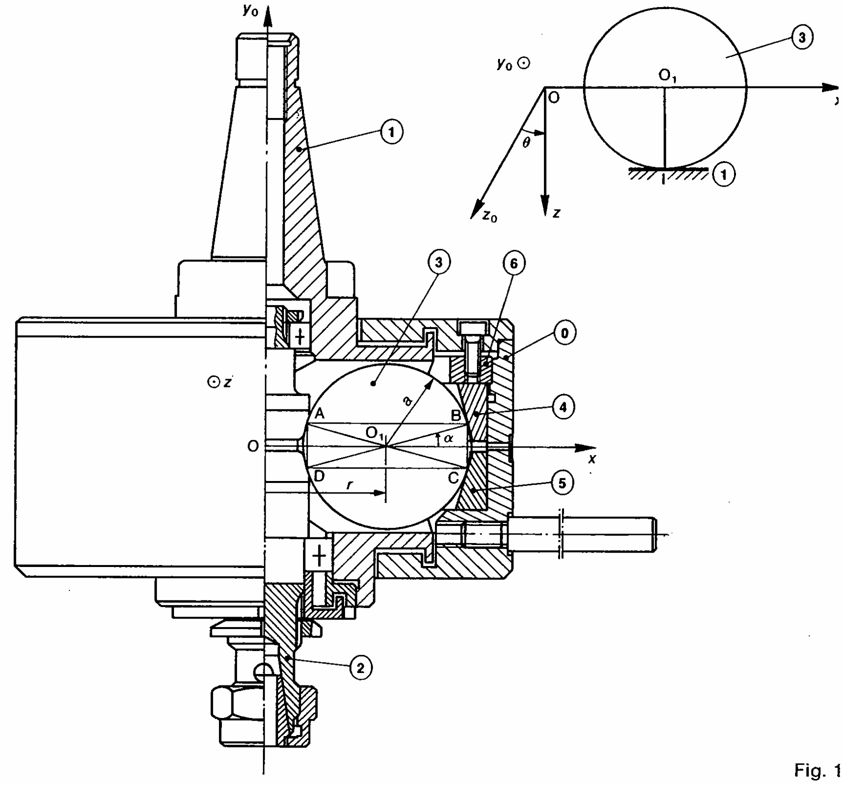


Fig. 1

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}_0, \vec{z})$ un repère lié à l'arbre moteur ①. On pose : $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z})$, avec $\theta' = \text{constante} = \omega_e$ $(\omega_e > 0)$.

L'arbre ① entraîne en rotation trois sphères telles que ③, homogènes, de masse m, de rayon a, disposées à 120° les unes des autres.

Le centre O_1 de la sphère ③ décrit un cercle de centre O et de rayon r, tel que $\overrightarrow{OO_1} = r\vec{x}$.

La sphère ③ roule sans glisser aux points B et C sur deux bagues coniques ④ et ⑤ liées au corps ⓪, et communique son mouvement à l'arbre récepteur ② en roulant sans glisser aux points A et D sur celui-ci. On pose : $\vec{\Omega}(②/R_0) = \omega_S \vec{y}_0$. Les points A, B, C, D sont les quatre sommets d'un rectangle, comme indiqué sur la figure. Notons : $(\vec{x}, \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{AC}, \vec{x}) = \alpha$.

① est en contact avec ③ au point I tel que $\overrightarrow{O_1I} = a\vec{z}$. Soit f le coefficient de frottement aux points A, B, C, D et I entre les différentes pièces en contact. On définit l'action mécanique de l'arbre ② sur la sphère ③, niveau du point A, par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(② \xrightarrow{A} ③)\} = {}_A\begin{Bmatrix} N_A\vec{n} + T_A\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$\vec{n}$: vecteur unitaire dirigé du point A vers centre O_1 de la sphère ③ (alors $N_A \geqslant 0$).

Les autres torseurs d'action mécanique sur ③, a points B, C, D et I, sont définis d'une façon analogu

L'action mécanique de la pesanteur étant négligée, suppose que les composantes normales en B et C so égales, ainsi que les composantes tangentielles (N_B N_C et $T_B = T_C$).

Le but de l'étude est de savoir comment régler la bag ⑥ pour qu'elle engendre une action mécanique suffisan entre les sphères, l'arbre ② et les bagues coniques ④ ⑤, de façon à transmettre la puissance motrice, sa toutefois dépasser les pressions de contact maximal que peuvent supporter les matériaux.

On donne :

$\omega_e = 157{,}08$ rad/s (1 500 tr/min).

Puissance fournie à l'arbre moteur ① : P = 750 W (voir cours de terminale).

$r = 48$ mm; $a = 32{,}5$ mm; $\alpha = 14°$; $f = 0{,}12$; $m = 1{,}121$ kg.

QUESTIONS

1° Déterminer au point O_1 le torseur cinématique du mouvement de la sphère ③ par rapport au repère R_0.

2° Déterminer le rapport de multiplication de la broche : $\frac{\omega_S}{\omega_e}$.

3° Déterminer le vecteur vitesse de glissement au point I de la sphère ③ par rapport à l'arbre moteur ① : $\vec{V}(I \in ③/①)$.

4° Déterminer au point O_1 le torseur dynamique de la sphère ③ dans son mouvement par rapport au repère R_0.

5° Écrire les équations scalaires déduites du principe fondamental de la dynamique appliqué à la sphère ③ dans son mouvement par rapport au repère R_0, en projection sur $\vec{x}$, $\vec{y}_0$, $\vec{z}$. (Le théorème du moment dynamique sera écrit au point O_1.)

6° Déterminer la composante normale N_I de la résultante générale du torseur d'action mécanique de ① sur ③.

7° Déterminer les composantes tangentielles T_A et T_B des résultantes générales des torseurs d'action mécanique de ② sur ③ et ④ sur ③ respectivement.

8° Déterminer la valeur minimale de N_B pour qu'il y ait roulement sans glissement aux points A, B, C, D entre les solides en contact.

9° La puissance perdue par frottement au contact de la sphère ③ et de l'arbre moteur ① est :

$$P_f = T_I\vec{x} \cdot \vec{V}(I \in ③/①).$$

Déterminer alors le rendement η du mécanisme $\left(\eta = \frac{P - 3|P_f|}{P}\right)$.

RÉPONSES

1° $\{\mathcal{V}(③/R_0)\} = {}_{O_1}\begin{Bmatrix} -\dfrac{r}{a \cos \alpha}\,\omega_e \vec{y}_0 \\ -\omega_e r \vec{z} \end{Bmatrix}$.

2° $\dfrac{\omega_s}{\omega_e} = \dfrac{2r}{r - a \cos \alpha}$, $\quad \dfrac{\omega_s}{\omega_e} = 5{,}83$.

3° $\vec{V}(I \in ③/①) = -\dfrac{r + a \cos \alpha}{\cos \alpha}\,\omega_e \vec{x}$, d'où

$$\|\vec{V}(I \in ③/①)\| = 12{,}87 \text{ m/s}.$$

4° $\{\mathcal{D}(③/R_0)\} = {}_{O_1}\begin{Bmatrix} -mr\omega_e^2 \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$.

5° On montre que $N_A = N_D$ et $T_A = T_D$. Les autres équations s'écrivent alors :

$$\begin{cases} 2(N_A - N_B)\cos \alpha + T_I = -mr\omega_e^2 \\ 2(T_A + T_B) - N_I = 0 \\ 2(T_A - T_B)\cos \alpha + T_I = 0. \end{cases}$$

6° $N_I = \dfrac{P}{3(r + af)\,\omega_e}$, $\quad N_I = 30{,}68$ N.

7° $T_A = 6{,}72$ N, $\quad T_C = 8{,}62$ N.

8° $N_{B_{min}} = 740{,}95$ N.

9° $\eta = 0{,}81$.

3 — L'aérogénérateur présenté *figure 18* est utilisé pour répondre aux besoins en énergie électrique d'installations isolées : milieux désertiques, milieux maritimes. Son rôle est de transformer l'énergie éolienne en énergie électrique. Celle-ci sera soit utilisée directement, soit stockée dans des batteries d'accumulation. L'aérogénérateur est constitué :

— d'une hélice bipale d'axe horizontal,

— d'un dispositif d'orientation (safran et liaison pivot d'axe vertical),

— d'un générateur électrique.

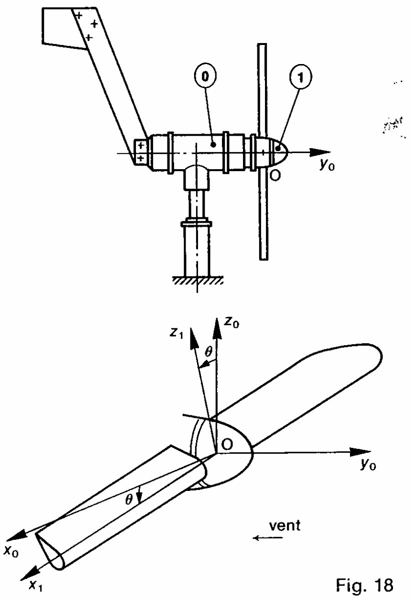


Fig. 18

Étudions l'aérogénérateur par vent stable.

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère galiléen lié au corps ⓪ de l'aérogénérateur, tel que l'axe $(O, \vec{y}_0)$ soit confondu avec l'axe de l'hélice.

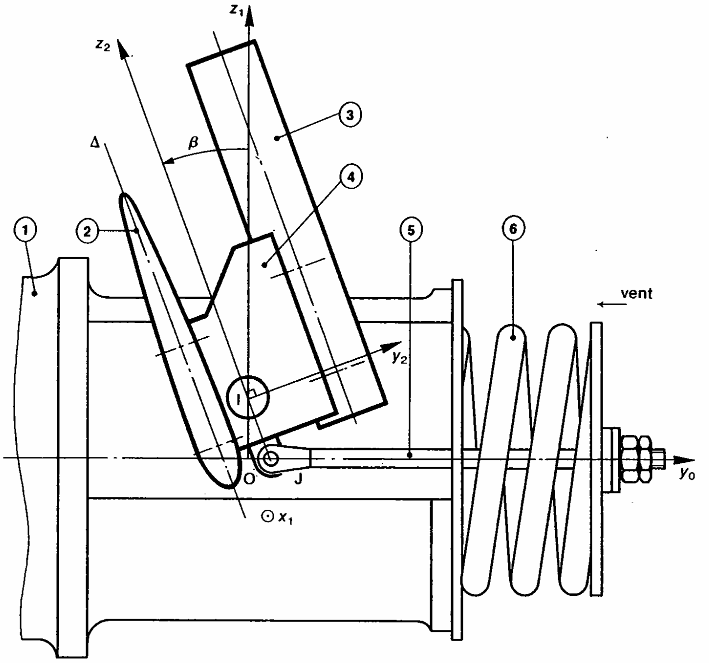


Fig. 19

Le vent souffle à la vitesse $\vec{V}=-V\vec{y}_0$ (V : constante positive).

L'arbre ① de l'hélice a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{y}_0)$ avec ⓪. Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{z}_1)$ un repère lié à ① tel que l'axe $(O, \vec{x}_1)$ soit parallèle à l'axe des pales. On pose $\theta=(\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ avec $\theta'=\text{Cte}=\omega$ $(\omega>0)$.

Le fonctionnement optimal de l'aérogénérateur est obtenu avec les conditions suivantes : $V=7$ m/s et $\omega=120$ rad/s. Un système de régulation modifiant l'angle de calage β permet de rester au voisinage de ce point de fonctionnement.

L'aérogénérateur comporte un système de régulation par pale. Pour la pale ②, celui-ci est constitué par un ensemble Ⓢ de pièces cinématiquement équivalentes : {② : pale, ③ : barre de régulation, ④ : support} et par un ressort ⑥ pris entre l'arbre ① et la tige de rappel ⑤.

Cet ensemble Ⓢ a une liaison pivot sans frottement d'axe $(I, \vec{x}_1)$ avec l'arbre ①, telle que $\overrightarrow{OI}=d\vec{z}_1$ $(d>0)$. Soit $R_2(I, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère lié à Ⓢ, tel que l'axe $(I, \vec{z}_2)$ soit parallèle à la droite de référence Δ de la pale.

On pose : $\beta=(\vec{z}_1, \vec{z}_2)$, $\beta=\text{constante}=20°$.

La tige ⑤ a une liaison linéique annulaire sans frottemen d'axe $(J, \vec{x}_1)$ avec Ⓢ, telle qu $\overrightarrow{IJ}=-a\vec{z}_2$ $(a>0)$. Le point J est sur l'axe $(O, \vec{y}_0$ lorsque $\beta=20°$.

Ⓢ a pour masse M et la position de son centre d'inerti G est définie par : $\overrightarrow{IG}=\lambda\vec{x}_1+\mu\vec{z}_2$. La matrice d'inerti de Ⓢ au point G, dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est l suivante :

$$[I_G(S)]=\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

L'action mécanique du vent sur la pale ② est représenté par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(\text{vent} \longrightarrow ②)\}= {}_{H}\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

avec $\vec{R}=-R\vec{y}_2$, $R>0$ (seule la composante de $\vec{R}$ suivan $\vec{y}_2$, entraîne la pale en rotation) et

$$\overrightarrow{IH}=p\vec{x}_1+q\vec{y}_2+r\vec{z}_2.$$

L'action mécanique de ⑤ sur Ⓢ est représentée par l force $(J, Y\vec{y}_0)$. Le but de l'étude est de déterminer Y L'action mécanique de la pesanteur est négligée.

On donne :

$\omega = 120$ rad/s; $\beta = 20°$; $d = 14$ mm; $\lambda = 159$ mm;
$\mu = 13$ mm; $M = 850$ g; $A = 700 \cdot 10^{-6}$ kg·m²;
$B = 30\,650 \cdot 10^{-6}$ kg·m²; $C = 30\,200 \cdot 10^{-6}$ kg·m²;
$D = 180 \cdot 10^{-6}$ kg·m²; $E = -1\,920 \cdot 10^{-6}$ kg·m²;
$F = -1\,150 \cdot 10^{-6}$ kg·m²; $R = 100$ N; $p = 400$ mm;
$q = -8{,}5$ mm; $r = -6$ mm.

QUESTIONS

1° Déterminer le moment cinétique, au point G, de Ⓢ dans son mouvement par rapport à R_0 : $\vec{\sigma}_G(S/R_0)$.

2° Déterminer la projection sur $\vec{x}_1$ du moment dynamique, au point I, de Ⓢ dans son mouvement par rapport à R_0 : $\vec{x}_1 \cdot \vec{\delta}_I(S/R_0)$.

3° Écrire en projection sur $\vec{x}_1$ le théorème du moment dynamique, au point I, appliqué à Ⓢ dans son mouvement par rapport à R_0.

4° En déduire l'action mécanique exercée par la tige ⑤ sur l'ensemble Ⓢ.

RÉPONSES

1° $\vec{\sigma}_G(S/R_0) = \omega(-F\cos\beta + E\sin\beta)\vec{x}_1$
$+ \omega(B\cos\beta + D\sin\beta)\vec{y}_2$
$- \omega(D\cos\beta + C\sin\beta)\vec{z}_2$.

2° Commencer le calcul de cette façon :

$\vec{x}_1 \cdot \vec{\delta}_I(S/R_0) = \vec{x}_1 \cdot \vec{\delta}_G(S/R_0) + \vec{x}_1 \cdot (M\vec{\Gamma}(G/R_0) \wedge \overrightarrow{GI})$.

Par suite :

$\vec{x}_1 \cdot \vec{\delta}_I(S/R_0) = \omega^2[(B - C + M\mu^2)\sin\beta\cos\beta$
$+ D(\sin^2\beta - \cos^2\beta) + M\mu d\sin\beta]$.

3° $\vec{x}_1 \cdot \vec{\delta}_I(S/R_0) = \vec{x}_1 \cdot \overrightarrow{M}_I(\overline{S} \longrightarrow S)$ avec
$\vec{x}_1 \cdot \overrightarrow{M}_I(\overline{S} \longrightarrow S) = Yd + Rr$.

4° $Y = 151$ N.

4 — Dans la pompe à vide à palettes « FLACO », dont un dessin partiel est donné *figure 20*, on se propose au cours du fonctionnement de savoir :

— si les palettes restent bien appliquées sur l'alésage du corps (S_0) de la pompe,

— s'il y a risque d'arc-boutement des palettes dans leur liaison avec le rotor (S_1) de la pompe.

(L'étude est limitée au voisinage de la position où les palettes sortent au maximum de (S_1)).

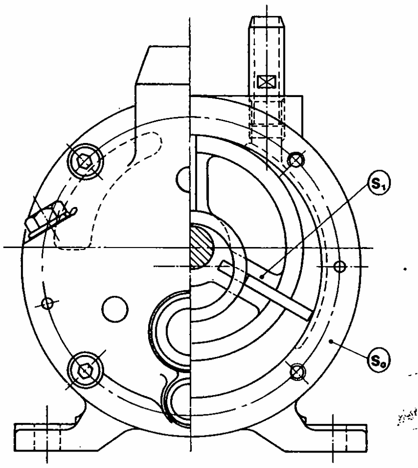


Fig. 20

Pour cela adoptons le modèle plan suivant :

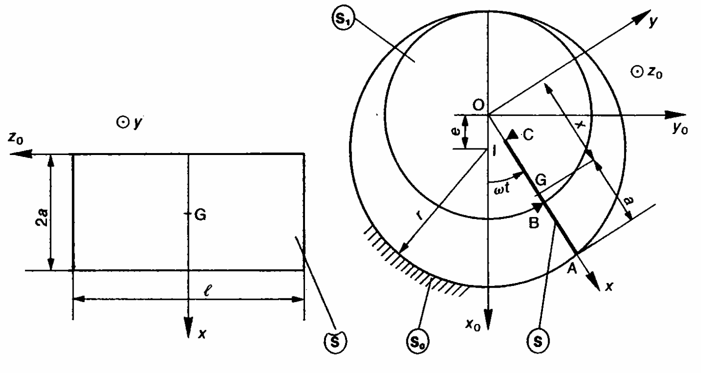


Fig. 21

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère galiléen lié au corps (S_0) de la pompe.

L'alésage de rayon r, du corps de la pompe, est d'axe $(I, \vec{z}_0)$, tel que : $\overline{OI} = e\vec{x}_0$ $(e > 0)$. Le rotor (S_1) a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec (S_0). Son rayon extérieur est égal à $r - e$. Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$ un repère lié à (S_1). On pose $(\vec{x}_0, \vec{x}) = \theta$, avec $\theta' = \text{Cte} = \omega$ $(\omega > 0)$; $\theta = \omega t$.

Considérons la palette (S) disposée suivant l'axe $(O, \vec{x})$. (S) est assimilée à un rectangle de longueur l, de largeur $2a$, d'épaisseur négligeable. Soient m la masse et G le centre d'inertie de (S). On pose $\overline{OG} = x\vec{x}$.

La différence de pression entre les deux faces de la palette est Δp.

La palette (S) a une liaison glissière avec jeu et frottement (coefficient de frottement f) avec (S_1), si bien qu'on peut remplacer cette liaison par deux liaisons ponctuelles avec frottement aux points B et C, de normales $\vec{y}$ et $-\vec{y}$ respectivement. La liaison entre (S) et (S_0) est ponctuelle avec frottement (coefficient de frottement f également) au point A, de normale $-\vec{x}$, si l'on considère que $|\omega t|$ est petit.

Les torseurs d'action mécanique aux points A, B et C sont de la forme :

$$\{\mathcal{T}(S_0 \longrightarrow S)\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} N\vec{x} + T\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{T}(S_1 \xrightarrow{B} S)\} = {}_{B}\begin{Bmatrix} X_B\vec{x} + Y_B\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{T}(S_1 \xrightarrow{C} S)\} = {}_{C}\begin{Bmatrix} X_C\vec{x} + Y_C\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

L'action mécanique de la pesanteur est négligée. On donne :

$m = 0{,}1$ kg; $a = 17$ mm; $l = 80$ mm; $r = 60$ mm; $e = 8$ mm; $\Delta p = 0{,}1$ bar; $\omega = 10\pi$ rad/s (300 tr/min); $f = 0{,}1$.

QUESTIONS

1° Montrer qu'en première approximation :

$$x = r - a + e \cos \omega t.$$

(Faire les approximations nécessaires sachant que $\frac{e}{r} = 0{,}133$.)

2° Déterminer au point G les torseurs des effets d'inertie d'entraînement et de Coriolis du mouvement de (S) par rapport à R et R_0.

3° Écrire les trois équations scalaires déduites du principe fondamental de la dynamique appliqué à (S) dans son mouvement par rapport au repère R.

4° Pour ωt petit négatif, déterminer la valeur minimale de ω pour que l'extrémité A de (S) soit en contact avec l'alésage de (S_0). (Faire les approximations nécessaires.)

5° Pour ωt petit positif, déterminer la valeur maximale que peut avoir f pour qu'il n'y ait pas arc-boutement de (S) dans (S_1).

RÉPONSES

1° Soit H le pied de la perpendiculaire abaissée c sur OA.

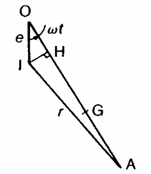


Fig.

On peut écrire que OA = OH + HA d'où

$$x + a = e \cos \omega t + \sqrt{r^2 - e^2 \sin^2 \omega t}$$

$e^2 \sin^2 \omega t$ étant négligeable devant r^2, on trouve :

$$x = r - a + e \cos \omega t.$$

2° $\{\mathcal{D}_{ie}(S, R/R_0)\} = {}_{G}\begin{Bmatrix} mx\omega^2\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

$\{\mathcal{D}_{ic}(S, R/R_0)\} = {}_{G}\begin{Bmatrix} 2m\omega^2 e \sin \omega t\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

3° En supposant $\sin \omega t = 0$ et $\cos \omega t = 1$, on obtie

$$\begin{cases} N + X_B + X_C = -m\omega^2(r - a + 2_e) \\ T + Y_B + Y_C = 2el\Delta p \\ aT + (a - 2_e)Y_B - aY_C = (a - e)2el\Delta p. \end{cases}$$

4° $\omega^2 > \dfrac{2fael\Delta p}{m(a - e)(r - a + 2_e)}$ ($\omega > 24{,}71$ rad/s $= 236$ tr/m

5° $f^2 < \dfrac{a - e}{a + e}$ $(f < 0{,}6)$.

★ 5 — *Effet gyroscopique*

On peut mettre en évidence simplement l'effet gyros pique en réalisant l'une des petites expérier suivantes :

— Un parapluie ouvert repose sur l'index en un p A de son manche horizontal, voisin de son cei d'inertie G *(figure 23)*.

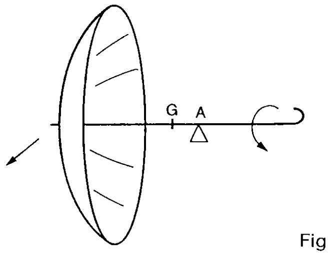


Fig.

Si on lâche le parapluie, dans cette position, sans donner aucun mouvement initial, celui-ci toı verticalement. Par contre, si on lâche le parapluie aı lui avoir donné un mouvement de rotation rapide aut de son axe, celui-ci, au lieu de tomber verticalement se met à tourner autour du point A dans un plan horizontal. Le sens de rotation dépendant du sens de rotation initiale donnée.

— Une expérience semblable peut être réalisée avec une toupie *(voir paragraphe 4.2).*

C'est grâce à un mouvement de rotation rapide autour de son axe que le moment du poids de la toupie, par rapport à sa pointe, peut être équilibré par un moment, dit moment du couple gyroscopique. Dans ce mouvement l'axe de la toupie décrit un cône.

— Une autre expérience simple consiste à balancer à bout de bras une perceuse portative dont l'axe du moteur est situé dans le plan d'oscillation du bras, perpendiculairement au bras. Lorsque le moteur tourne, le bras est sollicité en torsion par le moment du couple gyroscopique, dans un sens ou dans l'autre suivant le sens du mouvement du bras.

Le but du problème qui suit est de mesurer le moment du couple gyroscopique, créé par un gyroscope de laboratoire *(figure 24).*

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère galiléen lié au bâti (S_0) du gyroscope, l'axe $(O, \vec{z}_0)$ étant dirigé suivant la verticale ascendante. Soit $\vec{g} = -g\vec{z}_0$ l'accélération de la pesanteur.

Le cadre (S_1) a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec (S_0). Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$ un repère lié à ce cadre. On pose : $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x})$. Un moteur (M_1) lié à (S_0) entraîne (S_1) en rotation.
Le cadre (S_2) a une liaison pivot sans frottement d'axe $(O, \vec{y})$ avec (S_1).
Soit $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}, \vec{z}_2)$ un repère lié à (S_2). On pose : $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$.
Le rotor (S) a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x}_2)$ avec (S_2). Un moteur (M_2) lié à (S_2) entraîne (S) à vitesse angulaire constante. On pose

$$\vec{\Omega}(S/R_2) = \varphi'\vec{x}_2 \text{ avec } \varphi' = \text{constante}.$$

Ce système est conçu de telle façon que le centre d'inertie de l'ensemble constitué par (S_2), (M_2) et (S) se trouve sur l'axe $(O, \vec{y})$. Alors $\theta = 0$ lorsque $\psi' = 0$.
La matrice d'inertie, au point O, de l'ensemble constitué par (S_2) et (M_2), rotor du moteur exclu, est :

$$[I_0(S_2, M_2)] = \begin{bmatrix} A_2 & -F_2 & 0 \\ -F_2 & B_2 & 0 \\ 0_2 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}, \vec{z}_2)}$$

La matrice d'inertie, au point O, de (S), rotor du moteur compris, est :

$$[I_0(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2, -, -)}$$

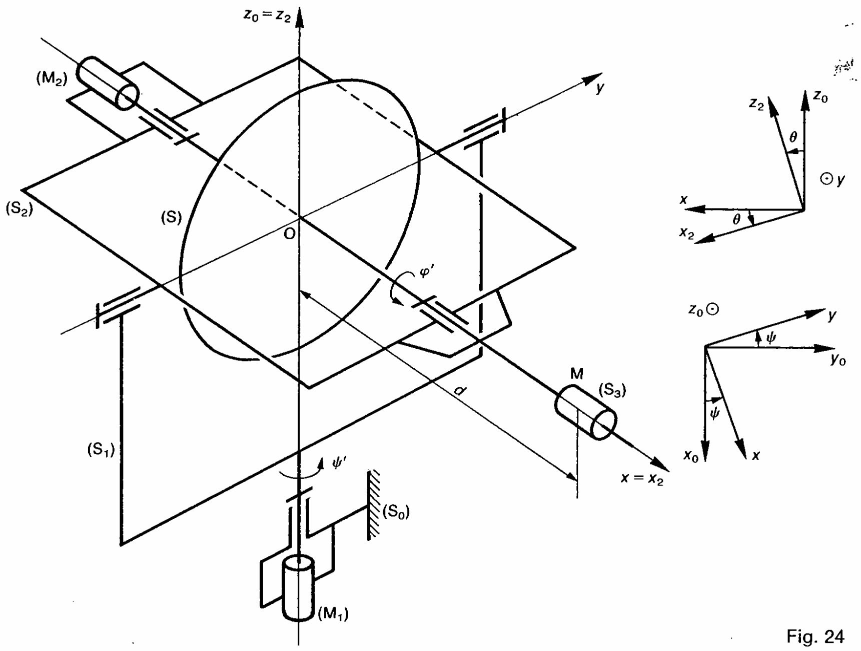


Fig. 24

Un solide (S_3) assimilable a un point matériel de masse m est placé au point M, tel que $\overrightarrow{OM} = d\vec{x}_2$ $(d > 0)$. Alors (S_2) s'incline, et l'on règle la vitesse de rotation du moteur (M_1) de telle façon que θ redevienne nul. Alors $\vec{x}_2 = \vec{x}$ et $\vec{z}_2 = \vec{z}_0$.

QUESTIONS

1° Quelle équation scalaire obtient-on en appliquant à l'ensemble matériel (E) constitué par (S_2), (M_2), (S) et (S_3), dans son mouvement par rapport à R_0, le théorème du moment dynamique au point O, en projection sur $\vec{y}$?

2° Déterminer ψ' sachant que :

$$m = 350 \text{ g};\quad g = 9{,}81 \text{ m/s}^2;\quad d = 15 \text{ cm};$$
$$\varphi' = 4\,500 \text{ tr/min};\quad A = 1{,}22 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

RÉPONSES

1° En supposant $\theta = 0$ et $\varphi' = $ constante, on obtient relation :

$$A\varphi'\psi' = mgd$$

on en déduit que ψ' est constant.

2° Avec les valeurs proposées : $\psi' = \frac{1}{7}$ tr/s.

REMARQUES

— Le terme $A\varphi'\psi'$ est appelé moment du cou gyroscopique. C'est lui qui s'oppose au moment poids de (S_3), par rapport à l'axe $(O, \vec{y})$.

— Lorsqu'on cherche à modifier la direction l'axe du rotor du gyroscope, celui-ci se dérobe tournant autour de $(O, \vec{z}_0)$.

EXERCICES SANS RÉPONSES

6 — Étude de la phase de démarrage d'un variateur de vitesse à plateau, schématisé *figure 25*.

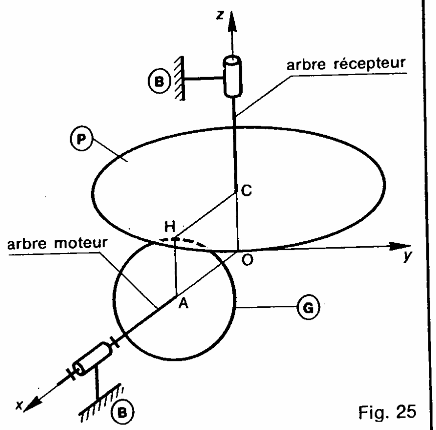


Fig. 25

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au bâti (B) du variateur. On désigne par $\vec{g} = -g\vec{z}$ l'accélération de la pesanteur.

Le galet (G) est lié à l'arbre moteur qui a une liaison pivot sans frottement d'axe $(O, \vec{x})$ avec le bâti (B) (l'arbre moteur est immobilisé en translation après réglage).

Le galet (G) est assimilé à un disque de rayon r d'épaisseur négligeable, de centre A situé sur l'axe $(O, \vec{x})$, dont le plan est perpendiculaire à $\vec{x}$.

On pose :

$\overrightarrow{OA} = \lambda\vec{x}$, λ : constante positive donnée;
I : moment d'inertie par rapport à l'axe $(O, \vec{x})$ de l'ensemble constitué par l'arbre moteur et le galet (G);
$C_m\vec{x}$: moment du couple exercé par le moteur l'arbre moteur.
$\vec{\Omega}(G/R) = \alpha'\vec{x}$.

Le plateau (P) est lié à l'arbre récepteur qui a liaison pivot glissant sans frottement d'axe $(O, \vec{z})$ le bâti (B).

Le plateau (P) est circulaire de rayon $R > \lambda$, de ce C situé sur l'axe $(O, \vec{z})$; son plan est perpendicu à $\vec{z}$.

On pose :

$\overrightarrow{OC} = r\vec{z}$ ((G) et (P) sont supposés constammen contact au point H);
m : masse de l'ensemble constitué par l'a récepteur et le plateau (P);
J : moment d'inertie par rapport à l'axe $(O, \vec{z}$ l'ensemble constitué par l'arbre récepteur plateau.
$C_r\vec{z}$: moment du couple exercé par le récepteu l'arbre récepteur;
$\vec{\Omega}(P/R) = \beta'\vec{z}$.

Soit f le coefficient de frottement entre le galet (le plateau (P).

L'action mécanique de contact de (G) sur (P représentée par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(G \longrightarrow P)\} = {}_{H}\begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

Posons $\vec{F} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}$.

QUESTIONS

1° Déterminer le vecteur vitesse de glissement au H, de (P) par rapport à (G).

2° Quelle équation scalaire obtient-on, en appliqua point A, en projection sur $\vec{x}$, le théorème du m dynamique à l'ensemble {galet, arbre moteur} da mouvement par rapport à R?

3° Quelle équation scalaire obtient-on, en appliqu point C, en projection sur $\vec{z}$, le théorème du m

dynamique à l'ensemble {plateau, arbre récepteur} dans son mouvement par rapport à R?

4° Déterminer Z.

5° Sachant qu'à la date $t=0$ $\begin{cases}\alpha'(0)=\omega>0\\ \beta'(0)=0.\end{cases}$

***a*) Déterminer X et Y pendant la phase de glissement entre le plateau (P) et le galet (G).**

***b*) Déterminer la durée T de la phase de glissement entre (P) et (G), si l'on considère que pendant cette phase C_m et C_r sont constants.**

Application numérique :

$I=0{,}0003$ kg·m²; $J=0{,}015$ kg·m²; $C_m=0{,}2$ N·m; $C_r=0{,}1$ N·m; $f=0{,}2$; $m=3$ kg; $g=9{,}81$ m/s²; $r=3$ cm; $\lambda=10$ cm; $\omega=31{,}42$ rad/s (300 tr/min).

7 — La *figure 26* représente le dispositif de commande d'une tourelle de machine outil.

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère galiléen lié au bâti ⓪. La tourelle, non représentée sur la figure, est liée à

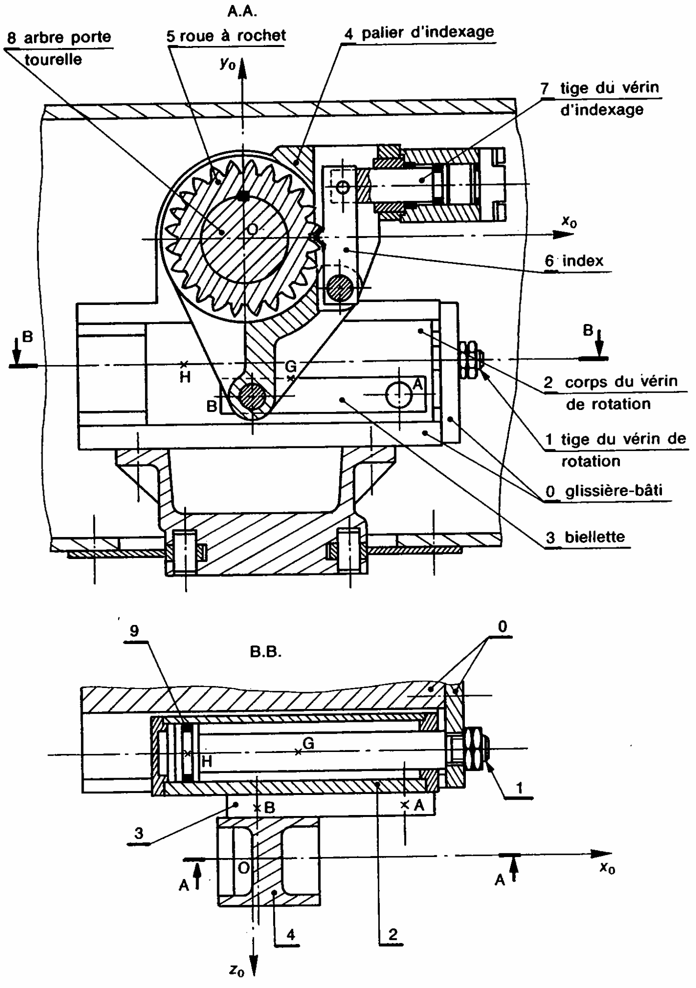

A.A.
8 arbre porte tourelle
5 roue à rochet
4 palier d'indexage
y_0
7 tige du vérin d'indexage
x_0
O
6 index
B
B
H
G
A
B
2 corps du vérin de rotation
1 tige du vérin de rotation
0 glissière-bâti
3 biellette
9
0
B.B.
G
H
1
B
A
3
O
A
A
x_0
4
2
z_0

Fig. 26

l'arbre ⑧. Cet arbre, en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec le bâti ⓪, est entraîné en rotation par l'intermédiaire du dispositif d'indexage constitué par le palier ④, la roue à crochet ⑤, l'index ⑥ et le vérin ⑦.
Le mouvement de rotation du palier ④ autour de l'axe $(O, \vec{z}_0)$ est obtenu par le déplacement du corps ② du vérin, relié au palier ④ par la biellette ③.
Une liaison glissière d'axe $(G, \vec{x}_0)$ assure le guidage de ② par rapport au bâti ⓪. G est le centre d'inertie de ②.
La biellette ③ a deux liaisons linéiques annulaires d'axes $(A, \vec{z}_0)$ et $(B, \vec{z}_0)$ avec ② et ④ respectivement.
Les liaisons définies précédemment sont sans frottement.
On suppose que le centre d'inertie de l'ensemble matériel (S) constitué par ④, ⑤, ⑥, ⑦, ⑧ et la tourelle est situé sur l'axe de rotation $(O, \vec{z}_0)$.
Le moment d'inertie de (S) autour de $(O, \vec{z}_0)$ est $I = 0{,}3\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. La masse du corps ② du vérin est $m = 4$ kg. Celle des autres pièces en mouvement est négligée.
Au cours du mouvement, les joints d'étanchéité tel que ⑨ exercent sur la tige ① une action mécanique représentée par la force $(H, F\vec{x}_0)$, telle que

$$|F| = \text{constante} = 50\ \text{N}.$$

On considère ce mécanisme à la date t, telle que :
— l'accélération angulaire du palier ④ par rapport au bâti ⓪ soit : $\theta'' = -50\ \text{rad/s}^2$;
— sa configuration, différente de celle de la *figure 26*, soit définie par (en millimètres) :

$$\overrightarrow{OB} = -\ 69\vec{x}_0 - 126\vec{y}_0 - 48\vec{z}_0$$
$$\overrightarrow{OA} = 66\vec{x}_0 - 145\vec{y}_0 - 48\vec{z}_0$$
$$\overrightarrow{GA} = 100\vec{x}_0 - 18\vec{y}_0 + 48\vec{z}_0$$
$$\overrightarrow{GH} = -100\vec{x}_0 + 12\vec{y}_0.$$

L'action mécanique de la pesanteur est négligée.

QUESTIONS

1° Déterminer à la date *t* l'action mécanique exercée par la biellette ③ sur le palier ④.

2° La pression motrice dans le vérin de rotation, côté fond est $p = 10$ bars, la contre-pression côté tige est $q = 4$ bars.
Le rapport des diamètres de la tige ① et du cylindre intérieur du corps ② est $K = \frac{2}{3}$.
Déterminer le diamètre du piston pour obtenir le mouvement précédent.

3° Déterminer à la date *t* le torseur d'action mécanique, au point G, du bâti ⓪ sur le corps ② du vérin.

8 — Le dessin de la *figure 27* représente une tête pneumatique destinée à recevoir un verre pendant l'usinage de sa lèvre. Le pied du verre à la forme indiquée sur le dessin. Ce pied est plaqué et serré sur la face F de la tête par 3 pièces ④ situées à 120° les unes des autres

Au cours de l'usinage (chauffage, découpage, polissa de la lèvre) la tête est entraînée en rotation par rapp au plateau ⓪. Le passage d'un poste de travail à autre est obtenu par la rotation de ⓪ autour d'un a parallèle à celui de la tête.
Le but de l'étude est de déterminer la variation l'effort de serrage du pied du verre en fonction de vitesse de rotation de la tête par rapport au plate

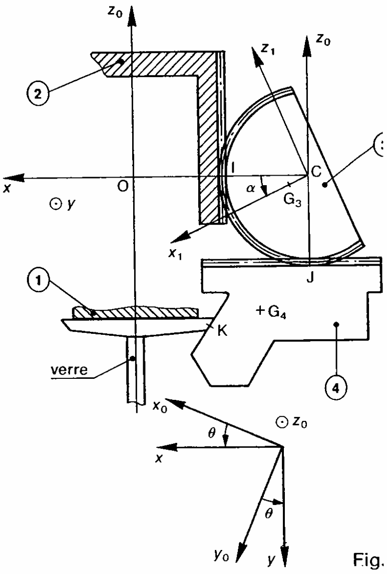


Fig.

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère galiléen lié au pla ⓪, l'axe $(O, \vec{z}_0)$ étant placé suivant l'axe de rotatio la tête. On désigne par $\vec{g} = -g\vec{z}_0$ l'accélération d pesanteur.
Le corps ① de la tête pneumatique a une liaison p d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec ⓪. Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$ un repèr à ①. On pose : $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x})$. La liaison entre la pièce représentée sur le dessin, et le corps ① est glissière frottement de direction $\vec{x}$. L'action mécanique de ④ le pied du verre est définie par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(④ \longrightarrow \text{verre})\} = {}_K\begin{Bmatrix} \vec{R}_K \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

avec $\vec{R}_K = X_K\vec{x} + Y_K\vec{y} + Z_K\vec{z}_0$.
Soient m_4 la masse de ④ et G_4 son centre d'inertie pose : $r_4 = -\vec{x}\cdot\overrightarrow{OG}_4 \quad (r_4 > 0)$.

④ est entraînée en translation par un secteur circu denté ③, de masse m_3, de centre d'inertie G_3, a une liaison pivot sans frottement d'axe $(C, \vec{y})$ avec
On pose : $\overrightarrow{OC} = -d\vec{x} \quad (d > 0)$.
Soit $R_3(C, \vec{x}_1, \vec{y}, \vec{z}_1)$ un repère lié à ③, tel que $\overrightarrow{CG}_3$ =
$(a > 0)$.

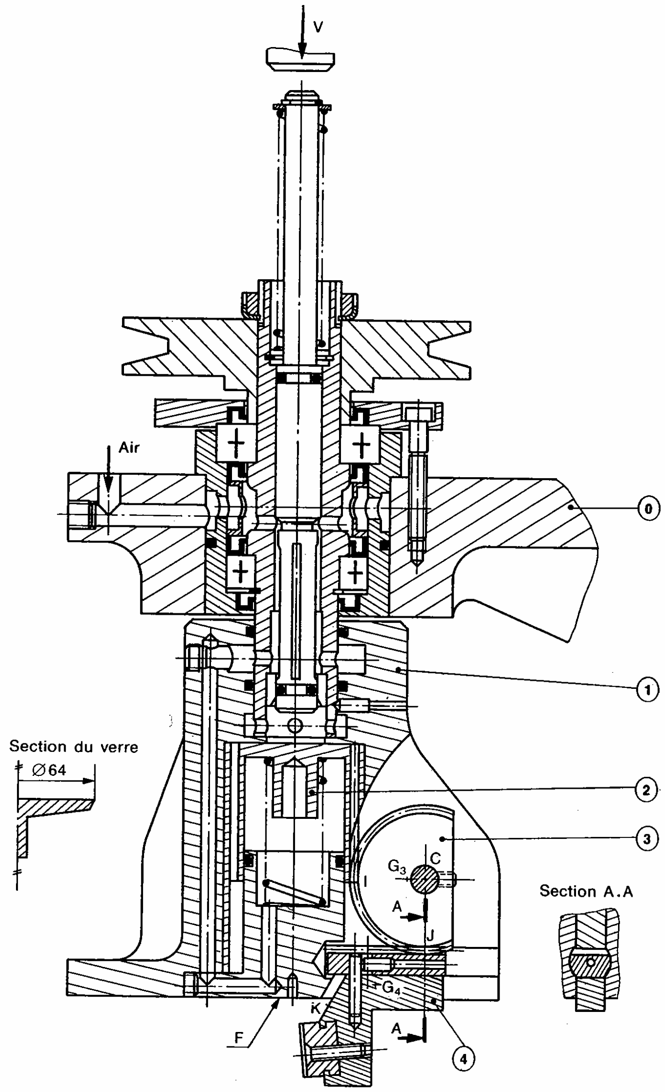

V
Air
0
1
Section du verre
Ø64
2
3
C
G_3
I
Section A.A
A
J
G_4
K
F
A
4

Fig. 27

On pose : $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.
(α et r_4 sont constants lorsque le pied du verre est serré.)
L'action mécanique de ③ sur ④ est représentée par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(\textcircled{3} \longrightarrow \textcircled{4})\} = {}_{J}\begin{Bmatrix}\vec{R}_J\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$$

On pose $X_J = \vec{x} \cdot \vec{R}_J$

$\overrightarrow{CJ} = -r_3\vec{z}_0$ (r_3 : constante positive)

Les trois secteurs circulaires tels que ③ sont entraînés en rotation par une pièce ② ayant une liaison pivot glissant d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec ①.
L'action mécanique de ② sur ③ est représentée par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(\textcircled{2} \longrightarrow \textcircled{3})\} = {}_{I}\begin{Bmatrix}\vec{R}_I\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$$

On pose : $Z_I = \vec{z}_0 \cdot \vec{R}_I$

$\overrightarrow{CI} = r_3\vec{x}$

La valeur de Z_I est fonction des actions mécaniques exercées par l'air comprimé et le ressort sur la pièce ②.

QUESTIONS

1° En supposant la masse du secteur circulaire ③ concentrée en son centre d'inertie, écrire au point C, en projection sur $\vec{y}$, le théorème du moment dynamique appliqué à ③ dans son mouvement par rapport à R_0.

2° Écrire en projection sur $\vec{x}$, le théorème de la résultante dynamique appliqué au solide ④ dans son mouvement par rapport à R_0.

3° Sachant que :
$m_3 = 160$ g; $m_4 = 100$ g; $g = 9{,}81$ m/s^2; $Z_I = 230$ N; $\alpha = 30°$; $r_3 = 30$ mm; $a = 8$ mm; $d = 57$ mm; $r_4 = 52$ mm.

Donner l'expression numérique de X_K en fonction de θ'.
Quelle est la valeur de X_K, pour $\theta' = 500$ tr/min?
Pour quelle valeur de θ', X_K est-elle nulle?

***9** — Sur la pièce (P) schématisée *figure 29* on veut réaliser l'usinage suivant :

— dressage de la face A,
— perçage et alésage du diamètre B.

Pour cela, on utilise un montage de tournage (M) pour mettre en place la pièce et l'abloquer en position.

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère galiléen lié au bâti (S_0) du tour, l'axe $(O, \vec{y}_0)$ étant placé suivant l'axe de la broche (S). On désigne par $\vec{g} = -g\vec{z}_0$ l'accélération de la pesanteur.
Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}_0, \vec{z})$ un repère lié à l'ensemble (E) constitué par (S), (M) et (P). On pose : $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x})$. Un moteur assure : $\theta' = \text{constante} = \omega$.
L'ensemble constitué par (S) et (M) est dynamiquement équilibré autour de l'axe $(O, \vec{y}_0)$. Par contre, la pièce (P) n'est pas dynamiquement équilibrée à cause de la présence d'un bossage d'axe de symétrie matérielle $(I, \vec{x})$ (I point de l'axe $(O, \vec{y}_0)$).
Le but de l'étude est d'équilibrer dynamiquement (E) autour de l'axe $(O, \vec{y}_0)$.
Soient m la masse de la pièce (P) et G son centre d'inertie, défini par : $\overrightarrow{OG} = a\vec{x}$ $(a > 0)$.
La broche (S) a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{y}_0)$ avec (S_0). Cette liaison est réalisée par l'association en parallèle des deux liaisons sans frottement (L_1) et (L_2) suivantes :

(L_1) : Liaison rotule de centre A_1, tel que

$\overrightarrow{OA_1} = -l_1\vec{y}_0$ $(l_0 > 0)$

(L_2) : Liaison linéique annulaire d'axe $(O, \vec{y}_0)$ et de centre A_2, tel que

$\overrightarrow{OA_2} = -l_2\vec{y}_0$ $(l_2 > l_1)$.
Les torseurs d'action mécanique de ces liaisons sont de la forme :

$$\{\mathcal{T}(S_0 \xrightarrow{L_1} S)\} = {}_{A_1}\begin{Bmatrix}\vec{R}_1\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{T}(S_0 \xrightarrow{L_2} S)\} = {}_{A_2}\begin{Bmatrix}\vec{R}_2\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$$

QUESTIONS

1° Montrer que la matrice d'inertie de la pièce (P), au point O, dans la base $(\vec{x}, \vec{y}_0, \vec{z})$, est de la forme :

$$[I_0(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & 0\\ -F & B & 0\\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}_0, \vec{z})}$$

2° Par application du principe fondamental de la dynamique à l'ensemble $\{(S), (M), (P)\}$ dans son mouvement par rapport à R_0, montrer que les résultantes générales $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$ des torseurs d'action mécanique de (S_0) sur (S) sont données par les relations :

$$(l_2 - l_1)\vec{R}_1 = -\omega^2(F + mal_2)\vec{x} + mgl_2\vec{z}_0$$
$$(l_2 - l_1)\vec{R}_2 = \omega^2(F + mal_1)\vec{x} - mgl_1\vec{z}_0$$

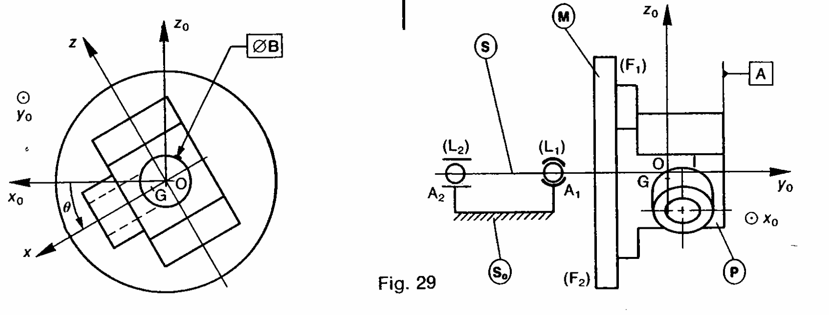


Fig. 29

Dans ce calcul on ne tiendra pas compte des masses de (S) et (M), ces deux ensembles étant dynamiquement équilibrés.

3° En déduire les conditions d'équilibrage dynamique de (P).

4° On veut équilibrer dynamiquement (E) en plaçant une masselotte de masse m_1, supposée ponctuelle, au point M_1 de coordonnées cartésiennes (a_1, b_1, 0) dans le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}_0, \vec{z})$.
Quelles relations doit-il y avoir entre m_1, a_1, b_1 et m, a, F?
Montrer que la valeur de b_1 ne peut être imposée à priori.
On donne : $F = 36 \cdot 10^{-6}$ kg·m²; $m = 0{,}8$ kg; $a = 5$ mm; $a_1 = -80$ mm.
Déterminer m_1 et b_1.

5° Pour plus de facilité on choisit d'équilibrer dynamiquement (E) en plaçant deux masselottes de masse m_1 et m_2 sur chacune des faces (F_1) et (F_2) du montage de tournage, aux points M_1 et M_2, respectivement de coordonnées cartésiennes (a_1, b_1, 0) et (a_2, b_2, 0) dans le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}_0, \vec{z})$.
Quelles sont les relations que doivent vérifier m_1, a_1, b_1 et m_2, a_2, b_2?
Montrer que nécessairement b_1 doit être différent de b_2.
On donne : $a_1 = -80$ mm; $a_2 = 80$ mm; $b_1 = -30$ mm; $b_2 = -60$ mm.
Déterminer m_1 et m_2.

***10** — Une butée à billes est constituée (voir *figure 30*) :
— d'une bague (S_1), fixe par rapport à un bâti, lié au repère galiléen $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
— d'une bague (S_2) dont le mouvement par rapport à la bague (S_1) est représenté par le torseur :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \omega\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

ω étant variable;
— de 19 billes homogènes, de masse m et de rayon r.

On considère la bille (S) de centre C. La trajectoire, dans R_0, du centre C de cette bille est un cercle de centre O et de rayon a.

La bille (S) est en contact en I et J respectivement avec les bagues (S_1) et (S_2).
Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère tel que : $\overline{OC} = a\vec{x}$.
On pose $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x})$.
Le but de l'étude est de déterminer la charge axiale minimale que doit supporter cette butée à billes, pour que l'on ait roulement et pivotement sans glissement en I et J. Le non respect de cette condition provoque une usure prématurée de la butée.
Les torseurs d'action mécanique de contact des bagues sur la bille (S) sont de la forme :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S)\} = {}_{I}\begin{Bmatrix} X_1\vec{x} + Y_1\vec{y}_0 + Z_1\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{T}(S_2 \longrightarrow S)\} = {}_{J}\begin{Bmatrix} X_2\vec{x} + Y_2\vec{y}_0 + Z_2\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

On désigne par f le coefficient de frottement entre les billes et les bagues.

QUESTIONS

1° En considérant qu'il y a roulement sans glissement en I et J, déterminer en fonction de ω, r et a, les torseurs cinématiques :

$$\{\mathcal{V}(S/R_0)\} \text{ au point C.}$$
$$\{\mathcal{V}(R/R_0)\} \text{ au point O.}$$

Montrer qu'il y a un pivotement indéterminé entre la bille (S) et chacune des deux bagues.

2° Déterminer au point C le torseur dynamique de la bille (S) dans son mouvement par rapport au repère R_0.

3° Écrire les équations scalaires traduisant les théorèmes généraux de la dynamique, appliqués à la bille (S) dans son mouvement par rapport au repère R_0.
(L'action mécanique de la pesanteur est négligée.)

4° Déterminer les composantes tangentielles des résultantes générales des actions mécaniques de contact des bagues sur la bille (S).

5° Déterminer la charge axiale minimale, P_{mini}, que l'on doit exercer sur la bague (S_2) pour que les billes roulent sans glisser sur les bagues.
Application numérique :
$a = 215$ mm; $r = 30$ mm; $m = 0{,}882$ kg; $f = 0{,}07$;
$\omega = 40\dfrac{\pi}{3}$ rad/s (400 tr/min); $\dfrac{d\omega}{dt} = 0$ rad/s².

La société des roulements FAG propose $P_{mini} = 16\,000$ N. Que peut-on en conclure?

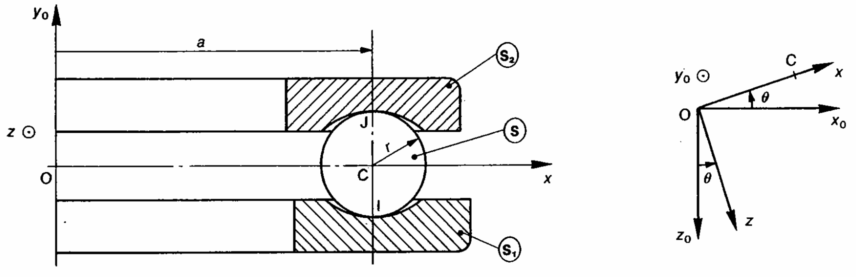


Fig. 30

3 □ énergétique

Les notions de puissance, de travail et d'énergie jouent un rôle très important en mécanique. Une fois ces notions définies et les relations dont elles sont l'objet établies, nous pourrons par exemple :

— déterminer la puissance minimale du moteur d'entraînement d'un mécanisme, pour assurer un mouvement prévu;

— calculer le rendement d'un mécanisme;

— exprimer la conservation de l'énergie mécanique (sous certaines hypothèses) d'un réducteur ou d'un variateur pour obtenir le moment de son couple récepteur.

1. PUISSANCE

1.1. PUISSANCE DÉVELOPPÉE PAR UNE ACTION MÉCANIQUE EXTÉRIEURE A UN ENSEMBLE MATÉRIEL, DANS SON MOUVEMENT PAR RAPPORT A UN REPÈRE

Soient deux ensembles matériels (Σ) et (E), distincts, en mouvement par rapport à un repère R. Supposons que l'ensemble matériel (Σ) exerce sur l'ensemble matériel (E) une action mécanique représentée par une densité de forces $\vec{f}(\mathrm{M})$, relativement à la mesure de masse dm en chaque point M de (E). (Action mécanique de la pesanteur, par exemple.)

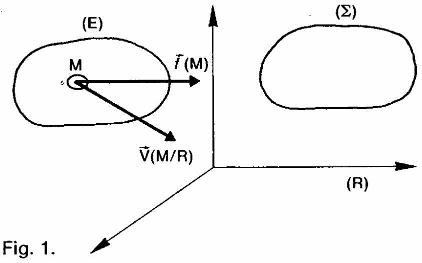


Fig. 1.

Définition

La puissance développée, à la date *t*, par l'act mécanique de (Σ) sur (E), dans le mouvement (E) par rapport au repère R, est :

$$\boxed{\mathrm{P}(\Sigma \longrightarrow \mathrm{E/R}) = \int_{\mathrm{M}\in\mathrm{E}} \vec{f}(\mathrm{M})\cdot\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{M/R})\,\mathrm{d}m}$$

REMARQUES

— La définition précédente est à adapter lors le champ de forces est défini par une den linéique, surfacique ou volumique.

— Lorsque l'action mécanique de (Σ) sur est représentée par la force $(\mathrm{M}, \vec{\mathrm{F}}(\mathrm{M}))$, *puissance développée s'écrit alors :*

$$\mathrm{P}(\Sigma \longrightarrow \mathrm{E/R}) = \vec{\mathrm{F}}(\mathrm{M})\cdot\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{M/R}).$$

On retrouve ainsi la définition de la puissa donnée en classe de terminale.

1.2. PUISSANCE DÉVELOPPÉE PAR UNE ACTION MÉCANIQUE EXTÉRIEURE A UN SOLIDE, DANS SON MOUVEMENT PAR RAPPOR A UN REPÈRE

Lorsque l'ensemble matériel (E) est un solide le champ des vecteurs vitesse de (S) est représ par un torseur. Soit :

$$\{\mathcal{V}(\mathrm{S/R})\} = {}_{\mathrm{A}}\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}(\mathrm{S/R})\\ \vec{\mathrm{V}}(\mathrm{A}\in\mathrm{S/R})\end{matrix}\right\}$$

le torseur cinématique du mouvement de (S) par rapport à R, défini en un point A de (S). Alors le vecteur vitesse d'un point M quelconque de (S) s'exprime en fonction de $\vec{V}(A \in S/R)$ par la relation :

$$\vec{V}(M \in S/R) = \vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AM}$$

Remplaçons ce vecteur dans l'expression de la puissance développée par l'action mécanique de (Σ) sur (S), dans le mouvement de (S) par rapport à R :

$$P(\Sigma \longrightarrow S/R) = \int_{M \in S} \vec{f}(M) \cdot \vec{V}(M \in S/R)\, \mathrm{d}m$$

soit

$$P(\Sigma \longrightarrow S/R) = \int_{M \in S} \vec{f}(M) \cdot [\vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AM}]\, \mathrm{d}m$$

D'où :

$$P(\Sigma \longrightarrow S/R) = \int_{M \in S} \vec{f}(M) \cdot \vec{V}(A \in S/R)\, \mathrm{d}m + \int_{M \in S} \vec{f}(M) \cdot [\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AM}]\, \mathrm{d}m$$

Mettons en facteur $\vec{V}(A \in S/R)$ et $\vec{\Omega}(S/R)$ en remarquant au préalable que le produit mixte de la deuxième intégrale peut s'écrire :

$$\vec{\Omega}(S/R) \cdot [\overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}(M)]$$

on obtient alors :

$$P(\Sigma \longrightarrow S/R) = \vec{V}(A \in S/R) \cdot \int_{M \in S} \vec{f}(M)\, \mathrm{d}m + \vec{\Omega}(S/R) \cdot \int_{M \in S} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}(M)\, \mathrm{d}m$$

or le torseur associé à l'action mécanique de (Σ) sur (S) s'écrit au point A :

$$\{\mathcal{T}(\Sigma \longrightarrow S)\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} \vec{R}(\Sigma \longrightarrow S) \\ \vec{M}_A(\Sigma \longrightarrow S) \end{Bmatrix}$$

avec

$$\vec{R}(\Sigma \longrightarrow S) = \int_{M \in S} \vec{f}(M)\, \mathrm{d}m$$

et

$$\vec{M}_A(\Sigma \longrightarrow S) = \int_{M \in S} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}(M)\, \mathrm{d}m$$

Par conséquent :

$$P(\Sigma \longrightarrow S/R) = \vec{R}(\Sigma \longrightarrow S) \cdot \vec{V}(A \in S/R) + \vec{M}_A(\Sigma \longrightarrow S) \cdot \vec{\Omega}(S/R)$$

La puissance développée par l'action mécanique de (Σ) sur (S), dans le mouvement de (S) par rapport à R, est donc égale au produit du torseur d'action mécanique de (Σ) sur (S) par le torseur cinématique du mouvement de (S) par rapport à R. (Revoir la définition d'un produit de deux torseurs au paragraphe 14 du chapitre 1 de dynamique.) Soit :

$$\boxed{P(\Sigma \longrightarrow S/R) = \{\mathcal{T}(\Sigma \longrightarrow S)\} \cdot \{\mathcal{V}(S/R)\}}$$

Cas particuliers

— Lorsque le torseur d'action mécanique est un torseur à résultante, la puissance est :

$$P(\Sigma \longrightarrow S/R) = \vec{R}(\Sigma \longrightarrow S) \cdot \vec{V}(A \in S/R)$$

— Lorsque le torseur d'action mécanique est un couple, la puissance est :

$$P(\Sigma \longrightarrow S/R) = \vec{M}_A(\Sigma \longrightarrow S) \cdot \vec{\Omega}(S/R)$$

On retrouve ainsi un résultat mis en évidence en classe de terminale.

REMARQUE

La notion de puissance n'a de sens que relativement à un repère. Ainsi la puissance développée par l'action mécanique de (Σ) *sur* (S) *est nulle dans tout repère lié à* (S).

Application

Un véhicule à quatre roues se déplace en ligne droite sur une route. Calculons les puissances développées par différentes actions mécaniques au niveau d'une roue arrière motrice.

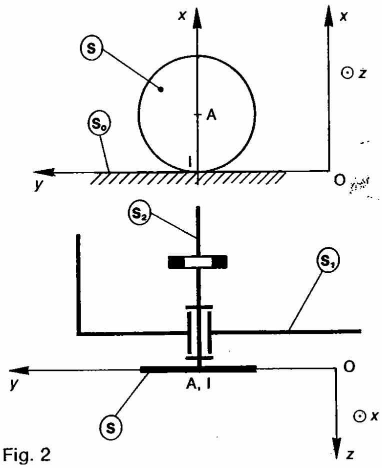


Fig. 2

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à la route (S_0). Le plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$ schématise le plan de la route, d'axe $(O, \vec{y})$. L'axe $(O, \vec{x})$ est vertical ascendant. La roue arrière motrice (S), d'épaisseur négligeable, de centre A, de rayon a, roule sans glisser au point I sur l'axe $(O, \vec{y})$.

(S) a une liaison pivot sans frottement d'axe $(A, \vec{z})$ avec le chassis (S_1). L'arbre de transmission (S_2) entraîne en rotation (S) en ne lui transmettant qu'un couple de moment $C\vec{z}$ (liaison avec joint de Cardan, par exemple).

Considérons les torseurs cinématiques suivants, exprimés dans la base de R :

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{V}(S/S_1)\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega & 0 \end{Bmatrix}$$

ainsi que les torseurs d'actions mécaniques :

$$\{\mathcal{T}(S_0 \longrightarrow S)\} = {}_{I}\begin{Bmatrix} N & 0 \\ T & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix};$$

$$\{\mathcal{T}(S \longrightarrow S_1)\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix};$$

$$\{\mathcal{T}(S_2 \longrightarrow S)\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C \end{Bmatrix}.$$

QUESTION

Déterminer la puissance développée par l'action mécanique de

1° (S_2) sur (S), dans le mouvement de (S) par rapport à (S_1);

2° (S_0) sur (S), dans le mouvement de (S) par rapport à (S_0);

3° (S_0) sur (S), dans le mouvement de (S) par rapport à (S_1);

4° (S) sur (S_1), dans le mouvement de (S_1) par rapport à (S_0);

5° (S) sur (S_1), dans le mouvement de (S_1) par rapport à (S).

RÉPONSE

Ces différentes puissances se calculent par les produits des torseurs suivants, en prenant soin de bien les exprimer au même point :

1° $P(S_2 \longrightarrow S/S_1) = \{\mathcal{T}(S_2 \longrightarrow S)\} \cdot \{\mathcal{V}(S/S_1)\}$

$$\boxed{P(S_2 \longrightarrow S/S_1) = C\omega.}$$

2° $P(S_0 \longrightarrow S/S_0) = \{\mathcal{T}(S_0 \longrightarrow S)\} \cdot \{\mathcal{V}(S/S_0)\}$
$= \vec{R}(S_0 \longrightarrow S) \cdot \vec{V}(I \in S/S_0).$

Comme (S) roule sans glisser sur (S_0), $\vec{V}(I \in S/S_0)$ est nul, et :

$$\boxed{P(S_0 \longrightarrow S/S_0) = 0.}$$

3° $P(S_0 \longrightarrow S/S_1) = \{\mathcal{T}(S_0 \longrightarrow S)\} \cdot \{\mathcal{V}(S/S_1)\}$

$$\boxed{P(S_0 \longrightarrow S/S_1) = -a\omega T.}$$

4° $P(S \longrightarrow S_1/S_0) = \{\mathcal{T}(S \longrightarrow S_1)\} \cdot \{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}$

$$\boxed{P(S \longrightarrow S_1/S_0) = Y \cdot v.}$$

5° $P(S \longrightarrow S_1/S) = \{\mathcal{T}(S \longrightarrow S_1)\} \cdot \{\mathcal{V}(S_1/S)\}$

$$\boxed{P(S \longrightarrow S_1/S) = 0.}$$

Conséquence (utile au paragraphe 1.3)

La puissance développée par l'action mécanique de l'ensemble matériel (Σ) sur l'ensemble matériel (E) (qui n'est pas nécessairement un solide), dans le mouvement de (E) par rapport au repère R, a été définie au *paragraphe 1.1* par l'expression :

$$P(\Sigma \longrightarrow E/R) = \int_{M \in E} \vec{f}(M) \cdot \vec{V}(M/R)\,\mathrm{d}m.$$

Cette puissance, pour le mouvement de (E) pa rapport à un autre repère R_1 s'écrit :

$$P(\Sigma \longrightarrow E/R_1) = \int_{M \in E} \vec{f}(M) \cdot \vec{V}(M/R_1)\,\mathrm{d}m.$$

Par suite :

$$P(\Sigma \longrightarrow E/R) - P(\Sigma \longrightarrow E/R_1)$$
$$= \int_{M \in E} \vec{f}(M) \cdot [\vec{V}(M/R) - \vec{V}(M/R_1)]\,\mathrm{d}n$$

Soit d'après la relation de composition des vecteu vitesse au point M entre les repères R et R_1 :

$$P(\Sigma \longrightarrow E/R) - P(\Sigma \longrightarrow E/R_1)$$
$$= \int_{M \in E} \vec{f}(M) \cdot \vec{V}(M \in R_1/R)\,\mathrm{d}$$

expression qui se met donc sous la forme :

$$\boxed{\begin{aligned} &P(\Sigma \longrightarrow E/R) - P(\Sigma \longrightarrow E/R_1) \\ &\quad = \{\mathcal{T}(\Sigma \longrightarrow E)\} \cdot \{\mathcal{V}(R_1/R)\} \end{aligned}} \quad ($$

1.3. PUISSANCE DÉVELOPPÉE PAR LES ACTIONS MUTUELLES ENTRE DEUX ENSEMBLES MATÉRIELS

Soient deux ensembles matériels (Σ) et (I distincts, en mouvement par rapport à un repère

Définition

La puissance développée, à la date *t*, par actions mutuelles entre (Σ) et (E), dans le mouvement par rapport à un repère R, est :

$$\boxed{\mathbf{P(\Sigma \longleftrightarrow E/R) = P(\Sigma \rightarrow E/R) + P(E \rightarrow \Sigma/R)}}$$

Propriété

La puissance développée par les actions mutuel entre (Σ) et (E) est indépendante du repère

La relation (1) permet d'écrire :

— pour l'action mécanique de (Σ) sur (E) :

$$P(\Sigma \longrightarrow E/R) - P(\Sigma \longrightarrow E/R_1)$$
$$= \{\mathcal{T}(\Sigma \longrightarrow E)\} \cdot \{\mathcal{V}(R_1/I$$

— pour l'action mécanique de (E) sur (Σ) :

$$P(E \longrightarrow \Sigma/R) - P(E \longrightarrow \Sigma/R_1)$$
$$= \{\mathcal{T}(E \longrightarrow \Sigma)\} \cdot \{\mathcal{V}(R_1/I$$

additionnons membre à membre ces deux égalité

$$P(\Sigma \longleftrightarrow E/R) - P(\Sigma \longleftrightarrow E/R_1)$$
$$= [\{\mathcal{T}(\Sigma \longrightarrow E)\} + \{\mathcal{T}(E \longrightarrow \Sigma)\}] \cdot \{\mathcal{V}(R_1/R$$

D'après le théorème des actions mutuelles le second membre est nul. Par suite :

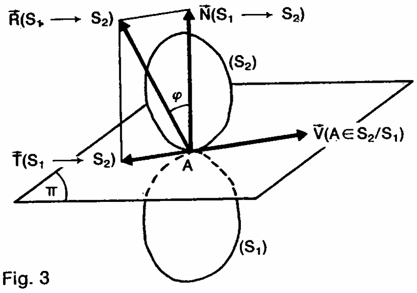
$$P(\Sigma \longleftrightarrow E/R) = P(\Sigma \longleftrightarrow E/R_1).$$

Ce qui prouve que la puissance développée par les actions mutuelles entre (Σ) et (E) est indépendante du repère choisi pour la calculer. Par conséquent, cette puissance sera simplement notée :

$$\boxed{P(\Sigma \longleftrightarrow E).}$$

Application

Soient (S_1) et (S_2) deux solides en contact ponctuel avec frottement en un point A (coefficient de frottement : $f = \operatorname{tg} \varphi$), et (Π) le plan tangent commun en A à (S_1) et (S_2).



$\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2)$
$\vec{N}(S_1 \longrightarrow S_2)$
(S_2)
φ
$\vec{V}(A \in S_2/S_1)$
$\vec{T}(S_1 \longrightarrow S_2)$
A
π
(S_1)

Fig. 3

Le torseur d'action mécanique de (S_1) sur (S_2) est de la forme, au point A :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

(Le contact est supposé rigoureusement ponctuel).
On pose

$$\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2) = \vec{N}(S_1 \longrightarrow S_2) + \vec{T}(S_1 \longrightarrow S_2)$$

avec

$$\vec{N}(S_1 \longrightarrow S_2) \perp (\pi) \quad \text{(effort normal)}$$
$$\vec{T}(S_1 \longrightarrow S_2) \in (\pi) \quad \text{(effort tangentiel).}$$

Le torseur cinématique du mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) est de la forme, au point A :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1) = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/S_1) \\ \vec{V}(A \in S_2/S_1) \end{Bmatrix}.$$

Le vecteur vitesse de glissement $\vec{V}(A \in S_2/S_1)$ est un vecteur de même direction que le vecteur $\vec{T}(S_1 \longrightarrow S_2)$ et de sens contraire *(paragraphe 3.3 du chapitre 1 de statique).*

QUESTION 1

Déterminer la puissance développée par les actions mutuelles entre (S_1) et (S_2).

RÉPONSE

La puissance développée par les actions mutuelles entre (S_1) et (S_2) s'écrit par définition, par rapport à un repère R :

$$P(S_1 \longleftrightarrow S_2) = P(S_1 \longrightarrow S_2/R) + P(S_2 \longrightarrow S_1/R).$$

Cette puissance est indépendante du repère R, par conséquent, si l'on choisit R lié à (S_1) :

$$P(S_1 \longleftrightarrow S_2) = P(S_1 \longrightarrow S_2/S_1).$$

Puissance qui se calcule par le produit des deux torseurs définis précédemment :

$$P(S_1 \longleftrightarrow S_2) = \{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\} \cdot \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$$

soit :

$$P(S_1 \longleftrightarrow S_2) = \vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2) \cdot \vec{V}(A \in S_2/S_1)$$

ou encore, en faisant intervenir l'effort tangentiel :

$$\boxed{P(S_1 \longleftrightarrow S_2) = \vec{T}(S_1 \longrightarrow S_2) \cdot \vec{V}(A \in S_2/S_1).}$$

Le produit scalaire des deux vecteurs intervenant dans cette expression étant négatif ou nul, la puissance développée par les actions mutuelles entre (S_1) et (S_2) est négative ou nulle. C'est une puissance perdue par frottement entre les deux solides et qui se transforme en chaleur.

QUESTION 2

A quelle condition la puissance développée par les actions mutuelles entre (S_1) et (S_2) est-elle nulle?

RÉPONSE

Cette puissance est nulle si :

- le contact entre (S_1) et (S_2) est sans frottement, ou si :
- (S_2) roule sans glisser sur (S_1).

1.4. LIAISON PARFAITE ENTRE DEUX SOLIDES

Définition

Deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison parfaite si, quel que soit le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) autorisé par la liaison, la puissance développée par les actions mutuelles entre (S_1) et (S_2) est nulle.

Soit $\boxed{P(S_1 \longleftrightarrow S_2) = 0.}$

REMARQUE

Plus précisément, cette puissance doit être nulle quelles que soient les valeurs des composantes, non nulles, des éléments de réduction du torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$ *de la liaison entre* (S_1) *et* (S_2).

Conséquence

Par rapport à un repère R, la puissance développée par les actions mutuelles entre (S_1) et (S_2) s'écrit par définition :

$$P(S_1 \longleftrightarrow S_2) = P(S_1 \longrightarrow S_2/R) + P(S_2 \longrightarrow S_1/R)$$

si R est lié à (S_1) :

$$P(S_1 \longleftrightarrow S_2) = P(S_1 \longrightarrow S_2/S_1)$$

si R est lié à (S_2) :

$$P(S_1 \longleftrightarrow S_2) = P(S_2 \longrightarrow S_1/S_2).$$

Par suite une liaison parfaite entre (S_1) et (S_2) est telle que :

$$\boxed{P(S_1 \longrightarrow S_2/S_1)=0} \qquad (2)$$

ou $\qquad P(S_2 \longrightarrow S_1/S_2)=0.$

En considérant
le torseur statique $\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\}$
et le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$ de la liaison entre (S_1) et (S_2),
la relation (2) s'écrit :

$$\boxed{\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\}\cdot\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}=0.}$$

Ce qui signifie que dans une liaison parfaite les torseurs statique et cinématique de la liaison sont *réciproques.*

EXEMPLES

Voici deux exemples de liaisons parfaites entre deux solides :
— liaison sans frottement (à contact ponctuel, linéique ou surfacique),
— liaison sans glissement (bille ou cylindre de révolution roulant sans glisser sur un plan). Les résistances au roulement et au pivotement étant éventuellement négligées.

Application

Deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison glissière hélicoïdale sans frottement d'axe $(O, \vec{x}\,)$, de pas réduit p.

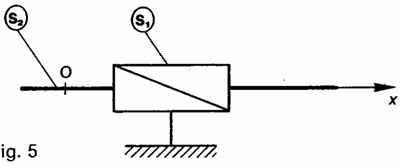


Fig. 5

QUESTION

Déterminer les caractéristiques du torseur d'action mécanique de contact de (S_1) sur (S_2).

RÉPONSE

La liaison entre (S_1) et (S_2) étant sans frottement est parfaite. Alors $P(S_1 \longleftrightarrow S_2)=0$, soit

$$\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\}\cdot\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}=0. \qquad (3)$$

Posons

$$\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\}= {}_O\begin{Bmatrix}\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2)\\ \vec{M}_0(S_1 \longrightarrow S_2)\end{Bmatrix}$$

et

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}= {}_O\begin{Bmatrix}\alpha'\vec{x}\\ p\alpha'\vec{x}\end{Bmatrix}.$$

La relation (3) s'écrit donc :

$$p\alpha'\vec{x}\cdot\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2)+\alpha'\vec{x}\cdot\vec{M}_0(S_1 \longrightarrow S_2)=0$$

relation qui doit être vérifiée quel que soit le mouveme de (S_2) par rapport à (S_1) autorisé par la liais c'est-à-dire quelle que soit α'.
Par suite les éléments de réduction du torseur d'acti mécanique de contact de (S_1) sur (S_2) sont tels que :

$$\boxed{p\vec{x}\cdot\vec{R}(S_1 \longrightarrow S_2)+\vec{x}\cdot\vec{M}_0(S_1 \longrightarrow S_2)=0.}$$

On retrouve la propriété du torseur statique de la liais glissière hélicoïdale déjà mise en évidence, d'une mani beaucoup plus longue, au *paragraphe 3.4.7* du *chapitr* de *statique.*

REMARQUES

— La notion de liaison parfaite s'étend faci ment à une liaison équivalente à plusieurs liaiso placées en parallèle et en série entre (S_1) *et* (S *Pour cela il suffit de considérer les torse statique et cinématique de la liaison équivalen*
— L'hypothèse de liaison parfaite permet u mise en équations d'un problème de dynamiq par le principe fondamental ou le théorème l'énergie cinétique (démontré au paragaphe sans préjuger de la conception technologique la liaison.

2. TRAVAIL

2.1. DÉFINITION

Le travail, entre les dates t_1 et t_2, de l'acti mécanique de l'ensemble matériel (Σ) s l'ensemble matériel (E), dans le mouvement de (par rapport au repère R, est

$$\boxed{W_{t_1}^{t_2}(\Sigma \longrightarrow E/R)=\int_{t_1}^{t_2}P(\Sigma \longrightarrow E/R)\,dt.}$$

Par suite, le travail élémentaire entre les dates t $t+dt$ est

$$dW(\Sigma \longrightarrow E/R)=P(\Sigma \longrightarrow E/R)\,dt.$$

2.2. UNITÉS

— L'unité de travail est le **joule.**
Le joule est le travail produit par une acti mécanique représentée par une force de 1 newt dont le point d'application se déplace de 1 mè dans la direction et le sens de la force.
— L'unité de puissance est le **watt.**
Le watt est la puissance d'une action mécaniq capable de produire un travail de 1 joule seconde, de façon uniforme.

Application

Continuons l'application du *paragraphe 1.2,* sur le véhic à quatre roues, avec la question suivante :

QUESTION

Déterminer, entre les dates $t_1=0$ et $t_2=30$ s, le travail de l'action mécanique de la roue (S) sur le chassis (S_1), dans le mouvement de (S_1) par rapport à la route (S_0), sachant que pendant cette phase du mouvement : $Y=300$ N et $v=\gamma t$ avec $\gamma=2{,}2$ m/s².

RÉPONSE

Nous avons montré que : $P(S \longrightarrow S_1/S_0)=Y\cdot v$.
Par suite :

$$W_{t_1}^{t_2}(S \longrightarrow S_1/S_0)=\int_{t_1}^{t_2} Y\cdot v\,dt$$

Y et γ étant constants :

$$W_{t_1}^{t_2}(S \longrightarrow S_1/S_0)=Y\cdot\gamma\int_{t_1}^{t_2} t\,dt$$

soit

$$W_{t_1}^{t_2}(S \longrightarrow S_1/S_0)=Y\cdot\gamma\left[\frac{t^2}{2}\right]_{t_1}^{t_2}.$$

Par conséquent :

$$W_{t_1}^{t_2}(S \longrightarrow S_1/S_0)=297\,000\ \text{J}.$$

3. ÉNERGIE POTENTIELLE

Soient deux ensembles matériels (Σ) et (E), distincts, en mouvement par rapport à un repère R.

3.1. ÉNERGIE POTENTIELLE D'UN ENSEMBLE MATÉRIEL, ASSOCIÉE A UNE ACTION MÉCANIQUE EXTÉRIEURE

Définition

L'ensemble matériel (E) possède une énergie potentielle, associée à l'action mécanique de (Σ) sur (E), dans le mouvement de (E) par rapport au repère R, s'il existe une fonction scalaire $V(\Sigma \longrightarrow E/R)$ telle que :

$$\boxed{P(\Sigma \longrightarrow E/R)=-\frac{d}{dt}V(\Sigma \longrightarrow E/R).}$$

$V(\Sigma \longrightarrow E/R)$ est appelée énergie potentielle de (E), associée à l'action mécanique de (Σ) sur (E), dans le mouvement de (E) par rapport à R.

REMARQUES

— L'existence du signe moins est nécessaire pour interpréter facilement les résultats.
— L'énergie potentielle est une fonction primitive de la puissance. Elle est donc définie à une constante près, que l'on choisit arbitrairement.
— On dit que la puissance dérive d'une énergie potentielle (au signe près).

EXEMPLE : Énergie potentielle de la pesanteur

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à la terre tel que le vecteur unitaire $\vec{z}$ soit dirigé suivant la verticale ascendante, et l'origine O placée, par exemple, au niveau du sol.

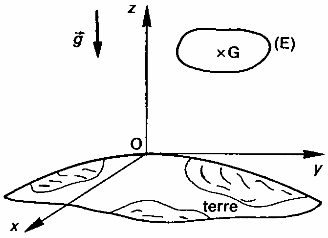


Fig. 4

Dans une région localisée de l'espace l'action mécanique de la pesanteur sur un ensemble matériel (E), de masse m et de centre d'inertie G, est représentée par un champ de forces uniforme défini par sa densité massique $\vec{g}=-g\vec{z}$ (accélération de la pesanteur).
Calculons la puissance développée par l'action mécanique de la pesanteur sur (E), dans le mouvement de (E) par rapport à R.

$$P(g \longrightarrow E/R)=\int_{M\in E}\vec{g}\cdot\vec{V}(M/R)\,dm$$

soit

$$P(g \longrightarrow E/R)=-g\vec{z}\int_{M\in E}\vec{V}(M/R)\,dm$$

or l'intégrale s'exprime en fonction de $\vec{V}(G/R)$ par la relation *(2, du paragraphe 2.2 du chapitre 1 de dynamique) :*

$$m\vec{V}(G/R)=\int_{M\in E}\vec{V}(M/R)\,dm.$$

Par conséquent

$$P(g \longrightarrow E/R)=-mg\vec{z}\cdot\vec{V}(G/R)$$

comme

$$\vec{V}(G/R)=\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OG}\right]_R$$

$$P(g \longrightarrow E/R)=-mg\vec{z}\cdot\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OG}\right]_R.$$

$\vec{z}$ étant fixe dans la base de R :

$$P(g \longrightarrow E/R)=-mg\left[\frac{d}{dt}\vec{z}\cdot\overrightarrow{OG}\right].$$

Posons $z_G=\vec{z}\cdot\overrightarrow{OG}$ (coordonnée cartésienne de G sur l'axe $(O, \vec{z})$).
Alors :

$$P(g \longrightarrow E/R)=-mg\left[\frac{d}{dt}z_G\right].$$

Par suite, il existe une énergie potentielle de (E), associée à l'action mécanique de la pesanteur sur (E), dans son mouvement par rapport à R :

$$\boxed{V(g \longrightarrow E/R)=mgz_G}$$

définie à une constante près que l'on suppose nulle.

REMARQUES

— Un ensemble matériel possède de l'énergie lorsqu'il a la capacité de développer une puissance (ou de produire un travail).

— L'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont les deux formes de l'énergie mécanique (voir paragraphe 4). L'énergie cinétique correspond au mouvement des corps. L'énergie potentielle est de l'énergie en réserve que possède un corps du fait, soit de sa position (eau d'un barrage, marteau pilon), soit de sa forme (ressort),...

— L'énergie potentielle de la pesanteur dépend de la position de l'ensemble matériel (E) *par rapport à la terre (fonction croissante de z_G). Elle est égale au travail que peut fournir* (E) *s'il tombe sur le sol.*

— Dans $\vec{g}$ interviennent deux vecteurs : l'un relatif à l'attraction terrestre, l'autre relatif aux effets d'inertie dus à la rotation de la terre (voir paragraphe 5 du chapitre 2 de dynamique). Ce deuxième vecteur, pratiquement négligeable devant le premier (au niveau du sol), ne correspond pas à une action mécanique mais à un mouvement. En toute rigueur il devrait être négligé lorsqu'on parle d'action mécanique de la pesanteur, mais en fait on le considère comme s'il provenait d'une action mécanique.

3.2. ENERGIE POTENTIELLE DE DEUX ENSEMBLES MATERIELS, ASSOCIEE A UNE ACTION MUTUELLE

Définition

Les deux ensembles matériels (Σ) et (E) possèdent une énergie potentielle, associée à une action mutuelle, s'il existe une fonction scalaire V(Σ ⟷ E) telle que :

$$P(\Sigma \longleftrightarrow E) = -\frac{d}{dt} V(\Sigma \longleftrightarrow E).$$

V(Σ ⟷ E) est appelée énergie potentielle de (Σ) et (E), associée à l'action mutuelle considérée.

REMARQUES

— *Comme la puissance correspondante,* V(Σ ⟷ E) *est indépendante de tout repère.*

— *L'action mécanique de la pesanteur est, aux effets d'inertie d'entraînement près dus à la rotation de la terre* (T), *égale à l'action mécanique d'attraction terrestre.*

Alors :

$$P(g \longrightarrow E/R) = P(T \longrightarrow E/R).$$

De plus, comme le repère R *est lié à la terre :*

$$P(T \longrightarrow E/R) = P(T \longleftrightarrow E).$$

Par suite l'énergie potentielle de la pesanteur (E) *est aussi l'énergie potentielle de la terre de* (E), *associée à leur attraction mutuelle.*

EXEMPLE : Énergie potentielle de deu solides entre lesquels est intercalé u ressort de traction-compression de mass nulle.

Deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison pivot glissa d'axe (O, $\vec{i}$). Un ressort (r) de traction compressio de masse nulle, de raideur K, de longueur à vide l placé suivant l'axe (O, $\vec{i}$) entre (S_1) et (S_2), exerc sur (S_2) une action mécanique représentée par torseur :

$$\{\mathcal{T}(r \longrightarrow S_2)\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} -K(l-l_0)\vec{i} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

(l : longueur sous charge du ressort).

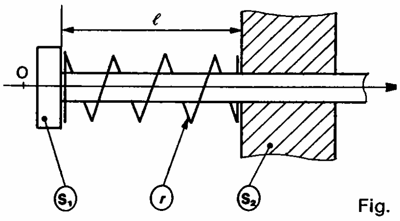


Fig.

Calculons la puissance développée par l'action méc nique du ressort sur (S_1) et (S_2), dans leur mouve ment par rapport à un repère R quelconque.

$$P(r \longrightarrow S_1, S_2/R) = P(r \longrightarrow S_1/R) + P(r \longrightarrow S_2/R$$

Soit :

$$P(r \longrightarrow S_1, S_2/R) = \{\mathcal{T}(r \longrightarrow S_1)\}\cdot\{\mathcal{V}(S_1/R)\} + \{\mathcal{T}(r \longrightarrow S_2)\}\cdot\{\mathcal{V}(S_2/R)$$

Le ressort étant de masse nulle :

$$\{\mathcal{T}(r \longrightarrow S_1)\} = -\{\mathcal{T}(r \longrightarrow S_2)\}$$

(relation montrée au *paragraphe 3 du chapitre 2* d *dynamique*).

Par suite,

$$P(r \longrightarrow S_1, S_2/R) = \{\mathcal{T}(r \longrightarrow S_2)\}\cdot[\{\mathcal{V}(S_2/R)\} - \{\mathcal{V}(S_1/R)\}$$

Soit

$$P(r \longrightarrow S_1, S_2/R) = \{\mathcal{T}(r \longrightarrow S_2)\}\cdot\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$$

Cette puissance est indépendante du repère R. Nou la noterons simplement :

$$P(r \longrightarrow S_1, S_2).$$

REMARQUE

Vu la forme de cette expression on peut considé rer qu'il existe entre (S_1) *et* (S_2) *une actio mutuelle représentée par le torseur*

$$\{\mathcal{T}(S_1 \longrightarrow S_2)\} = \{\mathcal{T}(r \longrightarrow S_2)\}.$$

Au point O, le torseur cinématique du mouvemen de (S_2) par rapport à (S_1) s'écrit :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dfrac{dl}{dt}\vec{i} \end{Bmatrix}.$$

Par suite,

$$P(r \longrightarrow S_1, S_2) = -K(l - l_0)\frac{dl}{dt}.$$

Il existe donc une énergie potentielle de (S_1) et (S_2) associée à leur action mutuelle par l'intermédiaire du ressort (r) :

$$\boxed{V(r \longrightarrow S_1, S_2) = \frac{K}{2}(l - l_0)^2}$$

définie à une constante près que l'on suppose nulle.

REMARQUES

— Cette énergie potentielle est positive ou nulle. Elle augmente quand le ressort s'écarte de sa position d'équilibre.

— L'attraction mutuelle entre la terre et un corps est d'une grande similitude avec l'action mutuelle entre deux solides par l'intermédiaire d'un ressort, car soulever un corps revient en fait à déformer le système Terre-corps.

Dans les deux cas l'énergie potentielle disparaît lorsque le système revient à sa position d'équilibre stable : le corps repose sur le sol et le ressort reprend sa longueur à vide.

— Un résultat semblable est obtenu avec un ressort de torsion, de masse nulle, monté entre deux solides ayant une liaison pivot.

4. THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

Le théorème de l'énergie cinétique constitue l'une des traductions énergétiques du principe fondamental de la dynamique. Démontrons ce théorème pour un solide, puis pour un ensemble de solides.

4.1. POUR UN SOLIDE

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un solide (S), de masse *m*, dans son mouvement par rapport à un repère galiléen R_g s'écrit :

$$\{\mathcal{D}(S/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\overline{S} \longrightarrow S)\}.$$

$\{\mathcal{D}(S/R_g)\}$: torseur dynamique de (S) dans son mouvement par rapport à R_g ;

$\{\mathcal{T}(\overline{S} \longrightarrow S)\}$: torseur des actions mécaniques extérieures à (S) s'exerçant sur (S).

Multiplions les deux membres de cette relation par le torseur cinématique de (S) par rapport à R_g :

$$\{\mathcal{D}(S/R_g)\}\{\mathcal{V}(S/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\overline{S} \longrightarrow S)\}\{\mathcal{V}(S/R_g)\}.$$

Le membre de droite représente la puissance des actions mécaniques extérieures à (S) s'exerçant sur (S), dans son mouvement par rapport à R_g, soit $P(\overline{S} \longrightarrow S/R_g)$. Cette puissance est appelée *puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures* à (S).

Pour obtenir le membre de gauche écrivons les éléments de réduction de chaque torseur en un même point A, lié au solide (S).

$$\{\mathcal{D}(S/R_g)\}\{\mathcal{V}(S/R_g)\} = {}_A\left\{\begin{matrix} \displaystyle\int_{M\in S} \vec{\Gamma}(M/R_g)\,dm \\ \displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M/R_g)\,dm \end{matrix}\right\}_A \left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}(S/R_g) \\ \vec{V}(A/R_g) \end{matrix}\right\}.$$

Ce produit de deux torseurs vaut :

$$\vec{V}(A/R_g)\cdot\int_{M\in S} \vec{\Gamma}(M/R_g)\,dm + \vec{\Omega}(S/R_g)\cdot\int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M/R_g)\,dm.$$

En remplaçant

$$\vec{V}(A/R_g) \text{ par } \vec{V}(M/R_g) + \vec{\Omega}(S/R_g) \wedge \overrightarrow{MA},$$

après l'avoir introduit sous le signe somme, l'expression précédente se simplifie pour se mettre sous la forme :

$$\int_{M\in S} \vec{\Gamma}(M/R_g)\cdot\vec{V}(M/R_g)\,dm.$$

De plus, comme

$$\vec{\Gamma}(M/R_g)\cdot\vec{V}(M/R_g) = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}(M/R_g)\right]_{R_g}\cdot\vec{V}(M/R_g) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\vec{V}(M/R_g)\right]^2.$$

On peut écrire que :

$$\int_{M\in S} \vec{\Gamma}(M/R_g)\cdot\vec{V}(M/R_g)\,dm = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int\left[\vec{V}(M/R_g)\right]^2 dm\right].$$

Ce qui fait apparaître l'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à R_g : $T(S/R_g)$, d'où :

$$\int_{M\in S} \vec{\Gamma}(M/R_g)\cdot\vec{V}(M/R_g)\,dm = \frac{d}{dt}T(S/R_g).$$

$T(S/R_g)$ est appelée *énergie cinétique galiléenne* de (S).

Par suite, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit pour un solide :

$$\boxed{\frac{d}{dt}T(S/R_g) = P(\overline{S} \longrightarrow S/R_g).}$$

Théorème qui s'énonce ainsi :

La dérivée, par rapport à la date *t*, de l'énergie cinétique galiléenne d'un solide (S) est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à (S).

4.2. POUR UN ENSEMBLE DE SOLIDES

Soit un ensemble (E) de *n* solides (S_1), (S_2), ..., (S_n) en mouvement par rapport à un repère galiléen

R_g. Pour un solide (S_i) de (E) le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\frac{d}{dt}T(S_i/R_g)=P(\overline{S}_i \longrightarrow S_i/R_g)$$

ajoutons membre à membre les n relations analogues à celle-ci, écrites pour les n solides. On obtient :

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} T(S_i/R_g)\right]=\sum_{i=1}^{n} P(\overline{S}_i \longrightarrow S_i/R_g)$$

le membre de gauche représente la dérivée, par rapport à la date t, de l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble (E) de solides, notée : $\frac{d}{dt}T(E/R_g)$. Le membre de droite représente la somme des puissances galiléennes des actions mécaniques extérieures à chaque solide de (E), ou si l'on veut, la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à (E) et des puissances des actions mutuelles entre chaque solide de (E), c'est-à-dire :

$$P(\overline{E} \longrightarrow E/R_g)+\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} P(S_i \longleftrightarrow S_j).$$

Par suite le théorème de l'énergie cinétique s'écrit pour un ensemble de solides :

$$\boxed{\frac{d}{dt}T(E/R_g)=P(\overline{E} \longrightarrow E/R_g)+\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} P(S_i \longleftrightarrow S_j).}$$

Théorème qui s'énonce ainsi :

La dérivée, par rapport à la date *t*, de l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble (E) de solides, est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à (E) et des puissances des actions mutuelles entre chaque solide de (E).

REMARQUES

— Le théorème de l'énergie cinétique n'est valable qu'à condition de tenir compte dans le calcul de la puissance, des actions mutuelles entre les solides de (E), *donc intérieures à* (E). *Il y a là une différence essentielle avec le principe fondamental de la dynamique.*

— Vu la construction du théorème de l'énergie cinétique, l'équation obtenue n'est pas indépendante des équations scalaires fournies par le principe fondamental de la dynamique. Par contre, elle se substitue souvent avantageusement à l'une d'entre elles.

— L'application du principe fondamental de la dynamique donne six équations scalaires indépendantes et l'application du théorème de l'énergie cinétique n'en donne qu'une. Par conséquent, l'application du théorème de l'énergie cinétique est généralement insuffisante, à elle seule, pour résoudre un problème de dynamique.

Les équations de Lagrange, *qui constituent autre traduction énergétique du principe fon mental de la dynamique pour un ensemble solides, sont complètement équivalentes équations obtenues par le principe fondamen*

— Le théorème de l'énergie cinétique s'é également en faisant intervenir le travail actions mécaniques entre deux dates t_1 et t_2

$$T_{t_2}(E/R_g)-T_{t_1}(E/R_g)=W_{t_1}^{t_2}(\overline{E} \longrightarrow E/R_g)$$
$$+\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} W_{t_1}^{t_2}(S_i \longleftrightarrow S_j$$

C'est sous cette forme, en supposant les liais parfaites entre les différents solides de (E), *ce théorème a été vu en classe de terminale*

4.3. INTÉGRALE PREMIÈRE DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

Lorsque les puissances intervenant dans le théorè de l'énergie cinétique sont nulles ou dérivent d' énergie potentielle (au signe près), dont n noterons la somme $V(E/R_g)$, ce théorème s'éc

$$\frac{d}{dt}T(E/R_g)=-\frac{d}{dt}V(E/R_g).$$

Par conséquent, il existe une intégrale première mouvement, appelée *intégrale première de l'éne cinétique :*

$$\boxed{T(E/R_g)+V(E/R_g)=C}$$

où C est une constante déterminée en fonction conditions initiales du mouvement.

Par définition, l'*énergie mécanique* de (E) es somme de son énergie cinétique et de son éne potentielle (par rapport à R_g). L'intégrale prem de l'énergie cinétique traduit la conservation l'énergie mécanique de (E).

REMARQUE

Le théorème de l'énergie cinétique mesure transferts d'énergie et des transformati d'énergie en puissance (ou en travail), inversement.

4.4. UNITÉS

Le théorème de l'énergie cinétique montre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle s homogènes à un travail. De plus, comme e proviennent du travail et se transforment en tra il est donc naturel de les exprimer en unité travail, c'est-à-dire en *joules.*

4.5. APPLICATION 1 : PENDULE SIMPLE

Soit R(O, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) un repère galiléen lié à un bâti (Σ). On désigne par $\vec{g} = g\vec{x}$ l'accélération de la pesanteur.

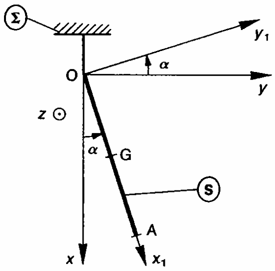


Fig. 7

Le pendule (S) est constitué par une tige OA de longueur l, homogène, de masse m et de centre d'inertie G. (S) oscille dans le plan (O, $\vec{x}$, $\vec{y}$). La liaison pivot d'axe (O, $\vec{z}$) entre (Σ) et (S) est parfaite.
Soit R_1(O, $\vec{x}_1$, $\vec{y}_1$, $\vec{z}$) un repère lié à (S) tel que $\overrightarrow{OA} = l\vec{x}_1$.
On pose : $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.

QUESTION

Déterminer l'intégrale première de l'énergie cinétique du mouvement de (S) par rapport à R, sachant qu'à la date $t = 0$: $\alpha(0) = \alpha_0$ et $\alpha'(0) = 0$.

REPONSE

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à (S) dans son mouvement par rapport au repère galiléen R, s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\,T(S/R) = P(\overline{S} \longrightarrow S/R).$$

L'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à R a été calculée au *paragraphe 6 du chapitre 1 de dynamique.*
Elle vaut :

$$T(S/R) = \frac{ml^2}{6}\,\alpha'^2. \qquad (4)$$

($\overline{S}$), l'extérieur de (S), est constitué du bâti (Σ) et de la pesanteur. Par conséquent :

$$P(\overline{S} \longrightarrow S/R) = P(\Sigma \longrightarrow S/R) + P(g \longrightarrow S/R).$$

La liaison entre (Σ) et (S) est parfaite. Alors :

$$P(\Sigma \longleftrightarrow S) = 0.$$

Comme le repère R est lié à (Σ) :

$$P(\Sigma \longleftrightarrow S) = P(\Sigma \longrightarrow S/R).$$

Par suite :

$$P(\Sigma \longrightarrow S/R) = 0.$$

La puissance de l'action mécanique de la pesanteur sur (S), dans son mouvement par rapport au repère R lié à la terre, dérive (au signe près) de l'énergie potentielle :

$$V(g \longrightarrow S/R) = -mgx_G \qquad (5)$$

comme :

$$x_G = \vec{x}\cdot\overrightarrow{OG} = \frac{l}{2}\cos\alpha$$

$$V(g \longrightarrow S/R) = -mg\frac{l}{2}\cos\alpha. \qquad (6)$$

La relation (5) a été obtenue en effectuant le changement de coordonnée : $z_G = -x_G + \text{constante}$, dans l'expression de l'énergie potentielle de la pesanteur établie au *paragraphe 3.1,* valable pour un axe vertical ascendant. La constante, inutile, n'a pas été écrite. Finalement, seul un changement de signe est à effectuer lorsque l'axe est vertical descendant.
Par suite le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\,T(S/R) = -\frac{d}{dt}\,V(g \longrightarrow S/R)$$

d'où l'intégrale première :

$$T(S/R) + V(g \longrightarrow S/R) = C.$$

Soit, compte tenu des relations (4) et (6) :

$$\frac{ml^2}{6}\,\alpha'^2 - mg\frac{l}{2}\cos\alpha = C$$

ou encore :

$$\alpha'^2 - 3\frac{g}{l}\cos\alpha = D. \qquad (7)$$

D étant une constante, qui avec les conditions initiales proposées vaut : $-3\frac{g}{l}\cos\alpha_0$.

L'intégrale première de l'énergie cinétique s'écrit donc :

$$\boxed{\alpha'^2 = 3\frac{g}{l}(\cos\alpha - \cos\alpha_0).}$$

REMARQUES

— Pour retrouver l'équation obtenue par l'application du principe fondamental de la dynamique, il suffit de dériver par rapport à la date t, la relation (7) :

$$2\alpha'\alpha'' + 3\frac{g}{l}\,\alpha'\sin\alpha = 0.$$

Soit en supposant $\alpha' \neq 0$:

$$\boxed{\alpha'' + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\alpha = 0.}$$

— Lors de son oscillation le pendule transforme son énergie potentielle en énergie cinétique, et inversement. Ces énergies augmentent ou diminuent, uniquement lorsqu'une puissance est développée.

— Le pendule n'oscille pas indéfiniment à cause du frottement dans la liaison pivot et de la résistance de l'air. L'énergie mécanique du pendule se transforme petit à petit en énergie thermique et cela jusqu'à l'arrêt.

— Les transformations mutuelles des différentes formes d'énergie à l'intérieur d'un système isolé conduisent toujours à une augmentation de l'énergie thermique aux dépens des autres formes d'énergie. Or les transformations de l'énergie thermique en d'autres formes d'énergie sont toujours beaucoup plus difficiles et incomplètes que les transformations inverses. C'est pourquoi l'on dit que l'énergie se dégrade en changeant de forme.

4.6. APPLICATION 2 : RÉDUCTEUR A TRAIN ÉPICYCLOÏDAL

Le schéma de principe d'un réducteur à train épicycloïdal à axes parallèles est représenté *figure 8.*

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est un repère galiléen lié au bâti (S_0) du réducteur.

L'ensemble (S_1), constitué par l'arbre moteur et la roue dentée de n_1 dents qui lui est liée, a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x}_0)$ avec (S_0).

Soit I_1 le moment d'inertie de (S_1) par rapport à l'axe $(O, \vec{x}_0)$. On pose : $\vec{\Omega}(S_1/R_0) = \omega_1 \vec{x}_0$. L'arbre récepteur (S_2) a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x}_0)$ avec (S_0).

Soit I_2 le moment d'inertie de (S_2) par rapport à l'axe $(O, \vec{x}_0)$. On pose : $\vec{\Omega}(S_2/R_0) = \omega_2 \vec{x}_0$. Le repère $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}, \vec{z})$ est lié à (S_2).

Le satellite (S) de n dents, a une liaison pivot d'axe $(A, \vec{x}_0)$ avec (S_2), telle que $\overrightarrow{OA} = d\vec{y}$ $(d > 0)$. Soient m la masse de (S) et I son moment d'inertie par rapport à l'axe $(A, \vec{x}_0)$. Le point A est le centre d'inertie de (S). On pose : $\vec{\Omega}(S/R_0) = \omega \vec{x}_0$.

(S) engrène avec une couronne de n_0 dents d'axe $(O, \vec{x}_0)$, liée à (S_0).

Le moteur exerce sur (S_1) une action mécanique représentée par un couple de moment $C_1\vec{x}_0$. Le récepteur exerce sur (S_2) une action mécanique représentée par le couple de moment $-C_2\vec{x}_0$. Toutes les liaisons sont parfaites, l'action mécanique de la pesanteur est négligée.

On pose $\lambda = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ et $\mu = \dfrac{\omega}{\omega_1}$

$\left(\text{On montre que : } \lambda = \dfrac{n_1}{n_0 + n_1} \text{ et } \mu = -\dfrac{n_1}{2n}.\right)$

QUESTION 1

Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble (E) des 3 solides (S_1), (S_2) et (S) dans leur mouvement par rapport à R_0.

REPONSE

Par définition :

$$2T(E/R_0) = 2T(S_1/R_0) + 2T(S_2/R_0) + 2T(S/R_0).$$

Calculons l'énergie cinétique de chaque solide. Pour c appliquons les relations du *paragraphe 14* du *chapitr* de *dynamique*. On obtient :

$$2T(S_1/R_0) = I_1\omega_1^2$$

de même :

$$2T(S_2/R_0) = I_2\omega_2^2$$

et

$$2T(S/R_0) = m\left[\vec{V}(A/R_0)\right]^2 + I\omega^2$$

soit

$$2T(S/R_0) = md^2\omega_2^2 + I\omega^2.$$

En ajoutant ces trois résultats, l'énergie cinétique de (dans son mouvement par rapport à R_0 s'écrit :

$$2T(E/R_0) = I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + md^2\omega_2^2 + I\omega^2.$$

Soit, en exprimant ω_2 et ω en fonction de ω_1 :

$$2T(E/R_0) = I_1\omega_1^2 + (I_2 + md^2)\lambda^2\omega_1^2 + I\mu^2\omega_1^2$$

ou :

$$\boxed{2T(E/R_0) = \left[I_1 + (I_2 + md^2)\lambda^2 + I\mu^2\right]\omega_1^2}$$

Posons :

$$I_e = I_1 + (I_2 + md^2)\lambda^2 + I\mu^2$$

I_e est appelée *inertie équivalente* de la chaine cinématiq rapportée à l'arbre moteur.
Alors :

$$2T(E/R_0) = I_e\omega_1^2$$

QUESTION 2

Quelle équation obtient-on en appliquant le théorème l'énergie cinétique à (E) dans son mouvement par rapp à R_0?

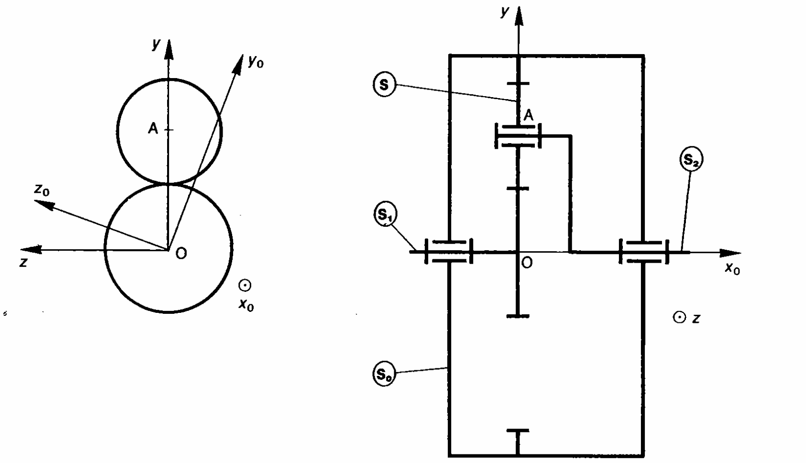


Fig. 8

REPONSE

L'équation traduisant le théorème de l'énergie cinétique appliqué à (E) dans son mouvement par rapport à R_0 s'écrit :

$$\frac{d}{dt}T(E/R_0)=P(\overline{E}\longrightarrow E/R_0)+P(S_1\longleftrightarrow S)+P(S\longleftrightarrow S_2)$$

Les deux puissances d'actions mutuelles $P(S_1\longleftrightarrow S)$ et $P(S\longleftrightarrow S_2)$ sont nulles, les liaisons étant parfaites. La puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à (E), exercées par le bâti (S_0), le moteur et le récepteur, s'écrit :

$$\begin{aligned}P(\overline{E}\longrightarrow E/R_0)=&P(S_0\longrightarrow S_1/R_0)+P(S_0\longrightarrow S/R_0)\\&+P(S_0\longrightarrow S_2/R_0)+P(\text{moteur}\longrightarrow S_1/R_0)\\&+P(\text{récepteur}\longrightarrow S_2/R_0)\end{aligned}$$

Les trois premières puissances sont nulles car les liaisons sont parfaites et R_0 est lié à (S_0). Calculons les deux autres puissances :

$$P(\text{moteur}\longrightarrow S_1/R_0)=\{\mathcal{T}(\text{moteur}\longrightarrow S_1)\}\{\mathcal{V}(S_1/R_0)\}$$

$$=\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\C_1\vec{x}_0\end{matrix}\right\}_O\cdot\left\{\begin{matrix}\omega_1\vec{x}_0\\\vec{0}\end{matrix}\right\}$$

$$P(\text{moteur}\longrightarrow S_1/R_0)=C_1\omega_1$$

de la même façon :

$$P(\text{récepteur}\longrightarrow S_2/R_0)=-C_2\omega_2.$$

Alors :

$$P(\overline{E}\longrightarrow E/R_0)=C_1\omega_1-C_2\omega_2.$$

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I_e\omega_1^2\right)=C_1\omega_1-C_2\omega_2.$$

Soit après dérivation :

$$I_e\omega_1\frac{d\omega_1}{dt}=C_1\omega_1-C_2\omega_2.$$

Après avoir remplacé ω_2 par $\lambda\omega_1$ et simplifié l'expression par ω_1 (supposé différent de 0), on obtient finalement :

$$\boxed{I_e\frac{d\omega_1}{dt}=C_1-\lambda C_2}$$

REMARQUE

Le théorème de l'énergie cinétique est bien adapté pour une approche globale d'un mécanisme à un degré de mobilité.

A SAVOIR

1. La puissance développée par l'action mécanique d'un ensemble matériel (Σ) sur un solide (S), dans le mouvement de (S) par rapport à un repère R, s'exprime par :

$$P(\Sigma\longrightarrow S/R)=\{\mathcal{T}(\Sigma\longrightarrow S)\}\cdot\{\mathcal{V}(S/R)\}$$

2. La puissance développée par les actions mutuelles entre deux ensembles matériels est indépendante du repère choisi pour la calculer.

3. Deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison parfaite si, quel que soit le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) autorisé par la liaison, la puissance développée par les actions mutuelles entre (S_1) et (S_2) est nulle. Soit $P(S_1\longleftrightarrow S_2)=0$.

4. Le travail, entre les dates t_1 et t_2, de l'action mécanique de l'ensemble matériel (Σ) sur l'ensemble matériel (E), dans le mouvement de (E) par rapport au repère R, est

$$W_{t_1}^{t_2}(\Sigma\longrightarrow E/R)=\int_{t_1}^{t_2}P(\Sigma\longrightarrow E/R)\,dt$$

5. L'ensemble matériel (E) possède une énergie potentielle associée à l'action mécanique d'un ensemble matériel (Σ) sur (E), dans le mouvement de (E) par rapport à un repère R, s'il existe une fonction scalaire $V(\Sigma\longrightarrow E/R)$, telle que :

$$P(\Sigma\longrightarrow E/R)=-\frac{d}{dt}V(\Sigma\longrightarrow E/R)$$

6. Énergie potentielle de la pesanteur d'un ensemble matériel (E) de masse m et de centre d'inertie G :

$$V(g\longrightarrow E/R)=mgz_G$$

Sachant que :
$R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est un repère lié à la terre, l'axe $(O,\vec{z})$ étant dirigé suivant la verticale ascendante. z_G représente l'abscisse sur $(O,\vec{z})$ du centre d'inertie G.

7. Énergie potentielle de deux solides entre lesquels est intercalé un ressort de traction compression de masse nulle :

$$V(r\longrightarrow S_1,S_2)=\frac{K}{2}(l-l_0)^2$$

8. Théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides :

La dérivée, par rapport à la date t, de l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble (E) de solides, est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à (E) et des puissances des actions mutuelles entre chaque solide de (E).

$$\frac{d}{dt}T(E/R_g)=P(\overline{E}\longrightarrow E/R_g)+\sum_{\substack{i=1\\i<j}}^{n}P(S_i\longleftrightarrow S_j)$$

Ce théorème s'écrit également en faisant intervenir le travail des actions mécaniques entre deux dates t_1 et t_2 :

$$T_2(E/R_g)-T_1(E/R_g)=W_{t_1}^{t_2}(\overline{E}\longrightarrow E/R_g)+\sum_{\substack{i=1\\i<j}}^{n}W_{t_1}^{t_2}(S_i\longleftrightarrow S_j)$$

PROBLÈME RÉSOLU

La *figure 9* représente un démarreur manuel pour moteur Diesel.

R(O, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) est un repère galiléen lié au carter du démarreur, ainsi qu'au bâti du moteur.

La vis ⑦ a une liaison pivot d'axe (O, $\vec{x}$) avec le carter du démarreur, et l'écrou ⑨ possède une liaison glissière avec l'arbre creux ⑥. Une roue à rochet ㉜ liée au pignon conique ㊱ interdit la rotation ($-R_y$) de ㊱.

Une roue à rochet débrayable ⑫ liée à ⑰ interdit ou autorise (si débrayée) la rotation ($-R_x$) du pignon ⑰.

Le lancement du moteur s'effectue en cinq phases :

Première phase : Encliquetage de la roue à rochet ⑫, d'où suppression de la rotation ($-R_x$) de ⑰.

Deuxième phase : Rotation ($+R_y$) de ㊱ qui entraîne la rotation ($-R_x$) de ⑥, ⑨ et ⑦. La rotation ($-R_x$) de ⑦ entraîne la translation ($+T_x$) de ⑰ jusqu'à compression totale du ressort ⑭. Le pignon ⑰ engrène avec la couronne de démarreur du moteur et la vis ⑦ est bloquée.

Troisième phase : La vis ⑦ étant immobilisée, la poursuite de la rotation ($-R_x$) de ⑨ entraîne sa translation ($-T_x$) (course $d = 40$ mm) et la compression des rondelles Belleville ⑤.

Quatrième phase : La rotation d'un quart de tour de l'excentrique ㉗ permet le débrayage de la roue à rochet ⑫, d'où rotation ($-R_x$) du pignon ⑰. Sous l'action des rondelles ⑤, la translation ($+T_x$) de l'écrou ⑨, provoque la rotation ($-R_x$) de la vis ⑦. Le système vis ⑦-écrou ⑨ est rendu réversible grâce au faible coefficient de frottement de la liaison hélicoïdale à billes, de pas $p = 10$ mm. La rotation de ⑦ entraîne celle de ⑰ et de la couronne de démarreur du moteur Diesel.

Cinquième phase : Le moteur une fois lancé, provoque le renvoi du pignon ⑰ à sa position initiale, grâce à la rampe hélicoïdale de la vis ⑦ et au ressort ⑭.

Le schéma de la *figure 9* représente la situation du démarreur entre la troisième phase et la quatrième phase. Le but de l'étude est de déterminer, après lancement, la vitesse de rotation de vilebrequin Ⓥ du moteur, dont l'axe de rotation est parallèle à (O, $\vec{x}$).

On note :

x : le déplacement de l'écrou ⑨ par rapport à sa position initiale (rondelles comprimées).

θ : l'angle qui définit la position angulaire de la vis ⑦ par rapport à R, tel que $\theta = 0$ lorsque $x = 0$.

φ : l'angle qui définit la position angulaire du vilebrequin Ⓥ par rapport à R, tel que $\varphi = 0$ lorsque $\theta = 0$.

λ : le rapport de réduction de l'engrenage constitué par le pignon ⑰ et la couronne du démarreur.

I : le moment d'inertie de la vis ⑦ par rapport à son axe de rotation (pièces entraînées en rotation comprises).

J : le moment d'inertie du vilebrequin Ⓥ par rapport à son axe de rotation (pièces entraînées en rotation comprises).

m : la masse de l'écrou ⑨.

K : la raideur de l'ensemble des rondelles Belleville.

C_0 : le moment du couple résistant exercé par le moteur Ⓜ sur le vilebrequin Ⓥ.

On donne :

$\lambda = \frac{1}{10}$; $I = 6 \cdot 10^{-4}$ kg·m²; $J = 4$ kg·m²;

$m = 1{,}65$ kg; $K = 95$ daN/mm; $C_0 = 26$ m·daN.

Toutes les liaisons sont parfaites. L'action mécanique de la pesanteur est négligée.

QUESTION 1

Quelle relation y a-t-il entre la position x de l'écrou ⑨ et la position angulaire θ de la vis ⑦?

RÉPONSE

La vis tournant dans le sens ($-R_x$), $\theta = -8\pi$ lorsque $x = 40$ mm (la course de l'écrou est de 40 millimètres et le pas de la liaison glissière hélicoïdale est $p = 10$ millimètres).

Le pas réduit de la liaison glissière hélicoïdale est $\frac{p}{2\pi}$. Par conséquent, x et θ sont liés par la relation : $x = -\frac{p}{2\pi}\,\theta.$

QUESTION 2

Quelle relation y a-t-il entre la position angulaire θ de la vis ⑦ et la position angulaire φ du vilebrequin Ⓥ?

RÉPONSE

L'engrenage constitué par le pignon ⑰ et la couronne du démarreur étant à contact extérieur :

$$\varphi = -\lambda\theta.$$

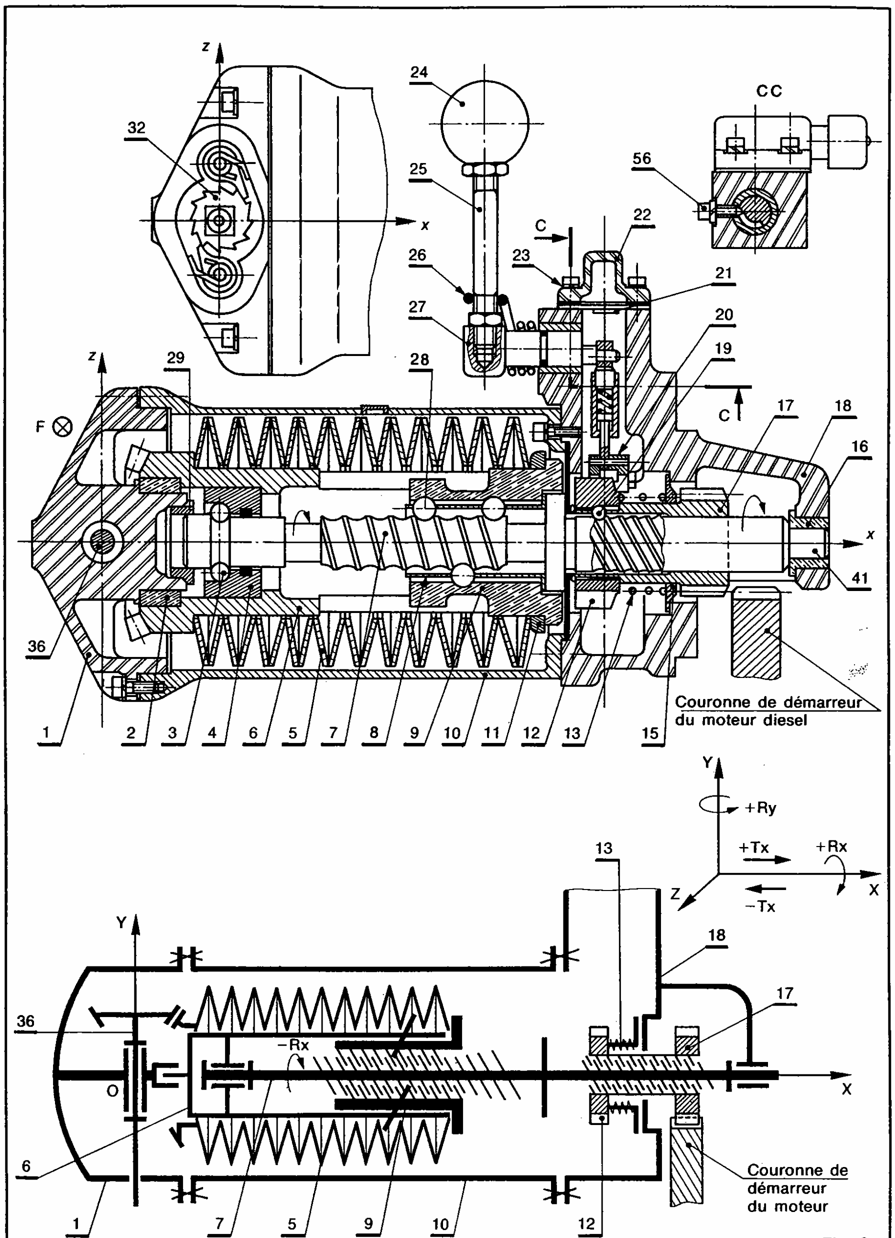

z
x
CC
C
C
x
z
F
Couronne de démarreur
du moteur diesel
Y
+Ry
+Tx
+Rx
Z
X
−Tx
Y
−Rx
O
X
Couronne de
démarreur
du moteur

Fig. 9

QUESTION 3

Déterminer l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble (E) constitué par l'écrou ⑨, la vis ⑦ et le vilebrequin Ⓥ.

RÉPONSE

L'énergie cinétique de (E) dans son mouvement par rapport à R est égale à :

$$T(E/R)=T(\textcircled{9}/R)+T(\textcircled{7}/R)+T(\textcircled{V}/R)$$

l'énergie cinétique de l'écrou ⑨ est

$$T(\textcircled{9}/R)=\frac{1}{2}\,mx'^2,$$

soit, avec $x'=-\frac{p}{2\pi}\,\theta'$, $T(\textcircled{9}/R)=\frac{1}{2}\,m\,\frac{p^2}{4\pi^2}\,\theta'^2$

l'énergie cinétique de la vis ⑦ est

$$T(\textcircled{7}/R)=\frac{1}{2}\,I\theta'^2$$

l'énergie cinétique du vilebrequin Ⓥ est

$$T(\textcircled{V}/R)=\frac{1}{2}\,J\varphi'^2$$

soit, avec $\varphi'=-\lambda\theta'$, $T(\textcircled{V}/R)=\frac{1}{2}\,J\lambda^2\theta'^2.$

Par suite l'énergie cinétique de (E) vaut :

$$\boxed{T(E/R)=\frac{1}{2}\left(m\,\frac{p^2}{4\pi^2}+I+\lambda^2J\right)\theta'^2.}$$

QUESTION 4

Déterminer l'énergie potentielle de l'écrou ⑨ associée à l'action mécanique du ressort constitué par les rondelles Belleville ⑤, supposées de masse nulle.

RÉPONSE

L'action mécanique des rondelles sur l'écrou est représentable par la force $(O, \vec{F})$ telle que :

$$\vec{F}=K(d-x)\vec{x}.$$

Le vecteur vitesse de translation de l'écrou par rapport à R est $x'\vec{x}$.
Par suite, la puissance développée par l'action mécanique des rondelles sur l'écrou, dans son mouvement par rapport à R, est :

$$P(\textcircled{5}\longrightarrow\textcircled{9}/R)=K(d-x)x'$$

puissance qui dérive (au signe près) de l'énergie potentielle :

$$\boxed{V(\textcircled{5}\longrightarrow\textcircled{9}/R)=\frac{1}{2}\,K(d-x)^2.}$$

QUESTION 5

Déterminer la puissance développée par l'action mécanique du moteur Ⓜ sur le vilebrequin Ⓥ, dans son mouvement par rapport à R.

RÉPONSE

Le moment du couple résistant exercé par le moteur Ⓜ sur le vilebrequin Ⓥ est $-C_0\vec{x}$ la vitesse de rotation du vilebrequin est φ' comme $\varphi'=-\lambda\theta'$, la puissance cherchée est égale à :

$$\boxed{P(\textcircled{M}\longrightarrow\textcircled{V}/R)=\lambda C_0\theta'.}$$

QUESTION 6

Quelle équation obtient-on en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à (E) dans son mouvement par rapport à R?
En déduire la vitesse de rotation de la vis du démarreur, à la fin du lancement.

RÉPONSE

L'équation traduisant le théorème de l'énergie cinétique appliqué à (E) dans son mouvement par rapport à R s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\,T(E/R)=P(\textcircled{5}\longrightarrow\textcircled{9}/R)+P(\textcircled{M}\longrightarrow\textcircled{V}/R).$$

Soit, compte tenu des résultats précédents :

$$\left[\frac{d}{dt}\,\frac{1}{2}\left(m\,\frac{P^2}{4\pi^2}+I+\lambda^2J\right)\theta'^2\right]=-\left[\frac{d}{dt}\,\frac{K}{2}\,(d-x)^2\right]+\lambda C_0\theta'.$$

Ou bien, en exprimant la variation de l'énergie cinétique galiléenne de (E) entre deux dates t_1 et t_2, en remarquant au préalable que $d\theta=\theta'\,dt$

$$\frac{1}{2}\left(m\,\frac{P^2}{4\pi^2}+I+\lambda^2J\right)[\theta'^2]_{t_1}^{t_2}=-\frac{K}{2}\,[(d-x)^2]_{t_1}^{t_2}+\lambda C_0[\theta]_{t_1}^{t_2}$$

si la date t_1 est celle du début du lancement :

$$\theta(t_1)=0,\quad \theta'(t_1)=0\quad \text{et}\quad x(t_1)=0$$

si la date t_2 est celle de la fin du lancement :

$$\theta(t_2)=-8\pi,\ \ \theta'(t_2)=\theta'_f(\text{inconnue})\ \ \text{et}\ \ x(t_2)=d$$

la relation s'écrit :

$$\frac{1}{2}\left(m\,\frac{P^2}{4\pi^2}+I+\lambda^2J\right)\theta_f'^2=\frac{Kd^2}{2}-\lambda C_0\times 8\pi$$

d'où

$$\boxed{\theta_f'^2=\frac{\dfrac{Kd^2}{2}-\lambda C_0\times 8\pi}{\dfrac{1}{2}\left(m\,\dfrac{P^2}{4\pi^2}+I+\lambda^2J\right)}.}$$

Avec les valeurs numériques proposées :

$$\boxed{\theta'_f=73{,}09\ \text{rad/s}\,(698\ \text{tr/min})}$$

le vilebrequin du moteur sera donc lancé à la vitesse de rotation de 69,8 tr/min.

CONSEILS POUR LA RÉSOLUTION

1. Ne pas oublier le signe moins dans la définition de l'énergie potentielle :

$$\mathcal{P}(\Sigma \longrightarrow E/R) = -\frac{d}{dt} V(\Sigma \longrightarrow E/R)$$

2. Lorsque deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison parfaite : $\mathcal{P}(S_1 \longleftrightarrow S_2) = 0$. Mais, la puissance $\mathcal{P}(S_1 \longrightarrow S_2/R)$ n'est généralement pas nulle sauf si le repère R est lié à (S_1).

3. L'expression de l'énergie potentielle de la pesanteur établie dans le cours est valable uniquement pour un axe vertical ascendant. Si l'axe vertical est descendant cette expression change de signe.

4. Au chapitre 1 de dynamique figurent des expressions indiquant le double de l'énergie cinétique d'un solide. Ne pas oublier la présence de ce coefficient deux en écrivant le théorème de l'énergie cinétique.

5. L'écriture de théorème de l'énergie cinétique, sous la forme faisant intervenir le travail des actions mécaniques, est souvent très pratique dans les applications.

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 — La *figure 10* représente un extracteur à inertie utilisé pour le démontage des moyeux de roues sur véhicules utilitaires.

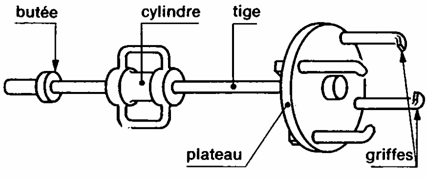


Fig. 10

Il est constitué d'une tige sur laquelle coulisse un cylindre de masse $m_1 = 2$ kg. A l'une des extrémités de cette tige est fixé un plateau muni de 4 griffes destinées à saisir le moyeu. A l'autre extrémité, une butée limite la course du cylindre. Celui-ci, entraîné par l'opérateur à une vitesse supposée uniforme $v_1 = 5$ m/s, vient frapper la butée, permettant ainsi l'extraction du moyeu après plusieurs aller-retour.

La masse des éléments autres que le cylindre est $m_2 = 3$ kg.

QUESTIONS

1. Déterminer la vitesse v_2 de la tige de l'extracteur après le choc du cylindre sur la butée, sachant que v_2 est donnée par la relation :

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2.$$

2. En supposant qu'après le choc, le cylindre reste en contact avec la butée, déterminer la composante axiale des actions de serrage des roulements sur le moyeu, lorsque celui-ci se déplace à chaque frappe de 0,4 mm.

RÉPONSES

1. $v_2 = 2$ m/s.
2. F = 2 500 daN.

2 — La *figure 11* représente le dessin d'un dispositif de marquage automatique de pièces.

Lorsque le doigt ⑨ arrive en face du dégagement de la came ⑧, le marteau ① de masse $m_1 = 0{,}3$ kg chute et frappe le porte-chiffres ② de masse $m_2 = 0{,}1$ kg. ① et ② restent solidaires dans la phase suivante, à la fin de laquelle les chiffres sont marqués dans la pièce ⑩. La came remonte le marteau ①, le porte-chiffres ② est relevé sous l'action du ressort ④ de raideur $K_4 = 1$ N/mm. Celui-ci retrouve approximativement sa longueur libre quand le porte-chiffres est à 4 mm de la pièce. Le ressort ③ a pour raideur $K_3 = 5$ N/mm. Il retrouve sa longueur libre quand le porte-chiffres ② entre en contact avec la pièce ⑩. En position haute du marteau, 3 mm sépare celui-ci du porte-chiffres ②. Soit $\|\vec{g}\| = 10$ m/s^2 l'accélération de la pesanteur.

QUESTIONS

1° Déterminer la vitesse v_1 du marteau ① quand il arrive en contact avec le porte-chiffres ②.

2° Déterminer la vitesse v_2 de l'ensemble {①, ②} après le choc entre ① et ②, sachant que v_2 vérifie la relation :

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2.$$

3° Déterminer l'énergie disponible quand le porte-chiffres ② entre en contact avec la pièce ⑩.

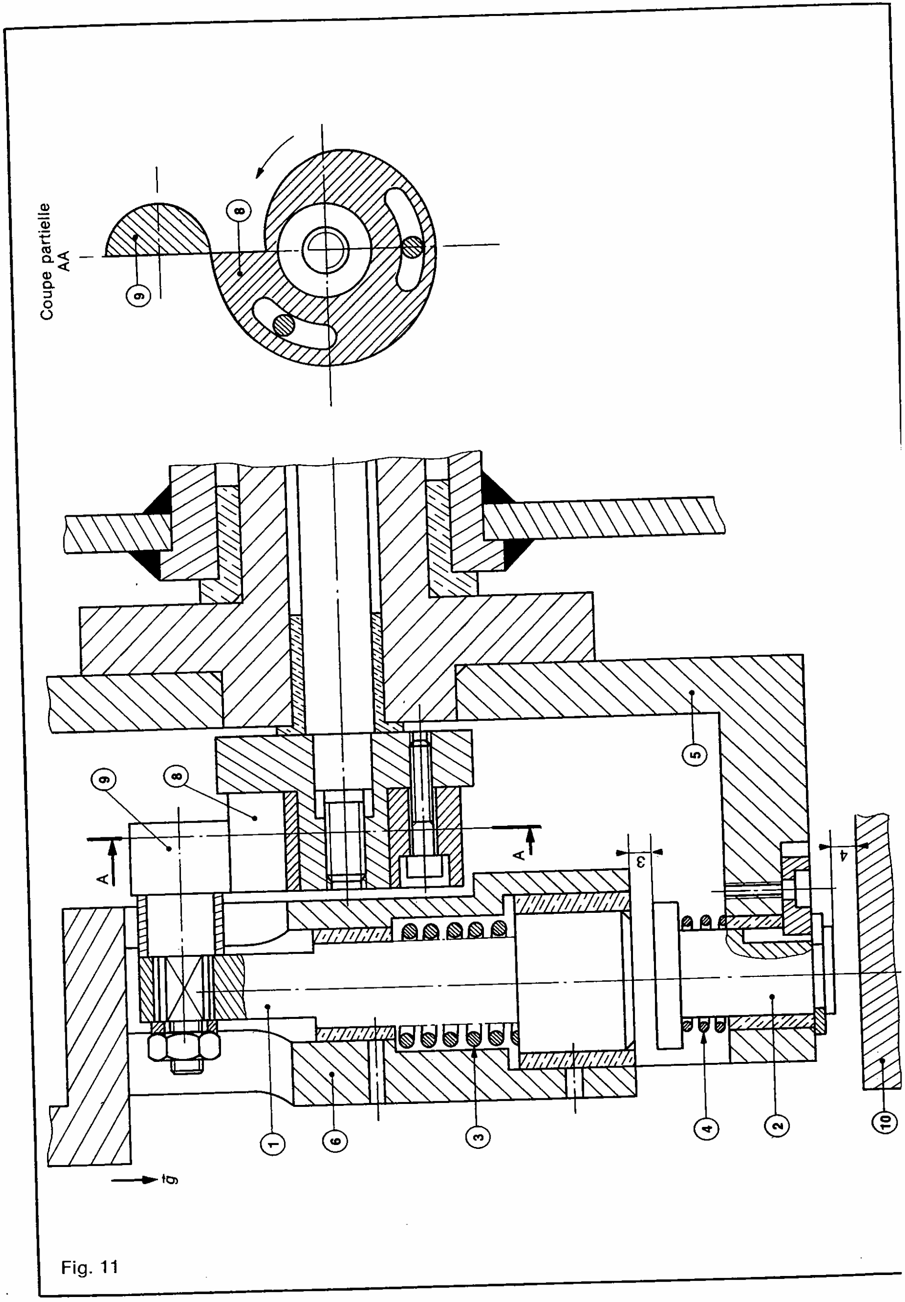

Coupe partielle AA
9
8
A
A
1
2
3
4
5
6
8
9
10
ε
4
g

Fig. 11

RÉPONSES

1° $v_1 = 0{,}780$ m/s.

2° $v_2 = 0{,}585$ m/s.

3° $E = 0{,}116$ J.

3 — La *figure 12* représente le schéma d'un vérin à double effet.
Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au corps (S_0) du vérin. L'axe $(O, \vec{x})$ est placé suivant l'axe du vérin et l'axe $(O, \vec{y})$ est dirigé suivant la verticale ascendante.

On désigne par $\vec{g} = -g\vec{y}$ l'accélération de la pesanteur. La tige (S), de centre de gravité G, de masse m, est supportée par (S_0) en deux liaisons, qui peuvent être schématisées par deux liaisons ponctuelles avec frottement (coefficient de frottement f) aux points A et B situés sur l'axe $(O, \vec{x})$.

On pose :

$$\overline{OB} = 2l\vec{x} \quad (l \text{ : constante positive})$$
$$\overline{OA} = x\vec{x} \quad \text{avec } 0 \leqslant x \leqslant 1{,}8l$$
$$\overline{AG} = l\vec{x}$$

Les actions mécaniques de (S_0) sur (S) dans ces deux liaisons ponctuelles en A et B sont caractérisées respectivement par les deux forces $(A, \vec{R}_A)$ et $(B, \vec{R}_B)$.

On pose :

$$\vec{R}_A = X_A\vec{x} + Y_A\vec{y}$$
$$\vec{R}_B = X_B\vec{x} + Y_B\vec{y}.$$

On exerce également sur la tige une action mécanique caractérisée par la force $(A, -F\vec{x})$, avec $F \geqslant 0$.
Le but de l'étude est de déterminer la vitesse en fin de course de la tige (S) par rapport au corps (S_0).

QUESTIONS

1° Écrire les trois équations scalaires déduites du principe fondamental de la dynamique appliqué à la tige (S) dans son mouvement par rapport à R.

2° Déterminer Y_A et Y_B.

3° En déduire X_A et X_B dans les deux cas suivants :

***a*) $0 \leqslant x \leqslant l$**

***b*) $l \leqslant x \leqslant 1{,}8l$**

4° Pour une évolution quasi statique de la tige (S), déterminer les expressions de F dans les deux cas précédents.
Tracer le graphe de F en fonction de x. Préciser les coordonnées des points remarquables.

5° On suppose maintenant que

$$F = Cte = F_0 > 9fmg.$$

***a*) Déterminer le travail des actions mécaniques s'exerçant sur la tige (S), lorsqu'elle se déplace de la position $x = 1{,}8l$ à la position $x = 0$.**

***b*) Par application du théorème de l'énergie cinétique, déterminer la vitesse de fin de course de la tige (S) par rapport au corps (S_0).**

RÉPONSES

2° $Y_A = mg\dfrac{l-x}{2l-x}$ $\begin{cases} Y_A \geqslant 0 \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant l \\ Y_A \leqslant 0 \text{ si } l \leqslant x \leqslant 1{,}8l \end{cases}$

$Y_B = \dfrac{mgl}{2l-x}$ $Y_B > 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1{,}8l$.

3° *Premier cas :* $0 \leqslant x \leqslant l$

$$X_A \geqslant 0, \quad Y_A \geqslant 0 \implies X_A = fY_A$$
$$X_B \geqslant 0, \quad Y_B > 0 \implies X_B = fY_B.$$

Deuxième cas : $l \leqslant x \leqslant 1{,}8l$

$$X_A \geqslant 0, \quad Y_A \leqslant 0 \implies X_A = -fY_A$$
$$X_B \geqslant 0, \quad Y_B > 0 \implies X_B = fY_B.$$

4° *Premier cas :* $0 \leqslant x \leqslant l$

$$F = fmg.$$

Deuxième cas : $l \leqslant x \leqslant 1{,}8l$

$$F = fmg\frac{x}{2l-x}.$$

5° *a*) $W^0_{1,8l}(-F_0\vec{x}) = \displaystyle\int_{1,8l}^{0} -F_0\,dx = 1{,}8F_0l$

$W^0_{1,8l}(-mg\vec{y}) = 0$

$W^0_{1,8l}(\vec{R}_B) = \displaystyle\int_{1,8l}^{0} fmgl\frac{dx}{2l-x} = -2{,}3fmgl$

$W^0_{1,8l}(\vec{R}_A) = -\displaystyle\int_{1,8l}^{l} fmg\frac{l-x}{2l-x}dx + \int_{l}^{0} fmg\frac{l-x}{2l-x}dx$

$= -0{,}81fmgl - 0{,}31fmgl$

$W^0_{1,8l}(\vec{R}_A) = -1{,}12fmgl.$

b) $v = \sqrt{2gl\left(1{,}8\dfrac{F_0}{mg} - 3{,}42f\right)}.$

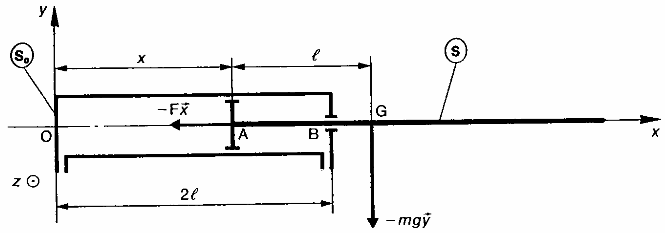


Fig. 12

4 — La *figure 13* représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à son axe de révolution matérielle, à partir de la mesure de la période de son oscillation sur deux portées cylindriques d'un bâti (Σ).

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au bâti (Σ). On désigne par $\vec{g} = g\vec{x}$ l'accélération de la pesanteur.

Les deux portées cylindriques de (Σ) sont deux éléments de la surface du cylindre de révolution d'axe $(O, \vec{z})$, de rayon r.

Le solide (S) de masse m, de centre d'inertie C, possède deux tourillons de même rayon a ($a < r$).

L'étude se ramène à celle du problème plan suivant :

Le tourillon de (S), de centre C, roule sans glisser au point A sur la portée cylindrique de (Σ).

Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ le repère, tel que le point C soit sur l'axe $(O, \vec{x}_1)$. On pose : $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.

Soit $R_2(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ un repère lié à (S). On pose : $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x})$. On suppose que $\varphi = 0$, lorsque $\theta = 0$.

Notons I le moment d'inertie de (S) par rapport à son axe de symétrie $(C, \vec{z})$, et f le coefficient de frottement entre (S) et (Σ). On donne :

$a = 12{,}5$ mm; $r = 141{,}1$ mm; $g = 9{,}81$ m/s^2; $m = 7\,217$ g; $f = 0{,}15$.

QUESTIONS

1° Quelle relation y a-t-il entre φ et θ?

2° Quelle équation obtient-on en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à (S) dans son mouvement par rapport à R?

3° En supposant que l'angle θ reste petit au cours du mouvement, déterminer la période T des oscillations de (S).

4° En déduire le moment d'inertie I de (S), sachant que T = 5 secondes.

5° On suppose à la date $t = 0$, que $\theta = \theta_0$ et $\theta' = 0$. Déterminer la valeur maximale de θ_0 pour que (S) roule sans glisser sur (Σ).

RÉPONSES

1° $r\theta = -a\varphi$.

2° $\frac{1}{2}\left[I\left(1 - \frac{r}{a}\right)^2 + m(r-a)^2\right]\theta'^2 = mg(r-a)\cos\theta + C$

3° $T^2 = \frac{4\pi^2}{g}(r-a)\left(1 + \frac{I}{ma^2}\right)$

4° $I = 0{,}0534$ kg·m^2

5° $\theta_{0\,\max} = f\left(1 + \frac{ma^2}{I}\right)$

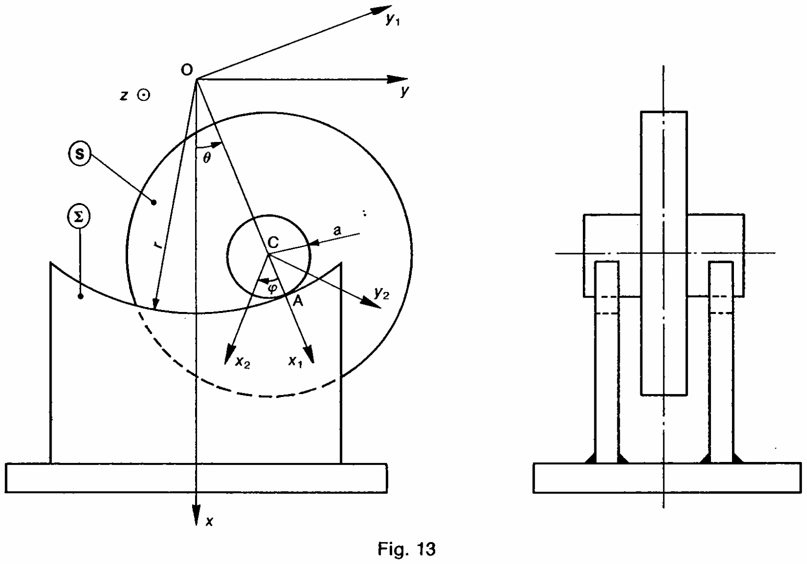


Fig. 13

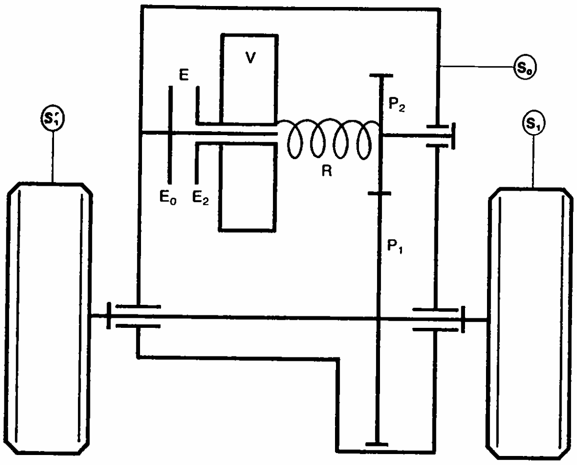


Fig. 14

5 — La *figure 14* représente le schéma cinématique du mécanisme d'entraînement, d'une voiture jouet à friction.

Les roues arrière (S_1) et (S_1'), de rayon $r = 2$ cm sont entraînées par un engrenage (P_1, P_2) dont le rapport de transmission est $\rho = 40$. Le pignon (P_2) est relié au volant d'inertie (V) par l'intermédiaire du ressort de torsion R. Solidaire du volant (V), le plateau (E_2), en liaison pivot glissant avec le chassis (S_0), constitue avec le plateau (E_0), lié à (S_0), un frein de couple de frottement C_f.

Le contact roue/sol est supposé ponctuel de coefficient de frottement $f = \text{tg}\ \varphi = 1$. Les résistances au roulement et de pénétration dans l'air sont négligées. Toutes les liaisons sont parfaites, sauf bien entendu la liaison appui plan au niveau du frein.

Pendant la période de lancement, une action est exercée avec la main sur le chassis (S_0) de telle manière que la voiture prenne un mouvement de translation. L'essieu arrière moteur est chargé verticalement par une action $\|\vec{Q}\| = 80$ N.

Les roues, supposées à la limite du glissement par rapport au sol, entraînent le ressort par l'intermédiaire de l'engrenage. Le ressort n'entraînera le volant (V) que lorsque son couple C_R sera supérieur à C_f.

QUESTIONS

1° Calculer l'angle de torsion θ du ressort lorsque $C_f = 2 \cdot 10^{-3}$ Nm et que sa raideur

$$K = \frac{1}{3\pi} \cdot 10^{-3} \text{ Nm/rad.}$$

2° Calculer l'énergie mécanique du véhicule (énergie cinétique du volant et énergie potentielle du ressort) à la fin du lancement lorsque celui-ci s'effectue sur un tour des roues arrière.

3° Déterminer la distance x parcourue par le véhicule jusqu'à l'arrêt.

RÉPONSES

1° $\theta = 6\pi$ (trois tours).

2° $E_m = W(\vec{Q}\ \text{tg}\ \varphi) + W(\vec{C}_f)$.
$W(\vec{Q}\ \text{tg}\ \varphi) = 80 \times 1 \times 2\pi = 2 \cdot 10^{-2} = 10{,}053$ J
$W(\vec{C}_f) = -2 \cdot 10^{-3}(40 - 3)2\pi = -0{,}465$ J
$E_m = 10{,}053 - 0{,}465 = 9{,}59$ J

3° $E_m = C_f \cdot \alpha$
α : angle balayé par le plateau (E_2) pendant la période de ralentissement, par suite $x = 2{,}4$ m.

EXERCICES SANS RÉPONSES

6 — Un moteur électrique entraîne un laminoir. Son arbre est solidaire d'un volant d'inertie (S) de rayon $r = 1$ m, dont la masse $M = 500$ kg est supposée répartie sur la jante *(figure 15)* :

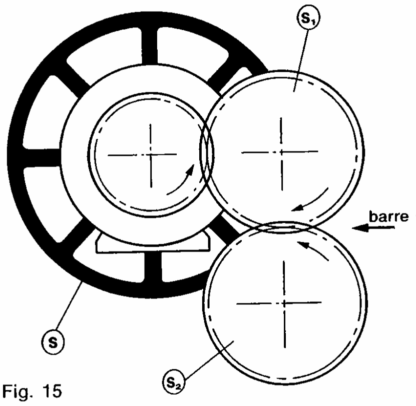


Fig. 15

L'arbre moteur entraîne en rotation, en sens inverse, les deux cylindres (S_1) et (S_2) du laminoir, par l'intermédiaire d'engrenages.

Soit $K = \frac{2}{3}$ le rapport des vitesses de rotation entre les cylindres et l'arbre moteur.

Soit $I = 10\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ le moment d'inertie des cylindres par rapport à leur axe de rotation. Les différentes liaisons sont supposées parfaites.

QUESTIONS

1° Déterminer l'inertie équivalente du volant d'inertie et des cylindres, rapportée à l'arbre moteur du laminoir.

2° Pendant la phase de démarrage du laminoir. Le moteur exerce un couple de moment constant $C_0 = 160$ mN.
Déterminer au bout de combien de temps le moteur aura atteint sa vitesse angulaire de fonctionnement de 600 tr/min.

3° A l'instant où l'on engage une barre la vitesse angulaire du moteur est de 600 tr/min. Lorsque la barre est passée à travers le laminoir, cette vitesse n'est plus que de 450 tr/min.
Déterminer le travail exigé par cette opération, sachant qu'elle a duré 1,5 seconde, et que le moteur a développé une puissance constante de 10 kW.

7 — Considérons le mécanisme plan de commande d'une tige par excentrique représenté *figure 16.*

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au bâti (Σ). On désigne par $\vec{g} = -g\vec{y}$ l'accélération de la pesanteur. L'excentrique (S) de masse m est assimilé à un disque de centre d'inertie C, de rayon a. (S) a une liaison pivot sans frottement d'axe $(O, \vec{z})$ avec (Σ). Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à (S) tel que $\overrightarrow{OC} = e\vec{x}_1$ $(0 < e < a)$.

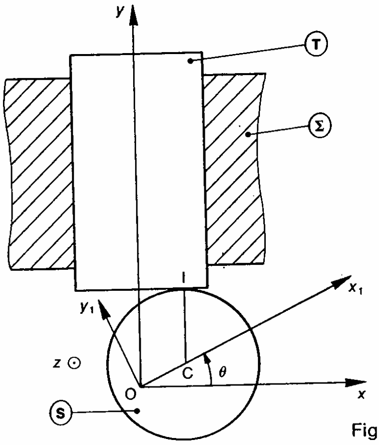


Fig. 16

On pose $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$, avec $\theta = \omega t$ et ω constante positive.

La tige (T), de masse M, a une liaison glissière sans frottement d'axe $(O, \vec{y})$ avec (Σ).

(S) et (T) sont en contact ponctuel avec frottement (coefficient de frottement f) en un point I de la section droite extrême de la tige.

QUESTIONS

1° Déterminer le vecteur vitesse de glissement au point I de (S) par rapport à (T).

2° Déterminer le travail perdu par frottement par les actions mutuelles entre (S) et (T) pendant un tour de l'excentrique.

3° Déterminer l'expression, en fonction du temps, du moment du couple moteur qui entraîne en rotation (S) à vitesse angulaire constante. Conclusion.

8 — La *figure 17* définit les différents éléments constituant le tour vertical BERTHIEZ à commande numérique.

Le bloc porte-outil est fixé à l'extrémité du coulant. Le programme d'usinage définit pour chaque opération le contrat de phase (choix de l'outil, vitesse de coupe, avance par tour, longueur d'usinage...). Lorsqu'une opération s'achève, le coulant et le porte-outil se déplacent d'un mouvement de translation rectiligne vers le magasin. Un dispositif libère le porte-outil et vient le ranger dans le bloc qui lui est réservé.

La présélection commande alors la rotation d'axe vertical du magasin, la liaison entre le nouveau porte-outil et le coulant s'effectue.

Le mouvement de retour du coulant vers le magasin a une amplitude de 1,4 m et comporte 3 phases :

Phase 1 : Mouvement uniformément accéléré. En deux secondes le coulant atteint la vitesse de 3,6 m/min.

Phase 2 : Mouvement uniforme.

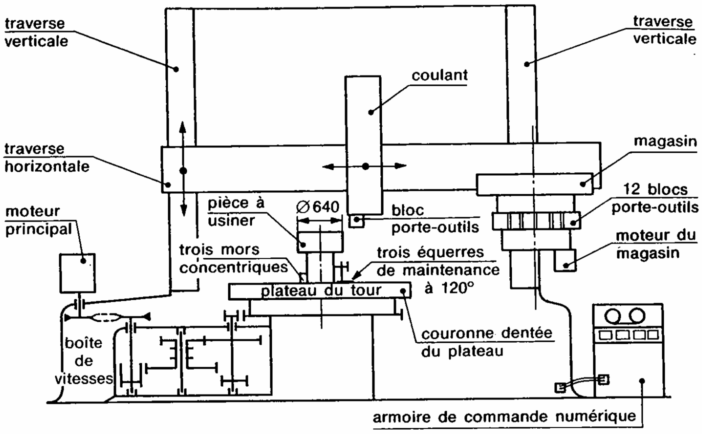

traverse verticale
traverse verticale
coulant
magasin
traverse horizontale
12 blocs porte-outils
moteur principal
pièce à usiner
Ø640
bloc porte-outils
moteur du magasin
trois mors concentriques
trois équerres de maintenance à 120°
plateau du tour
couronne dentée du plateau
boîte de vitesses
armoire de commande numérique

Fig. 17

Phase 3 : Mouvement uniformément retardé sur 0,2 m.

La masse du coulant est $m_1 = 2\,000$ kg celle du porte-outil $m_2 = 20$ kg. Le coefficient de frottement entre le coulant et la traverse est $f = 0{,}1$.

Un bloc porte-outil vient d'être reposé dans le magasin. Le programme d'usinage demande l'utilisation du bloc porte-outil situé à côté, mais le moteur ne fonctionnant que dans un seul sens, oblige une rotation de 330° du magasin. Le rapport de transmission de l'engrenage {pignon moteur, couronne du magasin} est $i = 0{,}1$. Chaque porte-outil est assimilable, au point de vue de son inertie à un cylindre plein de diamètre $d = 180$ mm, de hauteur $h = 200$ mm et de masse volumique $\rho = 7\,800$ kg/m^3. Le magasin peut contenir douze porte-outils régulièrement répartis sur un cercle de rayon $R = 610$ mm, son moment d'inertie, lorsqu'il est vide, par rapport à son axe de rotation est $J_M = 50$ kg·m^2.

QUESTIONS

1° Déterminer la puissance nécessaire pour chacune des phases de translation du coulant.

2° Déterminer le couple nécessaire au niveau du moteur du magasin pour que la mise en vitesse se fasse en 1,44 s sur un angle de rotation de 30°. On supposera que le couple moteur est constant pendant cette phase du mouvement et que les frottements dans les liaisons introduisent un rendement $\eta = 0{,}9$.

9 — On se propose d'étudier le comportement dynamique d'une ligne d'arbres sur laquelle est installé un embrayage *(figure 18)*.

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au carter du moteur et du récepteur, l'axe $(O, \vec{x})$ étant confondu avec l'axe de rotation des arbres.

Données

Arbre moteur :

- Liaison pivot parfaite avec le carter du moteur.
- I_m : moment d'inertie par rapport à l'axe $(O, \vec{x})$ (pièces entraînées en rotation comprises).
- ω_m : vitesse de rotation par rapport à R.
- C_m : moment du couple exercé par le moteur.

Arbre récepteur :

- Liaison pivot parfaite avec le carter du récepteur.
- I_r : moment d'inertie par rapport à l'axe $(O, \vec{x})$ (pièces entraînées en rotation comprises).
- ω_r : vitesse de rotation par rapport à R.
- C_r : moment du couple exercé par le récepteur.

ω_m, ω_r, C_m et C_r sont des fonctions du temps t. Soit C_g le moment du couple maximum que peut transmettre l'embrayage. C_g est fonction de la construction et du réglage de l'embrayage, on le considérera donc comme connu et constant.

QUESTIONS

1° Déterminer l'accélération angulaire de chaque arbre au moment de l'embrayage, en fonction de C_m, C_r et C_g.

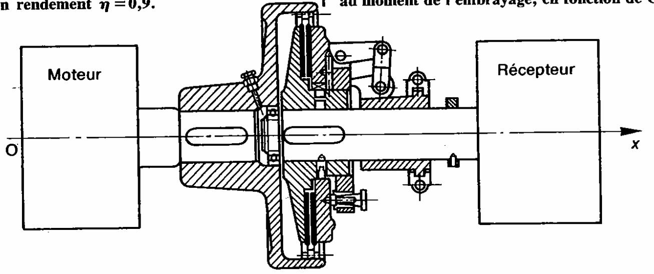

Moteur
Récepteur
O
x

Fig. 18

2° Déterminer la durée T de la phase de glissement de l'embrayage, si on admet qu'au cours de cette période C_m et C_r sont constants, et qu'à la date $t=0$: $\omega_r=0$ et $\omega_m=\Omega$ ($\Omega>0$).

3° Tracer le graphe des fonctions $\omega_m(t)$ et $\omega_r(t)$ pendant cette phase de glissemennt, dans le cas où $C_g > C_m > C_r$

4° Tracer le graphe de la fonction $T(C_g)$.

5° En déduire la valeur minimum de C_g pour que la solidarisation des arbres puisse avoir lieu.

6° Déterminer l'énergie dissipée par frottement dans l'embrayage pendant la phase de glissement.

7° *Applications numériques :*

$$I_m=6\ \text{kg}\cdot\text{m}^2;\quad I_r=4\ \text{kg}\cdot\text{m}^2;\quad C_m=1\,200\ \text{mN};$$
$$C_r=600\ \text{mN};\quad \Omega=1\,800\ \text{tr/min}.$$

***Premier cas :* $C_g=1\,750$ mN (embrayage « dur »).**
***Deuxième cas :* $C_g=990$ mN (embrayage « mou »).**

10 — L'étude concerne le dispositif de transmission de puissance, d'un mouvement longitudinal de table de machine-outil à commande numérique *(figure 19).*

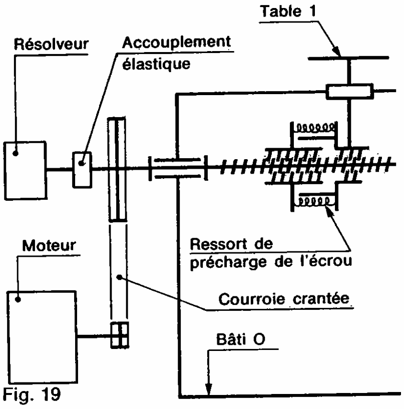


Fig. 19

La table (1) en liaison glissière G avec le bâti (0) est entraînée par un système vis-écrou.
L'écrou est sans jeu grâce à un système de précharge axiale.
La vis de commande fait l'objet d'une liaison pivot P avec le bâti. Cette liaison est réalisée par deux roulements à galets coniques préchargés. La vis entraîne également le résolveur par un accouplement élastique. Elle reçoit le mouvement du moteur par une transmission à courroie crantée, dont le rapport de réduction est $K=\frac{1}{5}$. Le démarrage du moteur électrique jusqu'à sa mise en rotation uniforme nécessite un intervalle de temps t_d. Le but de l'étude est d'évaluer le déplacement de la table pendant cette période transitoire pour prévoir un dégagement, avant le mouvement uniforme opérationnel de la table.

Données

— Précharge axiale de l'écrou : $\|\vec{F}_e\|=2\,500$ N.
— Caractéristiques de la vis :

- diamètre nominal = 16 mm;
- diamètre moyen = 15 mm;
- pas = $p=2$ mm (un filet à droite);
- angle d'inclinaison du flanc du filet : $\beta=15°$;
- coefficient de frottement du contact vis/écrou : $f=\text{tg}\ \varphi=0{,}08$;

— Inertie des éléments entraînés :

- M = 100 kilogrammes : masse de tout l'équipement lié à la table et entraîné dans sa translation;
- $J_1=1\,500\ \text{g}\cdot\text{cm}^2$: moment d'inertie par rapport à l'axe moteur de tout l'équipement tournant porté par l'arbre moteur;
- $J_2=600\ \text{g}\cdot\text{cm}^2$: moment d'inertie par rapport à l'axe de la vis de tout l'équipement tournant porté par l'axe de la vis.

— Cycle de démarrage du moteur électrique (courbe caractéristique *figure 20*) :

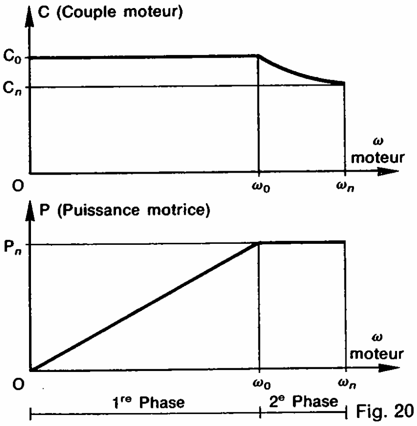


Fig. 20

- Première phase : fonctionnement du moteur à couple constant : $C_0=90$ cmN.
- Deuxième phase : fonctionnement du moteur à puissance motrice constante : $P_n=240$ W (puissance nominale).

Hypothèses

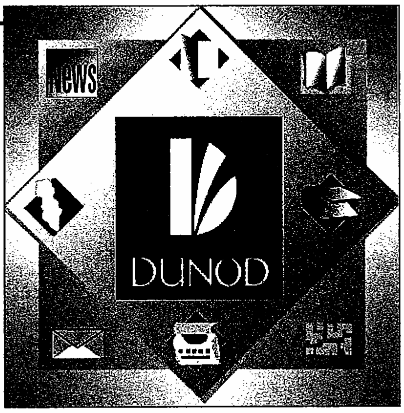
— Liaison glissière G et liaison pivot P parfaites.
— Pertes dans la transmission par courroie et entraînement du résolveur négligées.

QUESTIONS

1° Déterminer le moment C_r du couple résistant de l'action mécanique de l'écrou sur la vis.
2° Déterminer le moment d'inertie équivalent I de la chaîne cinématique, rapporté à l'arbre moteur.
3° Déterminer la vitesse de rotation ω_0 du moteur à la fin de la première phase de démarrage.
4° Déterminer la durée t_1 de la première phase et l'angle de rotation de l'arbre moteur θ_1 correspondant.
5° Déterminer la durée t_2 de la deuxième phase et l'angle de rotation de l'arbre moteur θ_2 correspondant, sachant que $t_2=\frac{2}{3}t_1$, et que la vitesse de translation de la table, à la fin de cette phase, est de 1 200 mm/min.
6° En déduire la durée totale t_d de la phase de démarrage, et le déplacement de la table pendant cette période transitoire.

Consultez nos catalogues
sur le Web...

http://www.dunod.com


Bienvenue
News
Catalogue général
Presse
Nouveautés
Contactez-nous
Où trouver nos ouvrages
Accueil Auteurs
DUNOD

SCIENCES SUP

Pierre Agati • Yves Brémont • Gérard Delville

MÉCANIQUE DU SOLIDE
Applications industrielles

Cet ouvrage de **mécanique générale**, destiné aux étudiants de l'enseignement technique supérieur (DEUG de technologie industrielle, Instituts universitaires de Technologie, sections de Techniciens Supérieurs, classes préparatoires) et aux auditeurs de la formation continue, trouve son originalité dans le choix des applications qui concernent toutes des mécanismes industriels.

Trois parties y sont développées :
- cinématique,
- statique,
- dynamique du solide.

Chaque chapitre comporte de très nombreux exercices corrigés pour se préparer efficacement aux examens et aux concours.

Ce livre de mécanique générale est complété par un livre de **mécanique appliquée** (résistance des matériaux, hydraulique et thermodynamique appliquées).

PIERRE AGATI
est professeur agrégé à l'Institut national polytechnique de Grenoble.

YVES BRÉMONT
ET GÉRARD DELVILLE
sont professeurs au Centre de formation des professeurs de l'enseignement technique de Cachan.

MATHÉMATIQUES
PHYSIQUE
CHIMIE
PHYSIQUE APPLIQUÉE
INFORMATIQUE
SCIENCES DE LA NATURE
ET DE LA VIE

9 782100 041558
ISBN 2 10 004155 X
Code 044155

DUNOD